Table des matières

Racines d'une équation non linéaire

1.1 Méthode de Dichotomie

Le but de cette méthode est d'approcher une solution, l, de l'équation

$$f(x) = 0.$$

1.1.1 Principe de la méthode de dichotomie

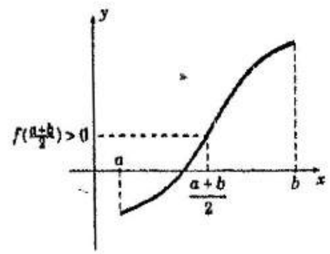
La méthode de dichotomie (ou méthode de la bissection) suppose que la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, strictement monotonne sur cet intervalle et vérifie $f(a)f(b) < 0$.

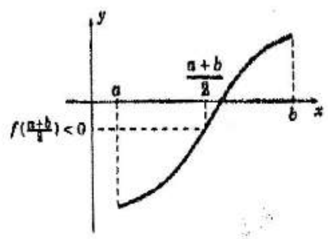
Principe

On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$, on calcule $x_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$, le milieu de l'intervalle de départ, et on évalue la fonction f en ce point.

Si $f(x_0) = 0$, le point x_0 est la solution de l'équation $f(x) = 0$ et le problème est résolu.

Sinon, si $f(a_0)f(x_0) < 0$, alors la solution l est contenu dans l'intervalle $]a_0; x_0[$, alors qu'elle appartient à $]x_0; b_0[$ si $f(x_0)f(b_0) < 0$.





On réitère ensuite ce processus sur l'intervalle $[a_1; b_1]$, avec $a_1 = a_0$ et $b_1 = x_0$ dans le premier cas, ou $a_1 = x_0$ et $b_1 = b_0$ dans le second, et ainsi de suite...

De cette façon, on construit de manière récurrente trois suites numériques $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a, b_0 = b$ et vérifiant, pour entier naturel k,

- $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$,
- $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$ si $f(a_k)f(x_k) < 0$,
- $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$ si $f(x_k)f(b_k) < 0$.

1.1.2 Convergence de la méthode de dichotomie

Proposition 1.
Soit f une fonction continue, strictement montonne sur un intervalle $[a,b]$, vérifiant $f(a)f(b) < 0$, et soit $l \in]a,b[$ l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. Alors, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de dichotomie converge vers l et on a l'estimation

$$|x_k - l| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} \tag{1.1}$$

Il ressort de cette proposition que la méthode de dichotomie converge de manière certaine, c'est une méthode globalement convergente. L'estimation d'erreur précédente fournit directement un critère d'arrêt pour la méthode de Dichotomie, puisque, à ε donnée, cette estimation permet d'approcher l en un nombre prévisible d'itérations. En effet, pour avoir $|x_k - l| \leq \varepsilon$, il suffit que

$$\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\ln(2)} - 1 \leq k$$

Pour améliorer la précision de l'approximation de la solution d'un ordre de grandeur, c'est-à-dire trouver $k > j$ tel que $|x_k - l| = \frac{1}{10}|x_j - l|$, il faut effectuer $k - j = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 3,32$ itérations. La convergence de cet algorithme est donc lente. Enfin, la méthode de dichotomie ne garantit pas une réduction monotone de l'erreur absolue d'une itération à l'autre. Ce n'est donc pas une méthode d'ordre un. On gardera donc à l'esprit que la méthode de dichotomie est une méthode robuste permettant d'obtenir une approximation raisonnable de la solution l pouvant servir à l'initialisation d'une méthode dont la convergence est plus rapide mais seulement locale, comme la méthode de Newton-Raphson

Test d'arrêt

Pour que l'élément x_n de la suite de dichotomie, à la $n^{\text{ième}}$ itération, soit une valeur approchée de l à $\varepsilon > 0$ près, il suffit que n vérifie

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

On a alors

$$|l - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

ce qui permet de calculer à l'avance le nombre maximal $n_0 \in \mathbb{N}$ d'itérations assurant la précision ε.

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b-a}{\varepsilon} \leq 2^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln\frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} - 1$$

1.1.3 Algorithme et progamme en langage C

Algorithme

Tout d'abord on définit une fonction f (ici par exemple $f(x) = x^2 - 10$) :

```
definir f(x)
    retourne (x * x - 10)

début
    lire(a);
    lire(b);
    lire(ε);
    repeter
        c ← (a+b)/2;
        si
            f(a)f(c) < 0  alors  b ← c;
        sinon
            a ← c;
        finsi
    jusqu'à |b − a| ≤ ε;
    écrire(la valeur approchée de la solution est c);
fin.
```

Méthode de dichotomie itérative

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
\\Pour chercher une valeur approchée à la racine de 10, on résoud l'équation f(x) = x^2 - 10 = 0
float f(float x)
{ return x*x-10;
}

\\l'algorithme itératif de la méthode de dichotomie pour une fonction f
\\continue sur un intervalle [a,b], strictement monotone et f(a).f(b)<0
float Dichotomie(float a, float b, float precision)
{
float c;
        printf(" .....L'Evolution de la suite des intervalles emboitEs....\n");
        printf("..... dont la longueur tend vers ZERO (la valeur de precision)...\n\n");
        do
        {
```

```
            printf("[%f - %f] \n", a,b) ;
            c=(a+b)/2 ;
            if (f(c)*f(a)>0 )
                a=c ;
            else
                b=c ;
        }
        while(fabs(a-b)>precision) ;
        return c ;
}
int main()
{
float a,b,precision,ValApproch ;
printf("....Choix de l'intervalle [a,b] telque f(a).f(b)<0... \n\n ") ;
printf("......... f(x)=x*x-10 .....\n\n ") ;
printf("Donner la valeur de a : ") ;
scanf("%f",&a) ;
printf("Donner la valeur de b : ") ;
scanf("%f",&b) ;
printf("Donner la valeur de la precision pour une solution approchee : ") ;
scanf("%f",& precision) ;
printf("\n \n ...l'algorithme itEratif de la méthode de dichotomie pour la
fonction f ...\n\n\n") ;
ValApproch=Dichotomie(a,b,precision) ;
printf("\n la valeur approchee de racine(10) est donc = %f ",ValApproch) ;
getch() ;
}
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <Math.h>
double f(double x)
{
        double y ;
        y=(x+1) ;
        return y ;
}

int main() {
int i,n ;
double a,b,x ;
double E ;
double c ;
```



```
printf("\n donner l'interval [ a b ] : ") ;
scanf("%lf %lf",&a,&b) ;
printf("donner E : ") ;
scanf("%lf",&E) ;

do
{
        c = (a+b)/2 ;
        if (f(a)*f(c)<0)
                b = c ;
        else
                a = c ;
}
while(abs(b - a) >= E) ;
printf("la valeur approchée de la solution est %lf", c) ;
return 0 ;
}
```

Méthode de dichotomie récursive

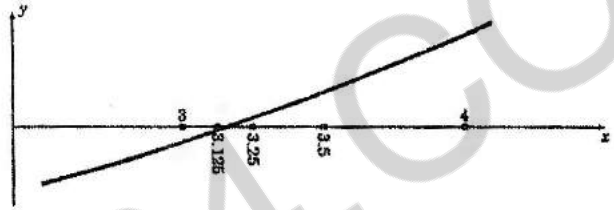
```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>

//Pour chercher une valeur approchée à la racine de 10, on résoud l'équation f(x) = x^2 - 10 = 0

float f(float x)
{ return x*x-10 ;
}
//l'algorithme recursif de la méthode de dichotomie pour une fonction f
//continue sur un intervalle [a,b], strictement monotone et f(a).f(b)<0

float Dichotomie(float a, float b, float precision)
{
float c ;
if (fabs(a-b)<=precision)
        return a ;
else
        {
        printf("[%f - %f] \n",a,b) ;
        c=(a+b)/2 ;
```

```
            if (f(a)*f(c)<=0 )
                 return Dichotomie(a,c,precision);
            else
                 return Dichotomie(c,b,precision);

            }
}
int main()
{ float a,b,precision,ValApproch;
printf("....Choix de l'intervalle [a,b] telque f(a).f(b)<0...\n \n ");
printf("......... f(x)=x*x-10 .....\n\n ");
printf("Donner la valeur de a : ");
scanf("%f",&a); printf("Donner la valeur de b : ");
scanf("%f",&b);
printf("Donner la valeur de la precision pour une solution approchee : ");
scanf("%f",& precision);
printf("\n\n ...l'algorithme recursive de la méthode de dichotomie pour la fonction f...\n\n\n");
printf(" .....L'Evolution de la suite des intervalles emboitEs....\n");
printf("..... dont la longueur tend vers ZERO (la valeur de precision)...\n\n");

ValApproch=Dichotomie(a,b,precision);
printf("\n une valeur approchee de racine carrée de 10 avec une pressision de %f est donc = %f
",precision,ValApproch);
getch();
}
```

1.1.4 Résultats numériques pour $\sqrt{10}$

Nous allons calculer une approximation de $\sqrt{10}$. Soit la fonction f définie par $f(x)=x^2-10$, c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\pm\sqrt{10}$. De plus $\sqrt{10}$ est l'unique solution positive

de l'équation $f(x)=0$. Nous pouvons restreindre la fonction f à l'intervalle $[3,4]$: en effet $3^2=9\leqslant 10$ donc $3\leqslant\sqrt{10}$ et $4^2=16\geqslant 10$ donc $4\geqslant\sqrt{10}$. En d'autres termes $f(3)\leqslant 0$ et $f(4)\geqslant 0$, donc l'équation $(f(x)=0)$ admet une solution dans l'intervalle $[3,4]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, et par unicité c'est $\sqrt{10}$, donc $\sqrt{10}\in[3,4]$.
Notez que l'on ne choisit pas pour f la fonction $x\mapsto x-\sqrt{10}$ car on ne connait pas la valeur de $\sqrt{10}$. C'est ce que l'on cherche à calculer !



Voici les toutes premières étapes :

1. On pose $a_0=3$ et $b_0=4$, on a bien $f(a_0)\leqslant 0$ et $f(b_0)\geqslant 0$. On calcule $\frac{a_0+b_0}{2}=3,5$ puis $f(\frac{a_0+b_0}{2})$.
   $f(3,5)=3,5^2-10=2,25\geqslant 0$. Donc $\sqrt{10}$ est dans l'intervalle $[3;3,5]$ et on pose $a_1=a_0=3$ et $b_1=\frac{a_0+b_0}{2}=3,5$.
2. On sait donc que $f(a_1)\leqslant 0$ et $f(b_1)\geqslant 0$. On calcule $f(\frac{a_1+b_1}{2})=f(3,25)=0,5625\geqslant 0$, on pose $a_2=3$ et $b_2=3,25$.
3. On calcule $f(\frac{a_2+b_2}{2})=f(3,125)=-0,23\ldots\leqslant 0$. Comme $f(b_2)\geqslant 0$ alors cette fois f s'annule sur le second intervalle $[\frac{a_2+b_2}{2},b_2]$ et on pose $a_3=\frac{a_2+b_2}{2}=3,125$ et $b_3=b_2=3,25$.

À ce stade, on a prouvé : $3,125\leqslant\sqrt{10}\leqslant 3,25$.
Voici la suite des étapes :

$a_0=3$	$b_0=4$
$a_1=3$	$b_1=3,5$
$a_2=3$	$b_2=3,25$
$a_3=3,125$	$b_3=3,25$
$a_4=3,125$	$b_4=3,1875$
$a_5=3,15625$	$b_5=3,1875$
$a_6=3,15625$	$b_6=3,171875$
$a_7=3,15625$	$b_7=3,164062\ldots$
$a_8=3,16015\ldots$	$b_8=3,164062\ldots$

Donc en 8 étapes on obtient l'encadrement :

$$3,160\leqslant\sqrt{10}\leqslant 3,165.$$

En particulier, on vient d'obtenir les deux premières décimales : $\sqrt{10}=3,16\ldots$

1.1.5 Résultats numériques pour $(1,10)^{1/12}$

Nous cherchons maintenant une approximation de $(1,10)^{1/12}$. Soit $f(x) = x^{12} - 1,10$. On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 1,1$. Alors $f(a_0) = -0,10 \leqslant 0$ et $f(b_0) = 2,098\ldots \geqslant 0$.

$$\begin{array}{ll}
a_0 = 1 & b_0 = 1,10 \\
a_1 = 1 & b_1 = 1,05 \\
a_2 = 1 & b_2 = 1,025 \\
a_3 = 1 & b_3 = 1,0125 \\
a_4 = 1,00625 & b_4 = 1,0125 \\
a_5 = 1,00625 & b_5 = 1,00937\ldots \\
a_6 = 1,00781\ldots & b_6 = 1,00937\ldots \\
a_7 = 1,00781\ldots & b_7 = 1,00859\ldots \\
a_8 = 1,00781\ldots & b_8 = 1,00820\ldots
\end{array}$$

Donc en 8 étapes on obtient l'encadrement :

$$1,00781 \leqslant (1,10)^{1/12} \leqslant 1,00821$$

La méthode de dichotomie a l'énorme avantage de fournir un encadrement d'une solution ℓ de l'équation $f(x) = 0$. Il est donc facile d'avoir une majoration de l'erreur. En effet, à chaque étape, la taille de l'intervalle contenant ℓ est divisée par 2. Au départ, on sait que $\ell \in [a,b]$ (de longueur $b-a$) ; puis $\ell \in [a_1, b_1]$ (de longueur $\frac{b-a}{2}$) ; puis $\ell \in [a_2, b_2]$ (de longueur $\frac{b-a}{4}$) ; ... ; $[a_n, b_n]$ étant de longueur $\frac{b-a}{2^n}$.
Si, par exemple, on souhaite obtenir une approximation de ℓ à 10^{-N} près, comme on sait que $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$, on obtient $|\ell - a_n| \leqslant |b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n}$. Donc pour avoir $|\ell - a_n| \leqslant 10^{-N}$, il suffit de choisir n tel que $\frac{b-a}{2^n} \leqslant 10^{-N}$.
Nous allons utiliser le logarithme décimal :

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{2^n} \leqslant 10^{-N} &\iff (b-a)10^N \leqslant 2^n \\
&\iff \log(b-a) + \log(10^N) \leqslant \log(2^n) \\
&\iff \log(b-a) + N \leqslant n \log 2 \\
&\iff n \geqslant \frac{N + \log(b-a)}{\log 2}
\end{aligned}$$

Sachant $\log 2 = 0,301\ldots$, si par exemple $b - a \leqslant 1$, voici le nombre d'itérations suffisantes pour avoir une précision de 10^{-N} (ce qui correspond, à peu près, à N chiffres exacts après la virgule).

10^{-10} (~ 10 décimales)	34 itérations
10^{-100} (~ 100 décimales)	333 itérations
10^{-1000} (~ 1000 décimales)	3322 itérations

Il faut entre 3 et 4 itérations supplémentaires pour obtenir une nouvelle décimale.

Remarque. En toute rigueur il ne faut pas confondre précision et nombre de décimales exactes, par exemple 0,999 est une approximation de 1,000 à 10^{-3} près, mais aucune décimale après la virgule n'est exacte. En pratique, c'est la précision qui est la plus importante, mais il est plus frappant de parler du nombre de décimales exactes.

Exemple
On utilise la méthode de dichotomie pour approcher la racine du polynôme $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ contenue dans l'intervalle $[1,2]$ (cette fonction est en effet continue et on a $f(1) = -1$ et $f(2) = 9$), avec une précision égale à 10^{-4}. Le tableau suivant donne les valeurs respectives des bornes a_k et b_k de l'intervalle d'encadrement, de l'approximation x_k de la racine et de $f(x_k)$ en fonction du numéro k de l'itération.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	1	2	1,5	2,375
1	1	1,5	1,25	0,328125
2	1	1,25	1,125	-0,419922
3	1,125	1,25	1,1875	-0,067627
4	1,1875	1,25	1,21875	0,124725
5	1,1875	1,21875	1,203125	0,02718
6	1,1875	1,203125	1,195312	-0,020564
7	1,195312	1,203125	1,199219	0,003222
8	1,195312	1,199219	1,197266	-0,008692
9	1,197266	1,199219	1,198242	-0;00274
10	1,198242	1,199219	1,19873	0,000239
11	1,198242	1,19873	1,198486	-0,001251
12	1,198486	1,19873	1,198608	-0,000506
13	1,198608	1,19873	1,198669	-0,000133

1.1.6 Exercices

1.1.7 Exercices avec solutions

Exercice 9.2.1
On se propose de chercher, par la méthode de la dichotomie, la racine réelle de la fonction donnée par $f(x) = 4x^3 + 12x + 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $l \in]-1,0[$.
2. (a) Rappeler la formule qui donne l'estimation de l'erreur de la racine d'une équation par la méthode de dichotomie.
   (b) Quel est le nombre d'itérations nécessaires pour approcher la racine l à 10^{-2} près par la méthode de la dichotomie.
3. (a) Rappeler la méthode de dichotomie pour approcher la solution de l'équation $f(x) = 0$

(b) Utiliser la méthode de la dichotomie pour calculer la racine de la fonction $f(x) = 4x^3 + 12x + 1$ dans l'intervalle $[-1, 0]$ avec une précision de 10^{-2}.

Exercice 9.2.2

On considère l'équation

$$xe^x - 1 = 0$$

1. Montrer que la fonction $f(x) = xe^x - 1$ admet une seule racine dans l'intervalle $[0, 1]$
2. En utilisant la méthode de la dichotomie, déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $xe^x - 1 = 0$ après 5 itérations.

Exercice 9.2.3

On se propose de trouver un encadrement du nombre $\sqrt{3}$.

1. Montrer que la fonction $f(x) = x^2 - 3$ admet une racine dans l'intervalle $[1, 2]$.
2. En utilisant la méthode de la dichotomie, calculer un encadrement à $0,1$ près de $\sqrt{3}$.

Exercice 9.2.4

1. Écrire l'algorithme de la méthode de dichotomie pour calculer la solution de $f(x) = 0$.
2. En utilisant la boucle pour ... faire ....
3. Ecrire le programme en lange C de ces deux algorithme.

Exercice 9.2.5

1. Décrire la méthode de la dichotomie.
2. Montrer que la fonction
$$f(x) = x^3 - 4x - 8.95$$
admet une seule racine dans l'intervalle $[2, 3]$.
3. Utiliser la méthode de dichotomie pour calculer le zéro de la fonction
$$f(x) = x^3 - 4x - 8.95$$
dans l'intervalle $[2, 3]$ avec une précision de 10^{-2}.

Exercice 9.2.6

Donner les 3 premiers élément de la suite, définie par la méthode de dichotomie dans l'intervalle $[1, 3]$, pour approcher le zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$. Combien d'itérations de dichotomie doit-on effectuer, pour améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de cette racine ?

Exercice 9.2.6

On considère l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$

1. Montrer que cette équation admet une seule racine dans $[0, 1]$.
2. Donner le programme en lange C de la méthode de dichotomie.

3. En utilisant le programme de la question précédente, remplir le tableau suivant :

n	a_n	b_n	$M = (a_n + b_n)/2$	$f(a_n)$	$f(M)$	$f(a_n)f(M)$	$b_n - a_n$	test !

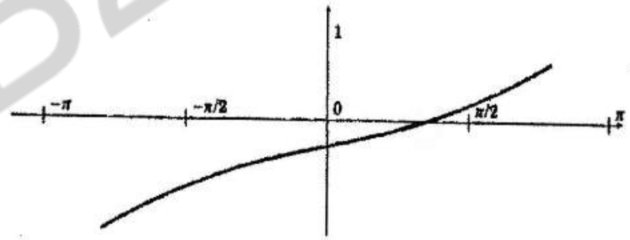
Poun $n = 1, 2, \ldots, 10$.

1.1.8 Exercices sans solutions

Exercice 9.2.8

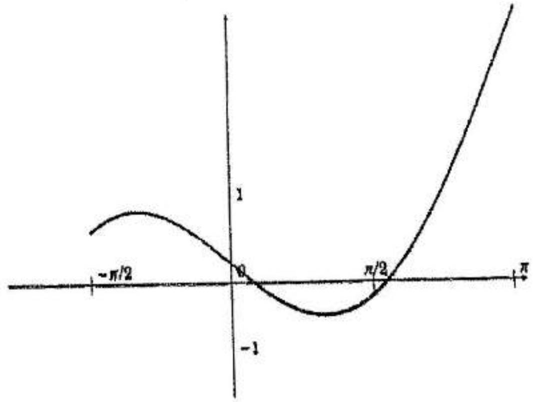
Répondez par oui ou non et justifiez votre réponse.

1. Peut-on appliquer la méthode de la bissection pour le calcul numérique des zéros de la fonction f définie par
$$f(x) = 1/2x - 0.239\sin(x) + 1/6\pi - 1/2\sqrt{3}$$
dans l'intervalle $I = [-\pi/2, \pi]$ et dont le graphe est le suivant ?



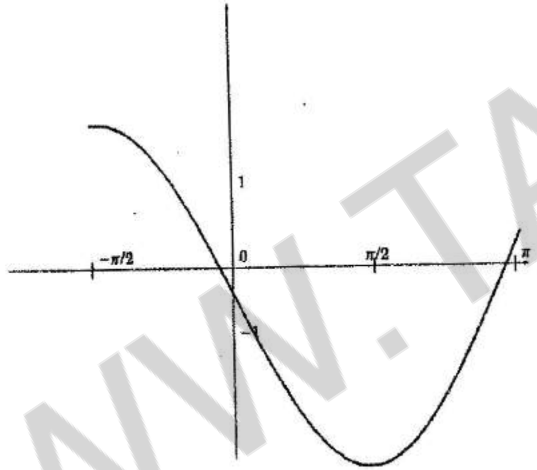
Courbe de la fonction $f(x) = 1/2x - 0.239\sin(x) + 1/6\pi - 1/2\sqrt{3}$

2. Peut-on appliquer la méthode de dichotomie, appelée aussi méthode de la bissection, pour le calcul numérique des zéros de la fonction f définie par
$$f(x) = x - 2\sin(x) + 0.25$$
dans l'intervalle $I = [-\pi/2, \pi]$ et dont le graphe est le suivant ?



Courbe de la fonction $f(x) = x - 2\sin(x) + 0.25$

3. Peut-on appliquer la méthode de la bissection pour le calcul numérique des zéros de la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{1}{5}x - 2.5688\sin(x) + \frac{1}{2}\pi - 2\sqrt{3}$$
dans l'intervalle $I = [-\pi/2, \pi]$ et dont le graphe est le suivant ?



Courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{5}x - 2.5688\sin(x) + \frac{1}{2}\pi - 2\sqrt{3}$

Exercice 9.2.9

En utilisant la méthode de la dichotomie, calculer une approximation des solutions de l'équation $x^3 + 1 = 3x$.

Exercice 9.2.10

Dans la méthode de la dichotomie, est-il plus efficace de diviser l'intervalle en 4 au lieu d'en 2 ?

Exercice 9.2.11

On considère l'équation : $F(x) = x^4 - 3x + 1 = 0$

1. Montrer que l'équation $F(x) = 0$ admet une racine unique dans $[0.3, 0.4]$.
2. Calculer une valeur approchée de cette racine par la méthode de la dichotomie avec une précision $\alpha = 0.5 \times 10^{-2}$.
3. Arrondir le résultat au nombre de chiffres significatifs exacts.

Exercice 9.2.12

Soit la fonction $F(x) = 2x^3 - x - 2$, on se propose de trouver les racines réelles de F par la méthode de dichotomie.

1. Montrer que la fonction F possède une seule racine réelle $\alpha \in [1,2]$.
2. Quel est le nombre d'itérations nécessaires pour approcher α à 10^{-2} près par la méthode de la dichotomie.
3. Utiliser la méthode de la dichotomie pour calculer le zéro de la fonction F avec une précision de 10^{-2}.

1.1.9 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 9.2.1

1. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $f'(x) = 12(x^2 + 1)$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

La fonction f est continue et change de signe une seule fois donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. Or $f(-1) = -15 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, alors cette unique solution l appartient à l'intervalle $]-1, 0[$.

2. (a) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, vérifiant $f(a)f(b)<0$, et soit $l\in]a,b[$ l'unique solution de l'équation $f(x)=0$. Alors, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de dichotomie converge vers l et on a l'estimation

$$|x_k-l|\leqslant\frac{b-a}{2^{k+1}}\tag{1.2}$$

(b) Le nombre d'itérations n nécessaires pour approcher $l\in]-1,0[$ à 10^{-2} près par la méthode de la dichotomie, est donné par la relation :

$$n\geqslant\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)=\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}=\frac{\ln\left(\frac{0-(-1)}{10^{-2}}\right)}{\ln 2}=\frac{2\ln 10}{\ln 2}\simeq 6.64.$$

Il suffit de prendre $n=7$.

3. (a) Considérons une fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$. On suppose que f admet une et une seule racine l dans $]a,b[$ et que $f(a)f(b)<0$. On note

$$c=\frac{a+b}{2}$$

le milieu de l'intervalle. Si $f(c)=0$, c'est la racine de l'équation $f(x)=0$ et le problème est résolu.

Si $f(c)\neq 0$, nous regardons le signe de $f(a)f(c)$.

Si $f(a)f(c)<0$, alors $l\in]a,c[$.

Si $f(c)f(b)<0$, alors $l\in]c,b[$.

On recommence le processus en prenant l'intervalle [a,c] au lieu de [a,b] dans le premier cas, et l'intervalle [c,b] au lieu de [a,b] dans le second cas. De cette manière, on construit par récurrence trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) telles que $a_0=a$, $b0=b$ et telles que pour tout $0\leqslant n$,

i. $c_n=\frac{a_n+b_n}{2}$.

ii. Si $f(c_n)f(b_n)<0$ alors $a_{n+1}=c_n$ et $b_{n+1}=b_n$.

iii. Si $f(c_n)f(a_n)<0$ alors $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=c_n$

(b) En partant de $I_0=[a,b]=[-1,0]$, la méthode de la dichotomie produit une suite de sous-intervalles $I_k=[a_k,b_k]$, $k\geqslant 0$, avec $I_k\subset I_{k-1}$, $k\geqslant 1$, et tels que $f(a_k)f(b_k)<0$. Dans notre cas on a :

k	a_k	$x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$	b_k	sign($f(a_k)$)	sign($f(x_k)$)	sign($f(b_k)$)
0	-1.00	-0.50	0.00	-	-	+
1	-0.50	-0.25	0.00	-	-	+
2	-0.25	-0.13	0.00	-	-	+
3	-0.13	-0.06	0.00	-	+	+
4	-0.13	-0.09	-0.06	-	-	+
5	-0.09	-0.08	-0.06	-	+	+
6	-0.09	-0.09	-0.08	-	-	+
7	-0.09	-0.08	-0.08	-	+	+

Solution de l'exercice 9.2.2

1. La fonction est continue et dérivable sur l'intervalle $[0,1]$, sa fonction dérivée $f'(x)=(1+x)e^x$ est strictement positive sur le même intervalle,donc elle strictement croissante sur cette intervalle, $f(0)=-1$, $f(1)=e-1>0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équatioin $f(x)=0$ admet une seule solution dans l'intervalle $[0,1]$.
2. En partant de $I_0=[a,b]=[0,1]$, la méthode de la dichotomie produit une suite de sous-intervalles $I_k=[a_k,b_k]$, $k\geqslant 0$, avec $I_k\subset I_{k-1}$, $k\geqslant 1$, et tels que $f(a_k)f(b_k)<0$. Dans notre cas on a :

k	a_k	$x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$	b_k	sign($f(a_k)$)	sign($f(x_k)$)	sign($f(b_k)$)
0	0.00	0.50	1.00	-	-	+
1	0.50	0.75	1.00	-	+	+
2	0.50	0.63	0.75	-	+	+
3	0.50	0.56	0.63	-	-	+
4	0.56	0.59	0.63	-	+	+
5	0.56	0.58	0.59	-	+	+

Solution de l'exercice 9.2.3

1. On considère la fonction $f(x)=x-\sqrt{3}$. Il est évident que f est contiue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$), $f(1)=1-\sqrt{3}<0$ et $f(2)=2-\sqrt{3}>0$, donc il existe $l\in]1,2[$ tel que $f(l)=0$.
2. Par ailleurs, le nombre d'itérations n nécessaires pour approcher $l\in]1,2[$ à 10^{-1} près par la méthode de la dichotomie, est donné par la relation :

$$n\geqslant\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)=\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}=\frac{\ln\left(\frac{2-1}{10^{-1}}\right)}{\ln 2}=\frac{\ln 10}{\ln 2}\simeq 3.32.$$

Il suffit de prendre $n=4$.

En partant de $I_0=[a,b]=[1,2]$, la méthode de la dichotomie produit une suite de sous-intervalles $I_k=[a_k,b_k]$, $k\geqslant 0$, avec $I_k\subset I_{k-1}$, $k\geqslant 1$, et tels que $f(a_k)f(b_k)<0$. Dans notre cas on a

k	a_k	$x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$	b_k	sign($f(a_k)$)	sign($f(x_k)$)	sign($f(b_k)$)
0	1.0	1.5	2.0	-	-	+
1	1.5	1.8	2.0	-	+	+
2	1.5	1.6	1.8	-	-	+
3	1.6	1.7	1.8	-	-	+
4	1.7	1.7	1.8	-	-	+

Finalement, un encadrement à 0,1 près de $\sqrt{3}$ est donné par : $1.7<\sqrt{3}<1.8$.

Solution de l'exercice 9.2.4

1. La méthode de dichotomie avec la boucle tant que

Require : $a, b, \varepsilon, f : [a, b] \to IR$

$k \leftarrow 0$

$a_k \leftarrow a$

$b_k \leftarrow b$

$x_k \leftarrow \frac{a_k + b_k}{2}$

tant que $|b_k - a_k| > \varepsilon$ faire

si $f(a_k)f(x_k) < 0$ alors

$a_k + 1 \leftarrow a_k$

$b_k + 1 \leftarrow x_k$

sinon

$a_k + 1 \leftarrow x_k$

$b_k + 1 \leftarrow b_k$

fin si

$x_{k+1} \leftarrow \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$

$k \leftarrow k + 1$

fin tant que

2. Pour que l'élément x_n de la suite de dichotomie, à la n – ième itération, soit une valeur approchée de l à $\varepsilon > 0$ près, il suffit que n vérifie

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leqslant \varepsilon$$

ce qui permet de calculer à l'avance le nombre maximal $n_0 \in \mathbb{N}$ d'itérations assurant la précision ε.

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b-a}{\varepsilon} \leqslant 2^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} - 1$$

début

lire(a) ;lire(b) ;lire(ε) ;$tr \leftarrow 0$;

$n0 \leftarrow tronc(\frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2})$

Pour $i \leftarrow 1$ à $n0$ faire

$c \leftarrow (a+b)/2$;

Si $f(c) = 0$ alors

$i \leftarrow n0$;

$tr \leftarrow 1$;

sinon si $(f(a)f(c) < 0)$ alors

$b \leftarrow C$;

Sinon

$a \leftarrow c$;

fin si ;

fi si

fin pour

écrire(c, "est la solution") ;

Fin.

3.

Solution de l'exercice 9.2.5

1. En partant de $I_0 = [a, b]$, la méthode de la dichotomie produit une suite de sous-intervalles $I_k = [a_k, b_k]$, $k \geqslant 0$, avec $I_k \subset I_{k+1}$, $k \geqslant 1$, tels que $f(a_k)f(b_k) < 0$ et $\lim_{n \to \infty} |b_n - a_n| = 0$.
Contrètement, on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$, on calcule $x_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ le milieu de l'intervalle de départ et on évalue la fonction f en ce point.
Si $f(x_0) = 0$, le point x_0 est la solution de l'équation $f(x) = 0$ et le problème est résolu.
Sinon, si $f(a_0)f(x_0) < 0$, alors la solution l est contenu dans l'intervalle $]a_0; x_0[$, alors qu'elle appartient à $]x_0; b_0[$ si $f(x_0)f(b_0) < 0$.
On réitère ensuite ce processus sur l'intervalle $[a_1; b_1]$, avec $a_1 = a_0$ et $b_1 = x_0$ dans le premier cas, ou $a_1 = x_0$ et $b_1 = b_0$ dans le second, et ainsi de suite...
De cette façon, on construit de manière récurrente trois suites numériques $(a_k)_{k \in N}$, $(b_k)_{k \in N}$ et $(x_k)_{k \in N}$ telles que $a_0 = a, b_0 = b$ et vérifiant, pour entier naturel k,
   - $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$,
   - $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$ si $f(a_k)f(x_k) < 0$,
   - $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$ si $f(x_k)f(b_k) < 0$.
2. La fonction
   - est continue sur l'intervalle $[2, 3]$.
   - est strictement montonne sur l'intervalle $[2, 3]$, car $f'(x) = 3x^2 - 4 = (\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{3}x - 2) > 0$ sur cet l'intervalle.
   - $f(2).f(3) < 0$ ($f(2) = -8.95$ et $f(3) = 9.0)5$

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f admet une seule racine dans l'intervalle $[2, 3]$.
3. L'approximation de la racine est donnée par

$k \leftarrow 0$

$a_k \leftarrow 2$

$b \leftarrow 3$

tant que $|b_k - a_k| > 0.01$ **faire**

$|x_k \leftarrow g(a_k, b_k)|$

$k \leftarrow k + 1$

si $(a_k^3 - 4a_k - 8.953)(x_k^3 - 4x_k - 8.95) < 0$ **alors**

$a_{k+1} \leftarrow a_k$

$b_{k+1} \leftarrow x_k$

sinon

$a_{k+1} \leftarrow x_k$

$b_{k+1} \leftarrow b_k$

fin si

fin tant que

Dichotomie

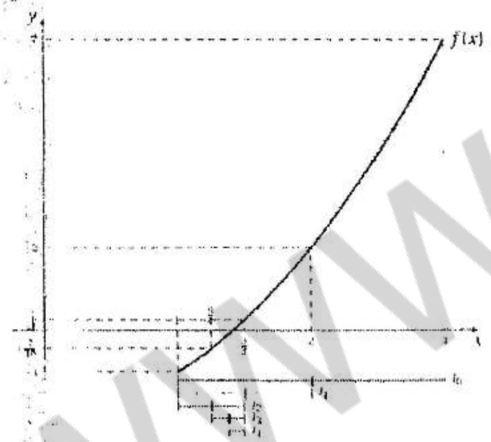
k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$
0	2.000000	2.5000000	3.00000	−	−	+
1	2.500000	2.7500000	3.00000	−	+	+
2	2.500000	2.6250000	2.75000	−	−	+
3	2.625000	2.6875000	2.75000	−	−	+
4	2.687500	2.7187500	2.75000	−	+	+
5	2.687500	2.7031250	2.71875	−	−	+
6	2.703125	2.7109375	2.71875	−	+	+

Solution de l'exercice 9.2.6

On cherche les zéros de la fonction $f(x) = x^2 - 2$

En partant de $I_0 = [a,b]$, la méthode de la dichotomie produit une suite de sous-intervalles $I_k = [a_k, b_k]$ avec $I_{k+1} \subset I_k$ et tels que $f(a_k)f(b_k) < 0$. Plus précisément

- on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$,
- pour $k > 0$
  - si $f(a_k)f(x_k) < 0$ on pose $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$ sinon on pose $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$
  - et on pose $x_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$.



	x_1	x_2	x_3	x_4
Dichotomie	2	$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{5}{4} = 1,25$	$\frac{11}{8} = 1,375$

On rappelle qu'avec la méthode de la dichotomie, les itérations s'achèvent à la $m^{\text{ème}}$ étape quand $|x_m - \alpha| \leq |I_m| < \varepsilon$, où ε est une tolérance fixée et $|I_m|$ désigne la longueur de l'intervalle I_m. Clairement $I_k = \frac{b-a}{2^k}$, donc pour avoir $|x_m - \alpha| < \varepsilon$ on doit prendre

$$m \geq log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

Améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de la racine signifie avoir

$$|x_k - \alpha| = \frac{|x_j - \alpha|}{10}$$

donc on doit effectuer $k - j = log_2(10) \simeq 3,3$ itérations de dichotomie.

Solution de l'exercice 9.2.7

1. f est une fonction polynômiale donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0,1]$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 + 2 \geq 2 > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $[0,1]$ et $f(0).f(1) = -0,125 < 0$, le théorème des valeurs intermédiaire assure alors que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution l dans $[0,1]$.

2. Le programme

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
\\Pour chercher une valeur approchée de la solution l'équation x^3 + 2x - 1 = 0
float f(float x)
{ return x*x*x+2*x-1 ;
}

\\l'algorithme itératif de la méthode de dichotomie pour une fonction f
\\continue sur un intervalle [a,b], strictement monotone et f(a).f(b)<0
float Dichotomie(float a, float b, float precision)
{
float c ;
        printf(" .....L'Evolution de la suite des intervalles emboitEs....\n");
        printf("..... dont la longueur tend vers ZERO (la valeur de precision)...\n\n");
        do
        {
            printf("[%f - %f] \n", a,b);
            c=(a+b)/2 ;
            if (f(c)*f(a)>0 )
                a=c ;
```

```
              else
                    b=c;
         }
         while(fabs(a-b)>precision);
         return c;
}
int main()
{
float a,b,precision,ValApproch;
printf("....Choix de l'intervalle [a,b] telque f(a).f(b)<0... \n\n ");
printf("........ f(x)=x*x*x + 2*x -1 .....\n\n ");
printf("Donner la valeur de a : ");
scanf("%f",&a);
printf("Donner la valeur de b : ");
scanf("%f",&b);
printf("Donner la valeur de la precision pour une solution approchee : ");
scanf("%f",& precision);
printf("\n \n ...l'algorithme itEratif de la méthode de dichotomie pour la
fonction f ...\n\n\n");
ValApproch=Dichotomie(a,b,precision);
printf("\n la valeur approchee de la solution est donc = %f ",ValApproch);
getch();
}
```

9. Les différentes approximations de la solution de l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$

n	a_n	b_n	$M = (a_n + b_n)/2$	$f(a_n)$	$f(M)$	$f(a_n)f(M)$	$b_n - a_n$	test
0	0	1	0,5	-1	0,125	-0,125	1	continuer
1	0	0,5	0,25	-1	-0,484375	0,484375	0,5	continuer
2	0,25	0,5	0,375	-0,484375	-0,197265625	0,09555054	0,25	continuer
3	0,375	0,5	0,4375	0,197265625	-0,041259766	0,00813913	0,125	continuer
4	0,4375	0,5	0,46875	-0,041259766	0,040496826	-0,00167088	0,0625	continuer
5	0,4375	0,46875	0,453125	-0,041259766	-0,00071335	2,9433E-05	0,03125	continuer
6	0,453125	0,46875	0,4609375	-0,00071335	0,01980734	-1,4130E-05	0,015625	continuer
7	0,453125	0,4609375	0,45703125	-0,00071335	0,00953007	-6,7983E-06	0,0078125	continuer
8	0,453125	0,45703125	0,455078125	-0,00071335	0,00440736	-3,1440E-06	0,00390625	continuer
9	0,453125	0,455078125	0,454101563	-0,00071335	0,00184628	-1,3170E-06	0,001953125	continuer
10	0,453125	0,454101563	0,453613281	-0,00071335	0,00056625	-4,0394E-07	0,000976563	Stop

$l \in [0,4531250, 0,4541016]$, amplitude $= 0,0009766 < 0,001$.

1.2 Méthode du point fixe

Mis à part les équations polynomiales du premier ou second degré et difficilement celles du troisième et quatrième degré, on est incapable de donner les solutions des équations algébriques. Nous allons utiliser la remarque suivante afin de développer une méthode pour approcher les racines de l'équation $g(x) = 0$.

Remarque

Si l est une solution de l'équation $g(x) = 0$ c'est-à-dire $g(l) = 0$, on a $f(l) = g(l) + l = l$. Donc la solution, l, de l'équation $g(x) = 0$ est un point fixe de la fonction $f(x) = g(x) + x$.

Dans ce paragraphe, nous allons appilquer les résultats du point fixe et les suites récurrentes,

pour approcher la solution l.

1.2.1 Suite récurrente définie par une fonction

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle. Une suite récurrente est définie par son premier terme et une relation permettant de calculer les termes de proche en proche :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Une suite récurrente est donc définie par deux données : un terme initial u_0, et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Les termes de la suite s'écrivent ainsi :

$$u_0, \quad u_1 = f(u_0), \quad u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)), \quad u_3 = f(u_2) = f(f(f(u_0))), \ldots$$

Le comportement de ces termes peut très vite devenir complexe.

Exemple

Soit $f(x) = 1 + \sqrt{x}$. On pose $u_0 = 3$ et définissons pour $n \geq 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$. C'est-à-dire $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$. Alors les premiers termes de cette suite sont :

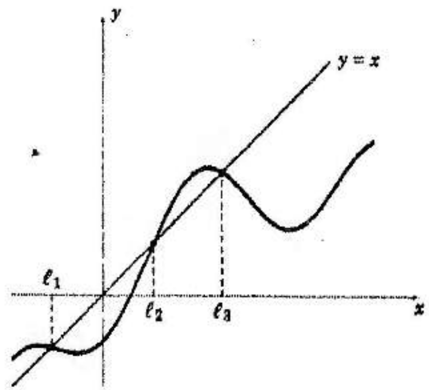
$$3, \quad 1+\sqrt{3}, \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{3}}, \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{3}}}, \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{3}}}}, \ldots$$

Définition 1. Un réel $l \in [a;b]$ est dit point fixe d'une fonction $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ si $g(l) = l$.

Proposition 2.

Si f est une fonction continue et la suite récurrente $(u_{n+1} = f(u_n))$ converge vers ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation :

$$f(\ell) = \ell.$$



La valeur ℓ, est un point fixe de f.

Démonstration. Lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ et donc aussi $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \ell$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ et que f est continue alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} u_n) = f(\ell)$. La relation $u_{n+1} = f(u_n)$ devient à la limite (lorsque $n \to +\infty$) : $\ell = f(\ell)$. □

Nous allons étudier en détail deux cas particuliers fondamentaux : lorsque la fonction est croissante, puis lorsque la fonction est décroissante.

Cas d'une fonction croissante

Commençons par remarquer que pour une fonction croissante, le comportement de la suite (u_n) définie par récurrence est assez simple :

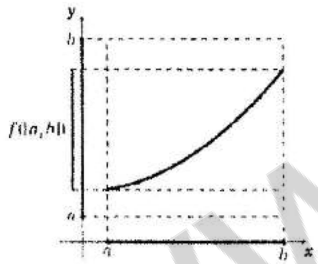
- Si $u_1 \geqslant u_0$ alors (u_n) est croissante.
- Si $u_1 \leqslant u_0$ alors (u_n) est décroissante.

La preuve est basée sur la récurrence : par exemple si $u_1 \geqslant u_0$, alors comme f est croissante on a $u_2 = f(u_1) \geqslant f(u_0) = u_1$. Supposons que $u_n \geqslant u_{n-1}$ on a $f(u_n) \geqslant f(u_{n-1})$ en déduit $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Voici le résultat principal :

Proposition 3.
Si $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et croissante, alors quelque soit $u_0 \in [a,b]$, la suite récurrente (u_n) est monotone et converge vers $\ell \in [a,b]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

Remarque
Il y a une hypothèse très importante qui est : f une foncton qui va de l'intervalle $[a,b]$ dans lui-même. Dans la pratique, pour appliquer cette proposition, il faut commencer par choisir $[a,b]$ et vérifier que $f([a,b]) \subset [a,b]$.



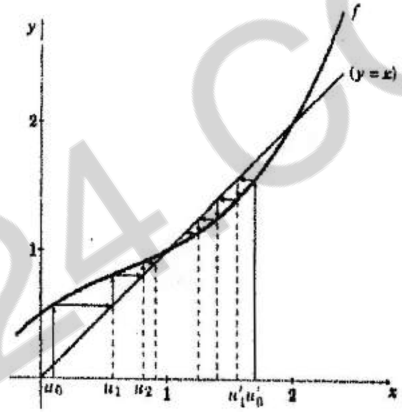
Démonstration. La preuve est une conséquence des résultats précédents. Par exemple si $u_1 \geqslant u_0$ alors la suite (u_n) est croissante, elle est majorée par b, donc elle converge vers un réel ℓ. Par la proposition 2, alors $f(\ell) = \ell$. Si $u_1 \leqslant u_0$, alors (u_n) est une décroissante et minorée par a, et la conclusion est la même. □

Exemple 1.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{4}(x^2-1)(x-2)+x$ et $u_0 \in [0,2]$. Étudions la suite (u_n) définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ (pour tout $n \geqslant 0$).

1. Étude de f

   (a) f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) > 0$.
   (c) Sur l'intervalle $[0,2]$, f est strictement croissante.
   (d) Et comme $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(2) = 2$ alors $f([0,2]) \subset [0,2]$.

2. Graphe de f



Voici comment tracer la suite : on trace le graphe de f et la bissectrice $(y = x)$. On part d'une valeur u_0 sur l'axe des abscisses, la valeur $u_1 = f(u_0)$ se lit sur l'axe des ordonnées, mais on reporte la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses par symétrie par rapport à la bissectrice. On recommence : $u_2 = f(u_1)$ se lit sur l'axe des ordonnées et on le reporte sur l'axe des abscisses, etc. On obtient ainsi une sorte d'escalier, et graphiquement on constate que la suite est croissante et tend vers l. Si on part d'une autre valeur initiale u_0', c'est le même principe, mais cette fois on obtient un escalier qui descend.

3. Calcul des points fixes.

   Cherchons les valeurs x qui vérifient $(f(x) = x)$, autrement dit $(f(x) - x = 0)$, comme

$$f(x) - x = \frac{1}{4}(x^2-1)(x-2) = \frac{1}{4}(x-1)(x+1)(x-2) \tag{1.3}$$

   donc les points fixes sont $\{-1,1,2\}$. La limite de (u_n) est donc à chercher parmi ces 3 valeurs.

   (a) Premier cas : $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$.
   Alors $u_1 = f(u_0) = u_0$ et par récurrence la suite (u_n) est constante (et converge donc vers u_0).

   (b) Deuxième cas : $0 \leqslant u_0 < 1$.
   - Comme $f([0,1]) \subset [0,1]$, la fonction f se restreint sur l'intervalle $[0,1]$ en une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$.
   - De plus sur $[0,1]$, $f(x) - x \geqslant 0$. Cela se déduit de l'étude de f ou directement de l'expression (1.3).

- Pour $u_0 \in]0,1[$, $u_1 = f(u_0) \geqslant u_0$ d'après le point précédent. Comme f est croissante, par récurrence, comme on l'a vu, la suite (u_n) est croissante.
- La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge. Notons ℓ sa limite.
- D'une part ℓ doit être un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$. Donc $\ell \in \{-1, 1, 2\}$.
- D'autre part la suite (u_n) étant croissante avec $u_0 \geqslant 0$ et majorée par 1, donc $\ell \in [0,1]$.
- Conclusion : si $0 \leqslant u_0 < 1$ alors (u_n) converge vers $\ell = 1$.

(c) Troisième cas : $1 < u_0 < 2$.

La fonction f se restreint en $f : [1,2] \to [1,2]$. Sur l'intervalle $[1,2]$, f est croissante mais cette fois $f(x) \leqslant x$. Donc $u_1 \leqslant u_0$, et la suite (u_n) est décroissante. La suite (u_n) étant minorée par 1, elle converge. Si on note ℓ sa limite alors d'une part $f(\ell) = \ell$, donc $\ell \in \{-1, 1, 2\}$, et d'autre part $\ell \in [1, 2[$. Conclusion : (u_n) converge vers $\ell = 1$.

Le graphe de f joue un rôle très important, il faut le tracer même si on ne le demande pas explicitement. Il permet de se faire une idée très précise du comportement de la suite : Est-elle croissante ? Est-elle positive ? Semble-t-elle converger ? Vers quelle limite ? Ces indications sont essentielles pour savoir ce qu'il faut montrer lors de l'étude de la suite.

Cas d'une fonction décroissante

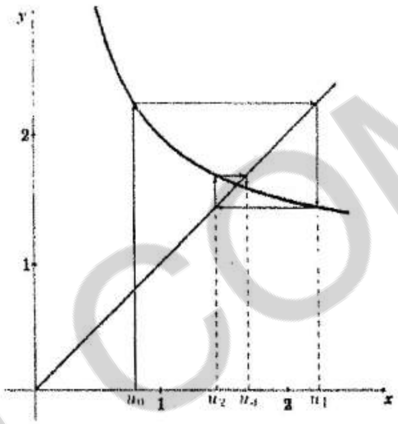
Proposition 4.
Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et décroissante. Soit $u_0 \in [a,b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :
- La sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite ℓ vérifiant $f \circ f(\ell) = \ell$.
- La sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite ℓ' vérifiant $f \circ f(\ell') = \ell'$.

Démonstration. La preuve se déduit du cas de la fonction croissante. La fonction f étant décroissante, la fonction $f \circ f$ est croissante. Et on applique la proposition 3 à la fonction $f \circ f$ et à la sous-suite (u_{2n}) définie par récurrence $u_2 = f \circ f(u_0)$, $u_4 = f \circ f(u_2)$, ...
De même en partant de u_1 et $u_3 = f \circ f(u_1)$, ... □

Exemple

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \qquad u_0 > 0, \qquad u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{u_n}$$

1. Étude de f. La fonction $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ est une fonction continue et strictement décroissante.
2. Graphe de f.



Le principe pour tracer la suite est le même qu'auparavant : on place u_0, on trace $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées et on le reporte par symétrie sur l'axe des abscisses,... On obtient ainsi une sorte d'escargot, et graphiquement on constate que la suite converge vers le point fixe de f. En plus on note que la suite des termes de rang pair semble une suite croissante, alors que la suite des termes de rang impair semble décroissante.

3. Points fixes de $f \circ f$.

$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = f\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

Donc

$$f \circ f(x) = x \iff \frac{2x+1}{x+1} = x \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x \in \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Comme la limite doit être positive, le seul point fixe à considérer est $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(a) Premier cas $0 < u_0 \leqslant \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Alors, $u_1 = f(u_0) \geqslant f(\ell) = \ell$; et par une étude de $f \circ f(x) - x$, on obtient que : $u_2 = f \circ f(u_0) \geqslant u_0$; $u_1 \geqslant f \circ f(u_1) = u_3$.

Comme $u_2 \geqslant u_0$ et $f \circ f$ est croissante, la suite (u_{2n}) est croissante. De même $u_3 \leqslant u_1$, donc la suite (u_{2n+1}) est décroissante. De plus comme $u_0 \leqslant u_1$, en appliquant f un nombre *pair* de fois, on obtient que $u_{2n} \leqslant u_{2n+1}$. La situation est donc la suivante :

$$u_0 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_{2n} \leqslant \cdots \leqslant u_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant u_3 \leqslant u_1$$

La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par u_1, donc elle converge. Sa limite ne peut être que l'unique point fixe de $f \circ f$: $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge aussi vers $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On en conclut que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b) Deuxième cas $u_0 \geq \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
On montre de la même façon que (u_{2n}) est décroissante et converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et que (u_{2n+1}) est croissante et converge aussi vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1.2.2 Théorème du point fixe

Définition 2. Soit $k \in]0;1[$. Une fonction $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ est dite fonction contractante de rapport k si

$$\forall x, y \in [a;b], \ |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|.$$

Remarque.

1. Soit $g \in C^1([a;b])$. Si
$$|g'(x)| < 1; \ \forall x \in [a;b]$$
alors g est contractante sur $[a;b]$.
2. Une fonction contractante est continue.

Théorème 1.
Soit $g : [a;b] \to [a;b]$ une fonction contractante de rapport k. Alors g admet un unique point fixe $l \in [a;b]$.
De plus, pour tout choix de $x_0 \in [a;b]$; la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$; $\forall n \geq 0$ converge vers l quand $n \to +\infty$.

Démonstration.
Etape 1 : Existence de l et convergence de la suite.
Remarquons d'abord que $g([a;b]) \subset [a;b]$ ce qui implique que la suite (x_n) est bien définie. Soit x_0 dans $[a;b]$ et $x_{n+1} = g(x_n)$, $\forall n \geq 0$. Nous allons montrer :

1. (x_n) est de Cauchy (donc convergente, car [a ; b] est complet)
2. $x_n \to l$ quand $n \to +\infty$; où l est un point fixe de g.

Par hypothèse, on sait que

$$\forall n \geq 1; \ |x_n - x_{n+1}| = |g(x_{n-1}) - g(x_n)| \leq k|x_{n-1} - x_n|$$

Par récurrence sur n ; on obtient :

$$|x_n - x_{n+1}| \leq k^n |x_0 - x_1|; \ \forall n \geq 0$$

Soient $n \geq 0$ et $p \geq 1$; on a donc

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \textstyle\sum_{q=1}^{p} |x_{n+q} - x_{n+q-1}| \\ &\leq \textstyle\sum_{q=1}^{p} k^{n+q-1} |x_1 - x_0| \\ &\leq |x_1 - x_0| k^n (1 + k + k^2 + \ldots + k^{p-1}) \\ &\leq |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1-k} \end{aligned}$$

Puisque k est réel positif et strictement inférieur à 1 on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k^n}{1-k} = 0.$$

Par suite

$$\lim_{n \to +\infty} |x_{n+p} - x_n| = 0.$$

La suite (x_n) est donc de Cauchy dans $[a;b]$ qui est complet et par conséquent (x_n) converge vers une limite l quand n tend vers plus l'infini. Comme la fonction g est contractante, elle est continue, et donc $g(x_n)$ tend vers $g(l)$ quand n tend vers plus l'infini. En passant à la limite dans l'égalité $x_{n+1} = g(x_n)$; on en déduit que $l = g(l)$; c'est à dire que l est un point fixe de g.
Etape 2 : Unicité
Soient l_1 et l_2 deux points fixes de g ; donc $l_1 = g(l_1)$ et $l_2 = g(l_2)$; alors $|g(l_1) - g(l_2)| = |l_1 - l_2| \leq k|l_1 - l_2|$; comme $k < 1$; ceci est impossible sauf si $l_1 = l_2$. □

Remarque.
Si g est une application vérifiant

$$\begin{cases} g([a;b]) \subset [a;b] \\ |g'(x)| < 1; \ \forall x \in [a;b] \end{cases}$$

alors la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$; $\forall n \geq 0$ converge vers l'unique point fixe l de g sur $[a;b]$ pour tout choix de $x_0 \in [a;b]$. De plus en faisant tendre p vers l'infini ; on obtient

$$|x_n - l| \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1-k}, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ avec } k = \max_{x \in [a;b]} |g'(x)|$$

Vitesse de convergence d'une suite.

Définition 3. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers α. On appelle ordre de convergence de la suite (x_n) le réel fini ou infini $r > 0$ défini par :

$$r = sup\left\{ s \in \mathbb{R}_+ \ / \ \lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^s} < +\infty \right\}$$

1. Si $r = 2$, on dit que la convergence de (x_n) est quadratique.
2. Si $r = 3$, on dit que la convergence de (x_n) est cubique.
3. Si $r = 1$ et que :
$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = k < 1$$
   (a) Si $0 < k < 1$ on dit que la suite (x_n) est à convergence linéaire.
   (b) Si $k = 0$ on dit que la suite (x_n) est à convergence super-linéaire.
   (c) Si $k = 1$ on dit que la suite (x_n) est à convergence logarithmique.

1.2.3 Application à la résolution de l'équation non linéaire $f(x) = 0$

Le principe de la méthode du point fixe pour résoudre une équation non linéaire $f(x) = 0$, consiste à transformer cette équation, en une équation équivalente $g(x) = x$. Par xemple pour l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ on peut prendre

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - 2 \\ g(x) &= \sqrt{2+x} \\ g(x) &= 1 + \tfrac{2}{x} \\ g(x) &= x - \tfrac{x^2-x-2}{m} \quad \text{pour tout paramètre } m \neq 0. \end{aligned}$$

où g est une fonction auxiliaire "bien" choisie. Le point α, solution de l'équation $f(x) = 0$ est alors un point fixe de g. Par suite approcher les racines de $f(x) = 0$ revient à approcher les points fixes de g. Le choix de la fonction g est motivé par les exigences du théorème de point fixe. En effet, elle doit être contractante dans un voisinage I de α, ce qui revient à vérifier que $|g'(x)| < 1$ sur ce voisinage. Dans ce cas, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \text{ dans un voisinage } I \text{ de } \alpha \\ \forall n \geqslant 0,\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer localement le théorème de point fixe pour démontrer que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Exemple 2. Soit $f(x) = x^3 - 4x + 1$. On vérifie que f admet 3 racines réelles l_1, l_2, et l_3. l_1 appartient à l'intervalle $[-2,5;-2]$, l_2 appartient à l'intervalle $[0;0,5]$ et l_3 appartient à l'intervalle $[1,5;2]$. En posant

$$g(x) = x - \frac{x^3 - 4x + 1}{3x^2 - 4} = \frac{2x^3 - 1}{3x^2 - 4}$$

Un simple calcul donne les valeurs suivantes

x_0	-2	0	2
x_1	-2.125	0.25	1.875
x_2	-2.114975450	0.254098301	1.860978520
x_3	-2.114907545	0.254101688	1.860805877
x_4	-2.114907541	0.254101688	1.860805853
x_5	-2.114907541	0.254101688	1.860805853

On obtient une approximation de chacune des racines de l'équation $f(x) = 0$

1.2.4 Convergence de la méthode du point fixe

Théorème 2.
Soit g une fonction de $I = [a,b]$ dans $[a,b]$ de classe C^1. On suppose que g admet un point fixe $\alpha \in [a,b]$ vérifiant $|g'(\alpha)| < 1$. Alors il existe un voisinage, V_α, de α dans I tel que la suite (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_0 \in V_\alpha \\ \forall n \geqslant 0,\ x_{n+1} = g(x_n)\ \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$

converge vers α.

Démonstration. Comme $|g'(\alpha)| < 1$; il existe une constante, k, non nulle tel que $|g'(\alpha)| \leqslant k < 1$. De plus, g' est continue sur I donc il existe un voisinage $V_\alpha = [\alpha - h, \alpha + h] \subset I$ $(h > 0)$ tel que

$$\forall x \in V_\alpha, |g'(x)| \leqslant k < 1.$$

Donc g est k-contractante sur V_α. En particulier

$$\forall x \in V_\alpha,\ g(x) \in V_\alpha.$$

Le théorème du point fixe appliqué localement à g dans le voisinage V_α implique que

$$\begin{cases} \forall x_0 \in V_\alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n = g(x_{n-1}) \\ \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \end{cases}$$

□

1.2.5 Ordre de convergence de la méthode du point fixe

Si g est une fonction de classe C^2 sur I, si $g'(\alpha) = 0$ et s'il existe $M > 0$ tel que $|g^{(2)}(x)| \leqslant M$, pour tout x dans un voisinage, $V_\alpha \subset I$, de α alors d'après la formule de Taylor

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\alpha) + (x-\alpha)g'(\alpha) + \tfrac{(x-\alpha)^2}{2} g^{(2)}(c) \text{ avec } c \in]\alpha; x[\\ &= \alpha + \tfrac{1}{2} g^{(2)}(c)(x-\alpha)^2 \end{aligned}$$

d'où $|g(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}M|x-\alpha|^2$ avec $M = \sup_{x\in I} |g^{(2)}(x)|$. La suite (x_n) est alors convergente à convergence au moins quadratique.
Nous allons maintenant présenter un résultat simplifié concernant l'ordre de convergence de la méthode du point fixe.

Théorème 3.
Soit g une fonction de l'intervalle $I = [a;b]$ dans lui même. On suppose qu'elle est de classe C^m, avec $m \in \mathbb{N}$, et que g admet un unique point fixe $\alpha \in [a;b]$ vérifiant $|g'(\alpha)| < 1$.
Il existe alors un voisinage V_α de α dans I tel que la suite itérée (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in V_\alpha \\ x_{n+1} = g(x_n),\ \forall n \geqslant 0 \end{cases}$$

converge vers α.
De plus, si $g'(\alpha) = \ldots = g^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $g^{(m)}(\alpha) \neq 0$ alors l'ordre de convergence de (x_n) est égal à m.

Démonstration. L'existence de V_α, voisinage de α, est assurée par le théorème de convergence pour un point. La formule de Taylor appliquée à la fonction g au point α à l'ordre m donne : il existe un réel c_n dans l'intervalle $]x_n, \alpha[$ tel que

$$x_{n+1} = g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha) + \ldots + \frac{g^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}(x_n - \alpha)^{m-1} + \frac{g^{(m)}(c_n)}{m!}(x_n - \alpha)^m$$

Si on suppose de plus que $g'(\alpha) = \ldots = g^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $g^{(m)}(\alpha) \neq 0$, alors

$$x_{n+1} = g(\alpha) + \frac{g^{(m)}(c_n)}{m!}(x_n - \alpha)^m.$$

Donc

1. le rapport

$$\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^m}=\frac{|g^{(m)}(c_n)}{m!}$$

tend vers

$$\frac{|g^{(m)}(\alpha)|}{m!}$$

qui est fini et non nul

2. pour $\varepsilon>0$, le rapport $\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^{m+\varepsilon}}=\frac{|g^{(m)}(c_n)}{m!|x_n-\alpha|^{\varepsilon}}$ tend vers $+\infty$.

Par suite l'ordre de convergence de (x_n) est égal à m. □

Test d'arrêt

Si la suite (x_n) qui converge vers un réel α vérifiant $g(\alpha)=\alpha$. On se propose d'approcher cette limite en fixant une tolérance ε. On estime qu'on atteint la précision ε dès qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$|x_{n_0+1}-x_{n_0}|<\varepsilon$$

Néanmoins, la situation devient plus concrète lorsque g' est négative au voisinage de α. En effet

Proposition 5.
Soit g une fonction de l'intervalle $[a,b]$ dans lui même, de classe C^1. On suppose que g admet un unique point fixe $\alpha\in[a,b]$ et vérifiant $-1<g'(x)<0$. La la suite (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_0\in V_\alpha \\ x_{n+1}=g(x_n)\ \ \forall n\geqslant 0\end{cases}$$

vérifie

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |x_{n+1}-\alpha|\leqslant|x_{n+1}-x_n|$$

Par conséquent, soit n_0 tel que $|x_{n_0}-\alpha|<\varepsilon$, alors x_{n_0} approche α à ε près.

Démonstration. On applique le théorème des accroissements finis à g entre x_n et α. Il existe alors c_n entre x_n et α telle que

$$g(x_n)-g(\alpha)=g'(c_n)(x_n-\alpha)$$

ce qui donne :

$$x_{n+1}-\alpha=g'(c_n)(x_n-\alpha)$$

Comme $g'(c_n)<0$, $(x_{n-1}-\alpha)$ et $(x_n-\alpha)$ sont de signes contraires.

— x_j ——— x_n — α ——— x_{n+1} ——— x_i ———

Finalement,

$$|x_{n+1}-\alpha|\leqslant|x_{n+1}-x_n|$$

□

1.2.6 Résultats numériques pour $\sqrt{a}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Soit la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 & \text{donnée} \\ x_{n+1} = g(x_n)\end{cases}$$

avec

$$g(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{a}{x})$$

La suite (x_n) converge vers $\sqrt{a}$ et son ordre de convergence est égal à 2. En effet

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^2}=\frac{x_n^2+a-\sqrt{a}x_n}{2(x_n-\sqrt{a})^2x_n}\to\frac{1}{2\sqrt{a}}\text{ quand } n\to\infty$$

et

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^3}\to+\infty\text{ quand } n\to\infty$$

1.2.7 Algorithme et programme en langage C

Algorithme

```
début
   lire(x0);
   lire(N);
   lire(ε);
   n ← 0;
   tr ← faux;
   repeter
        n ← n + 1
        x1 ← g(x0);
        si
             |x1 - x0| < ε  alors  tr ← vrai;
        sinon
             x0 ← x1;
        finsi
   jusqu'à((tr = vrai)ou(n = N));
   si
        tr = vrai  alors  écrire(la valeur approchée est x1);
   sinon
        écrire(changer x0 ou N);
   finsi
fin.
```

Programme

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#define N 1000 \\nombre maximum d'iterations
#define EPS 1.0e-15 \\Précision voulue
\\fonction test
double g(double x)
{
return exp(-x);
}

\\Programme de calcul de calcul du point fixe g(x) = x, pour cette fonction
int main()
{
double x0;
double x[N];
printf("Entrez une valeur initiale X0 :");
scanf("%lf",&x0);
x[0] = x0; \\Initialisation de la valeur de départ
int k=0;
do
{
x[k + 1] = g(x[k]); \\calcul des termes de la suite x(k+1)
if(fabs(x[k + 1] - x[k]) <= EPS) \\critère de convergence
{
printf("\n \n Resultat de la recherche : \n\n Nombre d'Iterations K = break;

}
k++;
}
while((fabs(x[k + 1] - x[k]) > EPS)&& (k + 1 < N));\\continuer les calcul tant que le critère
n'est pas atteind system("pause");
}
```

1.2.8 Exercices

1.2.9 Exercices avec solutions

Exercice 9.3.1

Le but de cet exercice est de calculer la racine réelle de l'équation donnée par

$$f(x) = e^{-x} - x = 0.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0.1, 1[$.
2. Vérifier que α est un point fixe de la fonction $F(x) = e^{-x}$.
3. Montrer que la fonction $F(x) = e^{-x}$ est strictement contractante sur $]0.1, 1[$.
4. Montrer que $F(]0.1, 1[) \subset]0.1, 1[$.
5. Construire à partir des questions précédentes, une suite $(x_n)_n$ qui converge vers α.
6. Partant de $x_0 = 0.500$, remplir le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
x_n						

7. En déduire une approximation de la racine réelle de l'équation $f(x) = e^{-x} - x = 0$.

Exercice 9.3.2

Le but de cet exercice est de calculer la racine réelle de l'équation donnée par

$$f(x) = \frac{x-1}{x} - e^{-x} = 0.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1, 2[$.
2. Vérifier que α est un point fixe de la fonction $F(x) = xe^{-x} + 1$.
3. Montrer que la fonction $F(x) = xe^{-x} + 1$ est strictement contractante sur $]1, 2[$.
4. Montrer que $F(]1, 2[) \subset]1, 2[$.
5. Construire à partir des questions précédentes, une suite $(x_n)_n$ qui converge vers α.
6. Partant de $x_0 = 1.500$, remplir le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
x_n						

7. En déduire une approximation de la racine réelle de l'équation $f(x) = \frac{x-1}{x} - e^{-x}$.

Exercice 9.3.3

On considère la fonction

$$f(x) = \cos(\frac{1}{x+1})$$

définie sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Faire le tableau de variations de f.
2. Donner un majorant, k, de la fonction $|f'|$ sur $[0, 1]$.

3. Montrer que la fonction f satisfait aux hypothèses du théorème du point fixe et en déduire une suite récurrente convergeante vers l'unique solution de $\cos(1/(l+1)) = l$ dans $[0,1]$.
4. Combien de termes de la suite faut-il calculer pour être sûr d'obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près de l ?
5. Ecrire l'algorithme de la méthode du point fixe pour calculer la solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 9.1.3.4

Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, g une fonction définie de I dans lui même, elle est assez régulière et elle admet un point fixe $l \in I$ i.e. $g(l) = l$. On considère la suite des itérés suivante

$$\begin{cases} x_0 \in I \text{ donné,} \\ x_{n+1} = g(x_n), \ \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$

Calculer l'erreur $e_n = x_n - l$ et donner une condition pour que la méthode du point fixe ou approximations successives soit d'ordre $p \geqslant 1$.

Exercice 9.3.5

Montrer que l'équation $x = -\ln(x)$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0,+\infty[$. Montrer que la méthode itérative

$$\begin{cases} x_0 \in]0,\infty[\text{ donné,} \\ x_{n+1} = -\ln(x_n), \ \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$

diverge. Proposer une méthode d'approximation de la solution.

Exercice 9.3.6

Soit l'équation

$$x = e^{-x}, \ \forall x \in [0,+\infty[$$

On considère la méthode itérative suivante

$$\begin{cases} x_0 \in [0,\infty[\text{ donné,} \\ x_{n+1} = e^{-x_n}, \ \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$

Montrer cette méthode est convergente si x_0 est bien choisi. Donner dans ce cas l'ordre de convergence.

Exercice 9.3.5

On considère l'équation $f = 0$

1. Montrer que cette équation admet une racine dans l'intervalle $[0,4]$.
2. Appliquer la méthode de dichotomie pour approcher la racine de cette équation à 10^{-4} près.
3. Montrer que la fonction $f(x) =$ admet une un point fixe dans l'intervalle $[0,4]$.
4. Appliquer l'algorithme de la méthode du point fixe pour approcher la solution de l'équation.
5. Comparer les deux méthode.

1.2.10 Exercices sans Solutions

Exercice 9.3.7

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{x-1}{x} - e^{-x}$.

1. Montrer que $f(1)f(2) < 0$.
2. En déduire qu'il existe une racine unique α de l'équation $f(x) = 0$ sur $]1,2[$.
3. On pose $g(x) = xe^{-x} + 1$ et on considère le procédé itératif suivant : $\begin{cases} x_0 = 1.5 \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$
   (a) Vérifier que α est un point fixe de la fonction g.
   (b) Calculer à 10^{-3} les itérés , x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5.
4. En déduire une approximation de la solution de l'équation : $\frac{x-1}{x} - e^{-x} = 0$.

Exercice 9.3.8

Le but de cet exercice est de calculer la racine cubique d'un nombre positif a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2}$ ($a > 0$ fixé).

1. Faire l'étude complète de la fonction f.
2. Comparer f à l'identité.
3. Soit la suite $(x_n)_{n \in IN}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. À l'aide des graphes de f et de l'identité sur $\mathbb{R}_+^*$, dessiner la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence.
4. Justifier mathématiquement la convergence observée graphiquement. En particulier, montrer que cette suite est décroissante à partir du rang 1.
5. Calculer l'ordre de convergence de la suite.
6. Écrire l'algorithme défini par la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui permet de déterminer $\sqrt[3]{a}$ à une précision de 10^{-6}.

Exercice 9.3.9

1. Soit $I = [0,1]$, et la fonction $f : x \mapsto x^4$. Montrer que la suite des itérés de point fixe converge pour tout $x \in [0,1]$ et donner la limite de la suite en fonction du choix initial x_0.
2. On veut résoudre l'équation $2xe^x = 1$:
   (a) Vérifier que cette équation peut s'écrire sous forme de point fixe : $x = \frac{1}{2}e^{-x}$.
   (b) Ecrire l'algorithme de point fixe, et tracer sur un graphique les itérés x_0, x_1, x_2 et x_3 en partant de $x_0 = 1$.
   (c) Justifier la convergence de la méthode.
3. On veut résoudre l'équation $x^2 - 2 = 0$:
   (a) Vérifier que cette équation peut s'écrire sous forme de point fixe : $x = \frac{2}{x}$.
   (b) Ecrire l'algorithme de point fixe, et tracer sur un graphique les itérés x_0, x_1, x_2 et x_3 en partant de $x_0 = 1$ puis $x_0 = 2$.
   (c) Essayer ensuite le point fixe sur $x = \frac{x^2+2}{2x}$.

Exercice 9.3.10

Etudier la convergence des méthodes de point fixe suivantes (on cherche à approcher $\sqrt{2}$).

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{2}{x_n}, \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}), \\ x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{x_n}, \\ x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{2}{x_n}). \end{cases}$$

Exercice 9.3.11

Pour les équation suivantes, trouver un algorithme de point fixe qui converge vers la plus petite racine positive de

1. $x^3 - x - 1 = 0$
2. $x - \tan x = 0$
3. $e^{-x} - \cos x = 0$

Exercice 9.3.13

On considère la fonction

$$f(x) = e^x + 3\sqrt{x} - 2$$

définie sur l'intervalle $[0,1]$. Montrer qu'il existe une racine α de l'équation $f(x) = 0$ dans $[0,1]$ et qu'elle est unique. On veut calculer la racine α de l'équation $f(x) = 0$ par une méthode de point fixe convenable. En particulier on se donne deux méthodes de point fixe $x = \Phi_i(x)$, $i = 1, 2$, où les fonctions Φ_1 et Φ_2 sont définies comme :

$$\Phi_1(x) = ln(2 - 3\sqrt{x}) \text{ et } \Phi_2(x) = \frac{(2 - e^x)^2}{9}$$

Laquelle de ces deux méthodes utiliseriez-vous pour calculer numériquement la racine α de l'équation $f(x) = 0$? Justifiez votre réponse.

En utilisant la méthode de dichotomie sur l'intervalle $[0,1]$, estimer le nombre d'itérations nécessaires pour calculer la racine α de $f(x) = 0$ avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-10}$.

Exercice 9.3.14

On veut calculer le zéro α de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ en utilisant la méthode de point fixe $x - k + 1 = \Phi(x - k)$ suivante :

$$x_{k+1} = x_k(1 - \frac{\omega}{3}) + (x_k)^3(1 - \omega) + \frac{2w^3}{(x_k)^2} + 2(\omega - 1), k \geq 0,$$

$\omega \in \mathbb{R}$ étant un paramètre réel.

Pour quelles valeurs du paramètre ω, le zéro de la fonction f est-il un point fixe de la méthode proposée ? Pour quelles valeurs de ω, la méthode proposée est-elle d'ordre 2 ? Existe-t-il une valeur de ω telle que l'ordre de la méthode de point fixe est supérieur à 2 ?

1.2.11 Solutions des exercices

SOLUTION DE L'Exercice 9.3.1

1. Puisque la fonction f est continue sur $[0.1, 1]$ et que $f(0.1)f(1) < 0$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]0.1, 1[$, or $f'(x) = -(e^{-x} + 1) \leq 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0.1, 1]$, et par conséquent, la solution α est unique.
2. Comme α est une solution de l'équation $f(x) = 0$, alors on a $f(\alpha) = e^{-\alpha} - \alpha = 0$, ce qui est équivalent à dire que $e^{-\alpha} = \alpha$, et par conséquent $F(\alpha) = \alpha$, i.e., α est un point fixe de la fonction F.
3. Pour montrer que la fonction F est strictement contractante sur $]0.1, 1[$, il suffit de montrer que $|F'(x)| \leq k < 1$ pour tout $x \in]0.1, 1[$. Or la fonction F est strictement décroissante (car $F'(x) = -e^{-x} < 0$), alors $|F'(x)| = e^{-x} < e^{-0.1}$. En posant $k = e^{-0.1}$, il découle de l'inégalité précédente que la fonction F est strictement contractante sur $]0.1, 1[$.
4. La fonction F est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0.1, 1[$, donc
$$F(]0.1, 1[) =]F(1), F(0.1)[=]e^{-1}, e^{-0.1}[\subset]0.1, 1[.$$
5. À partir des questions précédentes, la suite $(x_n)_n$ définie par
$$\begin{cases} x_0 = 0.5 \\ x_{n+1} = F(x_n) \end{cases}$$
converge vers α.
6. Partant de $x_0 = 0.500$, alors nous avons le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0.500	0.6065	0.5452	0.5797	0.5601	0.5712

7. Une approximation de la racine réelle de la fonction $f(x) = e^{-x} - x$ est donc $x^* = 0.5712$.

Solution de l'exercice 9.3.2

1. Puisque la fonction f est continue sur $[1,2]$ et que $f(1)f(2) < 0$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]1,2[$, or $f'(x) = \frac{1}{x^2} + e^{-x} > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]1,2[$, et par conséquent, la solution α est unique.
2. Comme α est une solution de l'équation $f(x) = 0$, alors on a $f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha} - e^{-\alpha} = 0$, ce qui est équivalent à dire que $\alpha = 1 + \alpha e^{-\alpha}$, et par conséquent $F(\alpha) = \alpha$, i.e., α est un point fixe de la fonction F.
3. Pour montrer que la fonction F est strictement contractante sur $]1,2[$, il suffit de montrer que $|F'(x)| \leq k < 1$ pour tout $x \in]1,2[$. Or $|F'(x)| = |(1-x)e^{-x}|$ et pour tout $x \in]1,2[$ on a : $0 < (x-1)e^{-x} < e^{-1}$, alors $|F'(x)| < e^{-1}$ pour tout $x \in]1,2[$. En posant $k = e^{-1}$, il découle de l'inégalité précédente que la fonction F est strictement contractante sur $]1,2[$.
4. La fonction F est continue et strictement décroissante sur $]1,2[$, donc
$$F(]1,2[) =]F(2), F(1)[=]2e^{-2} + 1, e^{-1} + 1[\subset]1,2[.$$

5. À partir des questions précédentes, la suite $(x_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1.5 \\ x_{n+1} = F(x_n) \end{cases}$$

converge vers α.

6. Partant de $x_0 = 1,500$, alors nous avons le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
x_n	1,500	1,3347	1,3513	1,3499	1,3500	1,3500

7. Une approximation de la racine réelle de la fonction $f(x) = \frac{x-1}{x} - e^{-x}$ est donc $x^* = 1.3500$.

Solution de l'exercice 9.3.3

1. La fonction f est continue dérivable sur l'intervalle $[0,1]$ et on a

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\sin(\frac{1}{1+x}).$$

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[0,1]$

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$\cos(1)$	$\nearrow$	$\cos(\frac{1}{2})$

2. On a

$$\forall x \in [0,1];\ \ f'(x) \leq \sin(1) < 1$$

3. On a

-
$$\begin{array}{rccc} f & : & [0,1] & \to & [0,1] \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Donc

$$f([0,1]) \subset [0,1]$$

- La fonction f est donc contractante sur l'intervalle $[0,1]$.
  Donc f satifait aux hypothèses du théorème du point fixe.
- La suite définie par

$$x_0 \in [0,1]$$
$$n_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

est convergente

4. Si on pose $k = \sin(1)$

$$\begin{array}{rcl} |x_{n+1} - x_n| & < & k|x_n - x_{n-1}| \\ & < & k^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \\ & \vdots & \\ & < & k^n|x_1 - x_0| \end{array}$$

Ainsi pour avoir $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-3}$, il suffit que $k^n|x_1 - x_0| < 10^{-3}$. On obtient

$$n > -\frac{3\ln 10 + \ln|x_1 - x_0|}{\ln k}$$

Ainsi le nombre de termes de la suite qu'il faut calculer pour obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près du point fixe de la fonction $f(x) = \cos(\frac{1}{1+x})$ est supérieur à la partie entière du réel $-\frac{3\ln 10 + \ln|x_1 - x_0|}{\ln k}$

5. Algorithme de la méthode des approximations succéssives

   Siasir : x_0, ε, $f : [a,b] \to IR$, $F : [a,b] \to IR$

   tant que $|f(x_0)| > \varepsilon$ faire

   $x_0 = F(x_0)$

   fin tant que

Solution de l'exercice 9.3.4

On a

$$\begin{array}{rcl} e_{n+1} & = & x_{n+1} - l \\ & = & g(x_n) - g(l) \\ & = & (x_n - l)g'(l) + \ldots + \frac{(x_n-l)^{p-1}}{(p-1)!}g^{(p-1)}(l) + \frac{(x_n-l)^p}{(p)!}g^{(p-1)}(c_n) \end{array}$$

où c_n est un réel compris entre x_n et l.

La méthode des approximations successives converge à l'ordre $p > 1$ si

$$g^{(k)}(l) = 0,\ \forall k = 1, \ldots, p-1\ ,\ \text{pour } p > 1,$$

et

$$g^{(p)}(l) \neq 0,\ \text{pour} p \geq 1,$$

d'après les hypothèses précédentes on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - l}{(x_n - l)^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p!} g^{(p)}(c_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p!} g^{(p)}(l) \neq 0.$$

Cas où $p = 2$. En posant $M = \sup_{x\in I}|g''(x)|$, on peut écrire

$$|x_{n+1} - l| \leq \frac{M}{2}|x_n - l|^2.$$

Ce qui peut s'écrire encore

$$|x_{n+1} - l| \leq \frac{M}{2}(\frac{M}{2}|x_{n-1} - l|^2)^2.$$

Par récurrence sur n, on trouve

$$|x_{n+1} - l| \leq \frac{M}{2}(\frac{M}{2}|x_0 - l|)^{2^n}.$$

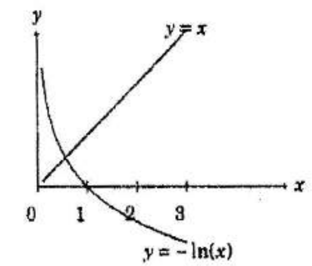
On voit que en choisissant x_0 tel que $|x_0 - l| \leq \frac{2}{10M}$, on obtient

$$|x_{n+1} - l| \leq \frac{M}{2}10^{-2^n}.$$

Ce qui montre qu'à chaque itération, le nombre de décimales exactes double en théorie.

Solution de l'exercice 9.3.5

Posons $f(x) = -\ln(x)$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est $f'(x) = -1/x$. La fonction f est donc décroissante sur $]0, +\infty[$. Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 0$, le point fixe de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est localisé dans le segment ouvert $]0, 1[$.



Sur ce dernier, on a $|f'(x)| > 1$, même en prenant un intervalle fermé $[a,b] \subset]0,1[$, la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ construite à partir de la formule précédente diverge. En effet, pour $n \geqslant 0$, il existe un réel ξ entre x_n et l tel que

$$\begin{aligned} x_{n+1} - l &= f(x_n) - f(l) = f'(\xi)(x_n - l) \\ |x_{n+1} - l| &= |f'(\xi)(x_n - l)| > |x_n - l|, \end{aligned}$$

Par récurrence on obtient

$$|x_{n+1} - l| > |x_n - l| > |x_{n-2} - l| > \ldots > |x_0 - l|$$

D'où cette méthode itérative diverge.

Une autre méthode d'approximation de la solution : On cherche à résoudre $x = -ln(x)$ sur $]0,+\infty[$. En prenant l'exponentielle de cette dernière égalité on obtient

$$x = e^{-x},\ x \in [0,+\infty[.$$

$$\begin{cases} x_0 \in [0,\infty[\ \text{donné}, \\ x_{n+1} = e^{-x_n},\ \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$

Cette méthode est convergente si x_0 est bien choisi.

Solution de l'exercice 9.3.6

Posons $g(x) = e^{-x}$. Clairement 0 n'est pas solution de l'équation $x = g(x)$. Pour $x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = -e^{-x}$, donc $|g'(x)| < 1$ ce qui implique que g est contractante sur $]0,+\infty[$. Comme $]0,+\infty[$ est un ouvert, le théorème du point fixe ne s'applique pas. Il faut trouver un fermé $[a,b] \subset]0,+\infty[$, tel que $g([a,b]) \subset [a,b]$. Prenons $a = 1/10$ et $b = 1$. On a $g(1/10) = e^{-1/10} \leqslant 1$ et $g(1) = e^{-1} \geqslant 1/10$. On a bien $g([1/10,1]) \subset [1/10,1]$ parceque g est continuité et décroissante sur $[1/10,1]$. Puisque $|g'(x)| < 1$ sur le fermé $[1/10,1]$, on peut appliquer le théorème du point fixe. Il existe $l \in [1/10,1]$ tel que $l = g(l)$. Comme $g'(x) = -e^{-x} \neq 0$, la méthode est convergente à l'ordre 1.

1.3 La méthode de Newton

1.3.1 Principe de la méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode particulière de celle du point fixe. Elle est basée sur l'idée de la construction d'une suite (x_n) qui converge vers α, solution de l'équation $f(x) = 0$.

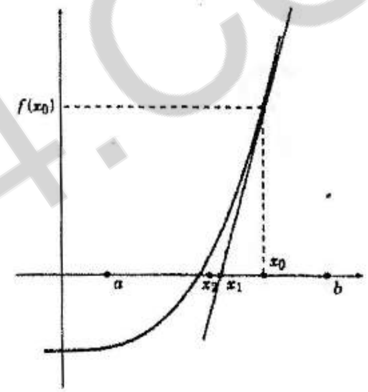
Cette construction se réalise de la façon suivante.

On considère l'équation $f(x) = 0$, où f est une fonction dérivable sur $[a,b]$ et $f'(x) \neq 0$. Partons d'un point $x_0 \in [a,b]$. On considère la tangente à la courbe de la fonction f au point $(x_0, f(x_0))$ dont l'équation est donnée par

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point x_1 donné par

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Si $x_1 \in [a,b]$ alors on recommence l'opération avec la tangente au point d'abscisse $(x_1, f(x_1))$. On obtient

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Ce processus conduit à la construction d'une suite récurrente :

$$x_0 \in [a,b] \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Donc, si $f \in C^3([\alpha;b])$ telle que $f'(\alpha) \neq 0$ et $f(\alpha) = 0$, on définit la fontion

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

g est de classe $C^2([\alpha;b])$. Ainsi la suite définie par la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$$

devient un cas particulier de la méthode du point fixe. Puisque

$$g'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

on en déduit que si α est une racine de l'équation $f(x) = 0$ alors $g'(\alpha) = 0$.

1.3.2 Convergence locale de la méthode de Newton

On rappelle le résultat suivant déjà vu
Soit $g : I = [a;b] \to [a;b]$ de classe C^m ; avec $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que g admet un unique point fixe $\alpha \in [a;b]$ vérifiant $|g'(\alpha)| < 1$.
Il existe alors un voisinage V_α de α dans I tel que la suite itérée (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in V_\alpha \\ x_{n+1} = g(x_n) \ \ \forall n \geq 0 \end{cases}$$

converge vers α.
De plus, si $g'(\alpha) = \ldots = g^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $g(m)(\alpha) \neq 0$, alors l'ordre de convergence de (x_n) est égal à m.

On remarque que :
Si $x_{n+1} = g(x_n)$, $\forall n \geq 0$ et Si $g \in C^2([a;b])$; $g'(\alpha) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $x_n \neq \alpha$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \frac{1}{2}|g^{(2)}(\alpha)|$$

et la convergence est au moins quadratique.

1.3.3 Méthode de Newton modifiée

Dans ce qui précède, nous avons supposé que la fonction f dont nous cherchons le zéro α vérifie $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$. Autrement dit, nous avons supposé que α est une racine simple de l'équation $f(x) = 0$. La question qu'on doit se poser maintenant est : que se passe-t-il quand α est une racine de $f(x) = 0$ de multiplicité $m \geq 2$? Si on garde la même fonction g que précédemment, la méthode de Newton perd son caractère de convergence quadratique. En effet, on peut écrire

$$f(x) = (x-\alpha)^m h(x) \ \text{ avec } \ h(\alpha) \neq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{(x-\alpha)^m h(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}h(x) + (x-\alpha)^m h'(x)} \\ &= x - \frac{(x-\alpha)h(x)}{mh(x) + (x-\alpha)h'(x)} \end{aligned}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} = 1 - \frac{1}{m} \neq 0,$$

ce qui implique en terme de suite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = 1 - \frac{1}{m} > 0$$

Ceci se traduit par une convergence linéaire et pas du tout quadratique. Pour récupérer cette dernière, on fait appel à la méthode de Newton modifiée.

On suppose ici que α est une racine de $f(x) = 0$ de multiplicité $m \geq 2$, on suppose que $f \in C^2([a,b])$ et par conséquent h aussi. On définit alors la fonction g par :

$$g(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Dans ce cas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} = 0,$$

ce qui implique :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} < \infty.$$

On démontre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \frac{h'(\alpha)}{mh(\alpha)}$$

1.3.4 Convergence globale de la méthode de Newton

Nous allons énoncer un résultat de convergence globale (x_0 est choisi n'importe où dans le domaine de f) concernant la méthode de Newton pour des fonctions ayant une concavité déterminée (convexe ou concave).

Théorème 4.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant :

1. $f(a)f(b) < 0$.
2. $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$
3. $f^{(2)}(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$

La suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \ \text{ tel que } f(x_0)f^{(2)}(x_0) > 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

est convergente et elle converge vers α.

Démonstration. Les hypothèses

$$\begin{cases} f(a)f(b) < 0 \\ f'(x) \neq 0, \ \forall x \in [a,b] \end{cases}$$

impliquent qu'il existe un unique $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Comme $f^{(2)}$ est de signe constant, on distingue deux cas :

1. Premier cas : $f^{(2)}(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$ (donc $f(x_0) > 0$).
   (a) Si $f'(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$ on a :

$$f(x) > 0 \ \ \forall x \in]\alpha,b] \text{ et } f(x) < 0 \ \forall x \in [a;\alpha[$$

Comme $f(x_0) > 0$, alors $x_0 \in]\alpha, b]$. Rappelons que g est la fonction définie par $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ $\forall x \in [a,b]$. Comme

$$g'(x) = \frac{f(x)f^{(2)}(x)}{(f'(x))^2} > 0 \ \forall x \in]\alpha; b],$$

g est croissante sur $]\alpha, b]$. D'où, $\alpha = g(\alpha) \leqslant g(x_0) = x_1$ puisque $\alpha < x_0$. On en déduit que $x_1 \in]\alpha; b]$. De plus,

$$g(x_0) = x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0.$$

Donc, $\alpha \leqslant x_1 < x_0$.

Par récurrence, on obtient :

$$\alpha \leqslant x_{n+1} < x_n \leqslant \cdots < x_2 < x_1 < x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc la suite (x_n) est décroissante et minorée par α, ce qui montre qu'elle est convergente. Comme $x_{n+1} = g(x_n)$ et comme g est continue, (x_n) converge vers l'unique point fixe α de g. On remarque de plus que

$$|x_{n+1} - \alpha| < |x_n - \alpha| \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Si $f'(x) < 0$, $\forall x \in [a,b]$ un raisonnement semblable au précédent implique que (x_n) est croissante majorée par α. Donc (x_n) est convergente. Comme $x_{n+1} = g(x_n)$ et que g est continue, on obtient que (x_n) converge vers α l'unique point fixe de g.

2. Second cas : $f^{(2)}(x) < 0$, $\forall x \in [a,b]$ (donc $f(x_0) < 0$). Alors le raisonnement précédent, avec f remplacée par $-f$; implique que la suite (x_n) converge vers α.

□

Test d'arrêt

Une fois construite la suite (x_n) convergeant vers le réel α vérifiant $g(\alpha) = \alpha$; et une fois fixée la tolérance ε ; nous cherchons le premier entier n_0 vérifiant :

$$|x_{n_0+1} - x_{n_0}| < \varepsilon.$$

Si on note $e_n = x_n - \alpha$ l'erreur à l'itération n ; on a :

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = g'(c_n)e_n$$

avec c_n un réel entre x_n et α donné par le théorème des accroissements finis. Par conséquent,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= (x_{n+1} - \alpha) - (x_n - \alpha) \\ &= e_{n+1} - e_n \\ &= (g'(c_n) - 1)e_n. \end{aligned}$$

Or si n est suffisamment grand,

$$g'(c_n) \approx g'(\alpha) = 0$$

et donc

$$e_n \approx x_{n+1} - x_n.$$

L'erreur qu'on commet lorsque l'on adopte ce critère est donc plus petite que la tolérance ε fixée.

$$|x_{n+1} - x_n| = |g'(c_n) - 1||x_n - \alpha|$$

1.3.5 Résultats nuériques pour $\sqrt{10}$

Pour calculer $\sqrt{a}$, on pose $f(x) = x^2 - a$, avec $f'(x) = 2x$. La suite issue de la méthode de Newton est déterminée par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - a}{2u_n}$. Suite qui pour cet exemple s'appelle suite de Héron et que l'on récrit souvent

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

Proposition 6.
Cette suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

Pour le calcul de $\sqrt{10}$, on pose par exemple $u_0 = 4$, et on peut même commencer les calculs à la main :

$$\begin{aligned} &u_0 = 4 \\ &u_1 = \tfrac{1}{2}\left(u_0 + \tfrac{10}{u_0}\right) = \tfrac{1}{2}\left(4 + \tfrac{10}{4}\right) = \tfrac{13}{4} = 3{,}25 \\ &u_2 = \tfrac{1}{2}\left(u_1 + \tfrac{10}{u_1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{13}{4} + \tfrac{10}{\frac{13}{4}}\right) = \tfrac{329}{104} = 3{,}1634\ldots \\ &u_3 = \tfrac{1}{2}\left(u_2 + \tfrac{10}{u_2}\right) = \tfrac{216401}{68432} = 3{,}16227788\ldots \\ &u_4 = 3{,}162277660168387\ldots \end{aligned}$$

Pour u_4 on obtient $\sqrt{10} = 3{,}1622776601683\ldots$, avec déjà 13 décimales exactes !
Nous allons donner la preuve de la convergence de la suite (u_n) vers $\sqrt{a}$.

Démonstration.

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrons que $u_n \geqslant \sqrt{a}$ pour $n \geqslant 1$.
   Tout d'abord

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2 + a}{u_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4u_n^2}(u_n^4 - 2au_n^2 + a^2) = \frac{1}{4}\frac{(u_n^2 - a)^2}{u_n^2}$$

   Donc $u_{n+1}^2 - a \geqslant 0$. Comme il est clair que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$, on en déduit que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$. (Notez que u_0 est quelconque.)

2. Montrons que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante qui converge.
   Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{u_n^2}\right)$, et que pour $n \geqslant 1$ on vient de voir que $u_n^2 \geqslant a$ (donc $\frac{a}{u_n^2} \leqslant 1$), alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, pour tout $n \leqslant 1$.
   Conséquence : la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

3. (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

Notons ℓ la limite de (u_n). Alors $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} \to \ell$. Lorsque $n \to +\infty$ dans la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$, on obtient $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$. Ce qui conduit à la relation $\ell^2 = a$ et par positivité de la suite, $\ell = \sqrt{a}$.

□

Calcul de l'erreur pour $\sqrt{10}$

Proposition 7. 1. Soit k tel que $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$. Alors pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

2. Pour $a = 10$, $u_0 = 4$, on a :

$$u_n - \sqrt{10} \leqslant 8\left(\frac{1}{24}\right)^{2^{n-1}}$$

La puissance de la méthode de Newton : 11 itérations donnent déjà 1000 décimales exactes après la virgule. Cette rapidité de convergence se justifie grâce au calcul de l'erreur : la précision est multipliée par 2 à chaque étape, donc à chaque itération le nombre de décimales exactes double !

10^{-10} (~ 10 décimales)	4 itérations
10^{-100} (~ 100 décimales)	8 itérations
10^{-1000} (~ 1000 décimales)	11 itérations

Démonstration. 1. Dans la preuve de la proposition 6, nous avons vu l'égalité :

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2} \text{ donc } (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2}$$

Ainsi comme $u_n \geqslant \sqrt{a}$ pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= (u_n - \sqrt{a})^2 \times \frac{1}{u_{n+1} + \sqrt{a}} \times \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leqslant (u_n - \sqrt{a})^2 \times \frac{1}{2\sqrt{a}} \times \frac{1}{4} \cdot (1+1)^2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2 \end{aligned}$$

Si k vérifie $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$, nous allons en déduire par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, la formule

$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

C'est vrai pour $n = 1$. Supposons la formule vraie au rang n, alors :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2 = \frac{1}{2\sqrt{a}}(2\sqrt{a})^2\left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 = 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$$

La formule est donc vrai au rang suivant.

2. Pour $a = 10$ avec $u_0 = 4$ on a $u_1 = 3,25$. Comme $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant 4$ alors $u_1 - \sqrt{10} \leqslant u_1 - 3 \leqslant \frac{1}{4}$. On fixe donc $k = \frac{1}{4}$. Toujours par l'encadrement $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant 4$, la formule obtenue précédemment devient

$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2 \cdot 4\left(\frac{\frac{1}{4}}{2 \cdot 3}\right)^{2^{n-1}} = 8\left(\frac{1}{24}\right)^{2^{n-1}}.$$

□

Exemple : Calcul de $\sqrt{10}$.

$\sqrt{10}$=3.16227766016837933199889354443271853371955513932521
68268575048527925944386392382213442481083793002951
87347284152840055148548856030453880014690519596700
15390334492165717925994065915015347411333948412408
53169295770904715764610443692578790620378086099418
28371711548406328552999118596824564203326961604691
31433612894979189026652954361267617878135006138818
62785804636831349524780311437693346719738195131856
78403231241795402218308045872844614600253577579702
82864402902440797789603454398916334922265261206779
26516760310484366977937569261557205003698949094694
21850007358348844643882731109289109042348054235653
40390727401978654372593964172600130699000095578446
31096267906944183361301813028945417033158077316263
86395193793704654765220632063686587197822049312426
05345411160935697982813245229700079888352375958532
85792513629646865114976752171234595592380393756251
25369855194955325099947038843990336466165470647234
99979613234340302185705218783667634578951073298287
51579452157716521396263244383990184845609357626020

1.3.6 Résultats numériques pour $\sqrt[12]{1,10}$

Pour calculer $(1,10)^{1/12}$, on pose $f(x) = x^{12} - a$ avec $a = 1,10$. On a $f'(x) = 12x^{11}$. On obtient $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^{12} - a}{12u_n^{11}}$. Ce que l'on reformule ainsi :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{12}\left(11u_n + \frac{a}{u_n^{11}}\right).$$

Voici les résultats numériques pour $(1,10)^{1/12}$ en partant de $u_0 = 1$.

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 1,0083333333333333\ldots \\ u_2 &= 1,0079748433368980\ldots \\ u_3 &= 1,0079741404315996\ldots \\ u_4 &= 1,0079741404289038\ldots \end{aligned}$$

Toutes les décimales affichées pour u_4 sont exactes : $(1,10)^{1/12} = 1,0079741404289038\ldots$

1.3.7 Algorithme

début

  lire(x_0);
  lire(N);
  lire(ε);
  $n \leftarrow 0$;
  $tr \leftarrow faux$;
  repeter
    $n \leftarrow n+1$
    $x_1 \leftarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$;
    si
      $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ **alors** $tr \leftarrow vrai$;
    sinon
      $x_0 \leftarrow x_1$;
    finsi
  jusqu'à$((tr = vrai)ou(n = N))$;
  si
    $tr = vrai$ **alors** **écrire**(la valeur approchée est x_1);
  sinon
    écrire(changer x_0 ou N);
  finsi

fin.

1. À la main, calculer un encadrement à 0,1 près de $\sqrt{3}$. Idem avec $\sqrt[3]{2}$.
2. Calculer une approximation des solutions de l'équation $x^3+1=3x$.
3. Est-il plus efficace de diviser l'intervalle en 4 au lieu d'en 2? (À chaque itération, la dichotomie classique nécessite l'évaluation de f en une nouvelle valeur $\frac{a+b}{2}$ pour une précision améliorée d'un facteur 2.)
4. Écrire un algorithme pour calculer plusieurs solutions de $(f(x)=0)$.
5. On se donne un tableau trié de taille N, rempli de nombres appartenant à $\{1,\dots,n\}$. Écrire un algorithme qui teste si une valeur k apparait dans le tableau et en quelle position.

1. À la main, calculer un encadrement à 0,1 près de $\sqrt{3}$. Idem avec $\sqrt[3]{2}$.
2. Calculer une approximation des solutions de l'équation $x^3+1=3x$.
3. Calculer une approximation de la solution de l'équation $(\cos x = 0)$ sur $[0,\pi]$. Idem avec $(\cos x = 2\sin x)$.
4. Étudier l'équation $(\exp(-x) = -\ln(x))$. Donner une approximation de la (ou des) solution(s) et une majoration de l'erreur correspondante.

1. À la calculatte, calculer les trois premières étapes pour une approximation de $\sqrt{3}$, sous forme de nombres rationnels. Idem avec $\sqrt[3]{2}$.
2. Implémenter la méthode de Newton, étant données une fonction f et sa dérivée f'.

3. Calculer une approximation des solutions de l'équation $x^3+1=3x$.
4. Soit $a>0$. Comment calculer $\frac{1}{a}$ par une méthode de Newton ?
5. Calculer n de sorte que $u_n - \sqrt{10} \leq 10^{-r}$ (avec $u_0 = 4$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$, $a = 10$).

1.3.8 Exercices

1.3.9 Exercices avec solutions

Exercice 9.4.1

On se propose d'approcher la solution de l'équation $f(x) = x^2 - 2$ dans l'intervalle $[1,3]$. Soit $x_0 = 2$, donner les trois premiers itérés de la suite de newton pour approcher cette solution.

Exercice 9.4.2

On considère l'équation : $x = \ln(\frac{1}{x})$.

1. Montrer que cette équation admet une racine réelle unique α.
2. Vérifier que $\alpha \in]0,1[$.
3. En utilisant la méthode Newton, déterminer une approximation de la racine α à 10^{-6} près.

Exercice 9.4.3

Écrire l'algorithme de la méthode de Newton pour calculer la solution de l'équation $f(x)=0$.

Exercice 9.4.4

On se propose d'approcher la solution de l'équation $f(x) = x^2 - 3 = 0$ dans l'intervalle $[1,3]$. Soit $x_0 = 2$, donner les trois premiers itérés de la suite de newton pour approcher cette solution.

Exercice 9.4.5

1. Donner la suite définissant la méthode de Newton pour la recherche d'un zéro de fonction. Justifier l'expression de la suite.
2. Écrire l'algorithme pour une convergence à 10^{-6} près.
3. Déterminer l'ordre de convergence minimale de cette suite.

Exercice 9.4.6

On se propose de calculer une approximation de la racine de l'équation

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

dans l'intervalle $[0,2]$.

1. On applique la méthode de Lagrange : écrire l'algorithme et l'utiliser pour remplir le tableau (on s'arrêtera au plus petit k qui vérifie $|f(x_k)| < 10^{-4}$).

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	$f(x_k)$	signe de $f(b_k)$	$\lvert x_k - \sqrt{2}\rvert$
0	0.00000	1.00000	2.00000	−	-1.00000	+	0.41421
1							
⋮							

2. On applique la méthode de Newton : écrire l'algorithme et l'utiliser pour remplir le tableau (on s'arrêtera au plus petit k qui vérifie $|f(x_k)| < 10^{-4}$). Le point de départ x_0 est donné.

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - \sqrt{2}\rvert$
0	1		
1			
$\vdots$			

Exercice 9.4.7

Le but de cet exercice est de calculer la racine cubique d'un nombre positif a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2}, \quad a > 0$$

1. Faire l'étude complète de la fonction g .
2. Comparer les graphes de la fonction g avec celle de la fonction identité.
3. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 > 0$$

   À l'aide des graphes de la fonction g et celle de la fonction identité sur $\mathbb{R}_+^*$, dessiner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence.
4. Justifier mathématiquement la convergence observée graphiquement. En particulier, montrer que cette suite est décroissante à partir du rang 1.
5. Calculer l'ordre de convergence de cette suite.
6. Écrire l'algorithme défini par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui permet de déterminer $\sqrt[3]{a}$ avec une précision de 10^{-6}.
7. Expliciter la méthode de Newton pour la recherche de la racine de l'équation $f(x) = 0$ où f est la fonction définie par $f(x) = x^3 - a$. Que remarque-t-on ?

Exercice 9.4.8

On veut résoudre l'équation $e^{-\alpha x} = x$ avec $0 < \alpha < 1$.

1. Vérifier que cette équation admet une unique solution, notée l_α, dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^{-\alpha x}$. On définit la suite récurrente

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = g(u_n). \end{cases}$$

   On veut montrer que u_n converge vers l_α. Pour cela, comparer d'abord le graphe de g à l'identité et observer graphiquement la convergence, ensuite justifier mathématiquement la convergence observée graphiquement.
3. Écrire la méthode de Newton pour résoudre l'équation $e^{-\alpha x} = x$ avec $0 < \alpha < 1$. Parmi la méthode de Newton et la méthode de point fixe (1.1), laquelle faut-il préférer ?

Exercice 9.4.9

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = exp(x^2) - 4x^2$. On se propose de trouver les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$.

1. Séparer les 4 racines de $f(x) = 0$ (i.e. indiquer 4 intervalles disjoints qui contiennent chacun une et une seule racine).
2. Montrer qu'il y a une racine α comprise entre 0 et 1.
3. Soit la méthode de point fixe

$$\begin{cases} x_{k+1} = \Phi(x_k) \\ x_0 \in]0,1[\end{cases}$$

   avec Φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = \frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2}$. Examiner la convergence de cette méthode et préciser l'ordre de convergence.
4. Écrire la méthode de Newton pour la recherche des zéros de la fonction f .
5. Entre la méthode de Newton et la méthode de point fixe, quelle est la plus efficace ? Justifier la réponse.

Exercice 9.4.10

On cherche à évaluer $\sqrt{5}$ à l'aide d'un algorithme n'autorisant que les opérations élémentaires. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{10x_n}{x_n^2+5}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Montrer que si cette suite converge, alors elle converge vers 0 ou $\sqrt{5}$
2. Soit la fonction g définie sur $[1;\sqrt{5}]$ par $g(x) = \frac{10x}{x^2+5}$. Étudier la fonction g et la comparer à celle de l'identité.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\sqrt{5}$. Que peut-on conclure.
4. Déterminer l'ordre de convergence de cette suite.

Exercice 9.4.11

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x}$$

1. Faire l'étude complète de la fonction g . (On admettra que $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ admet comme unique solution $m \approx 1{,}36$ et que $g(m) = m$.)
2. Comparer la fonction g à celle de l'identité.
3. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

   Al'aide des graphe de g et de l'identité sur $\mathbb{R}_+^*$, dessiner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence. En particulier, montrer que cette suite est décroissante à partir du rang 1.

4. Expliciter (sans la vérifier) la condition nécessaire pour la convergence observée graphiquement.
5. Écrire l'algorithme défini par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui permet de déterminer le point fixe à une précision de ε.
6. Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$. Que remarque-t-on ?
7. Donner l'ordre de convergence de la suite.

Exercice 9.4.12

On se propose d'approcher $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ en calculer les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ où f est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}$.

1. Séparer les 2 racines de racines de $f(x) = 0$ (i.e. indiquer 2 intervalles disjoints qui contiennent chacun une et une seule racine). En particulier, montrer qu'il y a une racine α comprise entre 0 et 1.
2. Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par

$$g(x) = \frac{x(9x^4+5)}{3(5x^4+1)}$$

   (a) Faire l'étude complète de la fonction g et la comparer à l'identité.

   (b) Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = g(x_n), \ x_0 \in]0;1[.$$

   Al'aide des graphe de g et de l'identité sur $[0;1]$, dessiner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence.

   (c) Justifier mathématiquement la convergence observée graphiquement.

   (d) Calculer l'ordre de convergence de la suite.

   (e) Écrire l'algorithme défini par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui permet de déterminer $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ à une précision de ε.
3. Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction f.
4. Entre la méthode de Newton et la méthode de point fixe $x_{k+1} = g(x_k)$, quelle est la plus efficace ? Justifier la réponse.

1.3.10 Exercices sans solutions

Exercice 9.4.13

Soit la fonction réelle d'une variable réelle donnée par $f(x) = 2x^3 - x - 2$, on se propose de trouver les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton.

1. Montrer que f possède une seule racine réelle $\alpha \in [1,2]$.
2. En utilisant la méthode Newton, déterminer une approximation de la racine α à 10^{-6} près.

Exercice 9.4.14

On considère l'équation $x(1+e^x) = e^x$.

1. Montrer que cette équation admet une racine unique α dans $[0,1]$.
2. Écrire la méthode de Newton pour approcher la racine de cette équation en faisant un bon choix de l'initialisation x_0.

Exercice 9.4.15

En utilisant la formule de Taylor, imaginer un algorithme modifiant la méthode de Newton et assurant une convergence quadratique dans le cas d'une racine multiple de f.

Exercice 9.4.16

Utiliser la méthode de Newton pour résoudre l'équation $e^x - 2 = x$, $x > 0$. Justifier la convergence et donner une majoration théorique de l'erreur. Combien d'itérations sont-elles nécessaires pour avoir une précision de 10^{-6} en prenant $x_0 = 1$. Peut-on choisir $x_0 = 0$?

Exercice 9.4.17

A la main, calculer un encadrement à 0,1 près de $\sqrt{3}$. Idem avec $\sqrt[3]{2}$.

Exercice 9.4.18

Calculer une approximation des solutions de l'équation $x^3 + 1 = 3x$.

Exercice 9.4.19

Calculer une approximation de la solution de l'équation ($\cos x = 0$) sur $[0,\pi]$. Idem avec ($\cos x = 2\sin x$).

Exercice 9.4.20

Étudier l'équation ($\exp(-x) = -\ln(x)$). Donner une approximation de la (ou des) solution(s) et une majoration de l'erreur correspondante.

1. A la calculette, calculer les trois premières étapes pour une approximation de $\sqrt{5}$, sous forme de nombres rationnels. Idem avec $\sqrt[5]{2}$.
2. Calculer une approximation des solutions de l'équation $x^3 + 1 = 3x$.
3. Calculer n de sorte que $u_n - \sqrt{10} \leqslant 10^{-f}$ (avec $u_0 = 4$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$, $a = 10$).

Exercice 9.4.21

On considère l'équation non linéaire

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 = 0$$

sur l'intervalle [-1,1].

1. Montrer que la fonction f admet un zéro dans [-1,1] et qu'il est unique.
2. Ecrire la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$. Quel est l'ordre de convergence de cette méthode ? Justifier la réponse.
3. Proposer une méthode d'ordre 2 pour la résolution de l'équation donnée.

Exercice 9.4.22

Soit α une racine double de la fonction f :

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \text{ et } f^{(2)}(\alpha) \neq 0.$$

En tenant compte du fait qu'on peut écrire la fonction f comme

$$f(x) = (x-\alpha)^2 h(x) \text{ où } h(\alpha) \neq 0,$$

vérifier que la méthode de Newton pour l'approximation de la racine α est seulement d'ordre 1.

On considère la méthode de Newton modifiée suivante :

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Vérifier que cette méthode est d'ordre deux si l'on veut approcher α.

Exercice 9.4.23

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 7$. Pour calculer la solution de $f(x) = 0$ dans $[0,10]$ par la méthode de Newton, on définit une suite $(x_n)_n$ de la forme $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donner l'expression de la fonction g

Exercice 9.4.24

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2e^x + 3\sqrt{x}$. Pour calculer la solution de $f(x) = 0$ dans $[0,10]$ par la méthode de Newton, on définit une suite $(x_n)_n$ de la forme $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donner l'expression de la fonction g

1.3.11 Solutions des exercices

Solution de l'exrcice 9.4.1

On cherche une approximation de la racine de l'équation $f(x) = x^2 - 2 = 0$ dans l'intervalle $[1,3]$. Pour donner une approximation de cette racine par la méthode de Newton, on considère la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{1}{2}x_k + \dfrac{1}{x_k} \end{cases}$$

à partir de cette suite, nous obtenons le tableau suivant :

n	0	1	2	3
x_n	2.000	1.5000	1.4167	1.4142

On obtient ainsi, 1.4142, une approximation de la solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$.

Solution de l'exrcice 9.4.2

1. On considère la fonction $f(x) = \ln x + x$. Cette fonction est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus on a

   $$f'(x) = \frac{1+x}{x} > 0, \quad \forall x > 0,$$

   et par conséquent, elle est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Or $f(0^-)/f(+\infty) < 0$, donc l'équation $x = \ln(\frac{1}{x})$ admet une racine réelle unique $\alpha \in]0,+\infty[$.

2. Puisque $f(1) > 0$ et $f(0^-) < 0$ alors $\alpha \in]0,1[$.

3. Pour donner une approximation de cette solution par la méthode de Newton, on considère la suite suivante :

   $$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n(1-\ln x_n)}{1+x_n} \end{cases}$$

   à partir de cette suite, nous obtenons le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
x_n	1.000000	0.500000	0.564382	0.567139	0.567143

On obtient ainsi, 0.567143, une approximation de la solution de l'équation $x + \ln x = 0$.

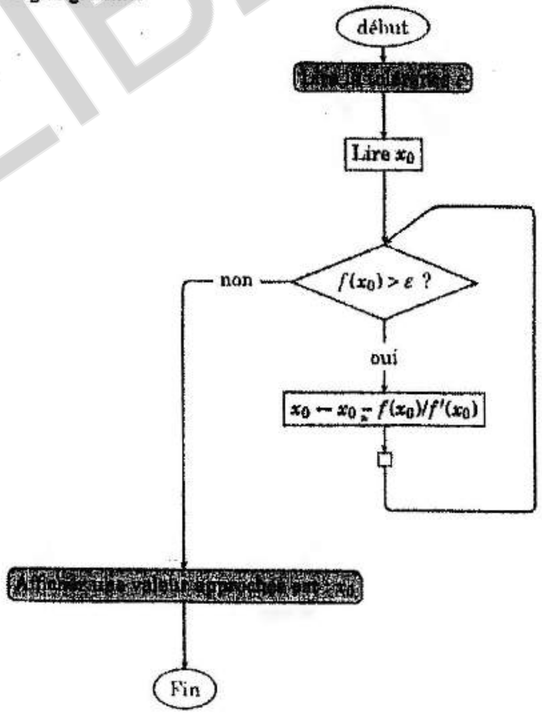
Solution de l'exrcice 9.4.3

Les différentes étapes pour approcher la solution d'une équation en utilisant la méthode de newton sont

1. Saisir la tolérence, ε, la fonction, f, ainsi que sa dérivée, f'.
2. calculer $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.
3. Si $f(x_1) < \varepsilon$ alors on affiche la valeur de x_1, c'est l'approximation de la solution demandée.
4. Sinon on range x_1 dans x_0 ($x_0 \leftarrow x_1$), puis on retourne à l'étape 2.

Ces différentes étapes peuvent être organisées dans un organigramme.

Organigramme



Nous allons donné l'algorithme de newton pour approcher la solution de l'équation $f(x)=0$, il est le mieux adapté pour la programmation qu'un organigramme.

Algorithme de la méthode de Newton

Saisir x_0, ε, $f : [a,b] \to IR$ tel que $f'(x) \neq 0$

tantque $|f(x_0)| > \varepsilon$ faire

$$x_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

fin tant que

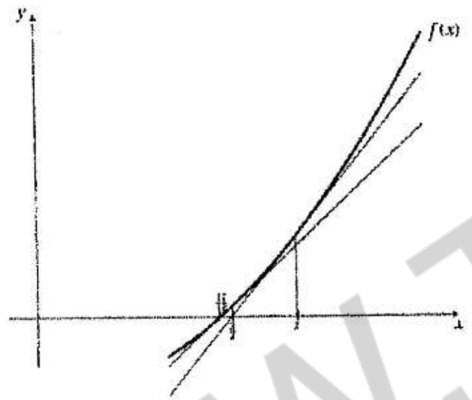
Solution de l'exrcice 9.4.4

La suite définie par la méthode de Newton, pour approcher la solution de l'équation $f(x)=0$, est donnée par

$$\begin{cases} x_0 & \text{donnée} \\ x_{k+1} & = \quad x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$$

dans notre cas, on a

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 3}{2x_k} = \frac{1}{2}x_k + \frac{3}{2x_k}$$



	x_0	x_1	x_2	x_3
Newton	2	1,7500	1,732	1,732

Solution de l'exrcice 9.4.5

1. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle. On supposons f est de classe C^1 et $f'(\alpha) \neq 0$ (c'est-à-dire α est une racine simple de l'équation $f(x)=0$). La méthode de Newton permet de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour approcher la racine de cette équation. Cette construction se réalise de la façon suivante. On considère l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point $(x_0, f(x_0))$, donnée par

$$(\Delta_1) \quad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Cette tangente coupe l'axe (O,x) au point $(x_1, 0)$

$$\Delta_1 \cap (O,x) = \{(x_1, 0)\}$$

avec

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On considère ensuite l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point $(x_1, f(x_1))$, donnée par

$$(\Delta_2) \quad y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1).$$

Cette tangente coupe l'axe (O,x) au point $(x_2, 0)$

$$\Delta_2 \cap (O,x) = \{(x_2, 0)\}$$

avec

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

On réitère ce procédé, on obient la suite suivante

$$\begin{cases} x_0 & \text{donnée} \\ x_{k+1} & = \quad x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$$

qui permet d'approcher la solution de l'équation $f(x)=0$.

2. Algorithme pour une convergence à $\varepsilon = 10^{-6}$

Début

Saisir : x_0, $f(x)$ et $f'(x) \neq 0$

$x_1 \leftarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

tantque $|x_1 - x_0| > 10^{-6}$ **faire**

$x_0 \leftarrow x_1$;

$x_1 \leftarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

fin tantque

écrire('la solution est :', x_1) ;

Fin.

3. Le terme générale de la suite des approximations de Newton est donné par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Il peut être mise sous la forme d'une itération de la méthode du point fixe

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

avec

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

$$g''(x) = \frac{f'^3(x)f''(x) + f(x)f'^2(x)f^{(3)}(x) - 2f(x)f'(x)f''^2(x)}{f'^4(x)}$$

Si α est une racine simple, c'est-à-dire si $f'(\alpha) \neq 0$, on trouve $g'(\alpha) = 0$ et $g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$, la méthode de Newton est donc d'ordre 2.
Si la racine α est de multiplicité $m > 1$ alors $f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$ et la suite de Newton sera

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - \alpha)^m h(x_n)}{m(x_n - \alpha)^{m-1}h(x_n) + (x_n - \alpha)^m h'(x_n)}$$

et

$$g(x) = x - \frac{(x-\alpha)^m h(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}h(x) + (x-\alpha)^m h'(x)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} = 1 - \frac{1}{m} \neq 0,$$

par suite $g'(\alpha) = 1 - \frac{1}{m}$ donc la méthode n'est que d'ordre 1. Si la valeur de m est connue à priori, on peut retrouver la convergence quadratique de la méthode de Newton en modifiant la méthode comme suit :

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Solution de l'exrcice 9.4.6

1. En partant de $I_0 = [a, b]$, la méthode de Dichotomie appelé aussi méthode de Lagrange produit une suite de sous-intervalles $I_k = [a_k, b_k]$, $k \geqslant 0$, avec $I_k \subset I_{k+1}$, $k \geqslant 1$, et tels que $f(a_k)f(b_k) < 0$. Dans notre cas on a

Début
$a \leftarrow 0$
$b \leftarrow 2$
$x \leftarrow b$
Tantque $|x^2 - 2| > 0.0001$ **faire**
  $x \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
  if $(a^2 - 2)(x^2 - 2) < 0$ **alors**
    $b \leftarrow x$
  sinon
    $a \leftarrow x$

fin si
Fin tant que
Fin.

Les approximations, par la méthode de dichotomie, de la racine de l'équation $x^2 - 2 = 0$ dans l'intervalle $[0, 2]$, sont données dans le tableau ci-dessous.

0	0.00000	1.00000	2.00000	–	$\mid -1.00000 \mid > 0.0001$	+	0.41421
1	1.00000	1.33333	2.00000	–	$\mid -0.22222 \mid > 0.0001$	+	0.08088
2	1.33333	1.40000	2.00000	–	$\mid -0.04000 \mid > 0.0001$	+	0.01421
3	1.40000	1.41176	2.00000	–	$\mid -0.00692 \mid > 0.0001$	+	0.00245
4	1.41176	1.41379	2.00000	–	$\mid -0.00119 \mid > 0.0001$	+	0.00042
5	1.41379	1.41414	2.00000	–	$\mid -0.00020 \mid > 0.0001$	+	0.00007
6	1.41414	1.41420	2.00000	–	$\mid -0.00004 \mid < 0.0001$	+	0.00001

2. La méthode de Newton, pour approcher la solution d'une équation, est un cas particulier de la méthode du point fixe, avec comme fonction d'itération $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ ce qui donne l'algorithme suivant

Début
$x_0 \leftarrow 1.00000$
tantque $|x_0^2 - 2| > 10^{-4}$ **faire**
  $x_0 \leftarrow \frac{x_0}{2} + \frac{1}{x_0}$
fin tanque
écrire('la solution est',x_0)
Fin.

Les approximations, par la méthode de Newton, de la racine de l'équation $x^2 - 2 = 0$ dans l'intervalle $[0, 2]$, sont données dans le tableau ci-dessous.

k	x_k	$f(x_k)$	$\mid x_k - \sqrt{2} \mid$
0	1.00000	$\mid -1.00000 \mid > 0.0001$	0.41421
1	1.50000	$\mid 0.25000 \mid > 0.0001$	0.08579
2	1.41667	$\mid 0.00695 \mid > 0.0001$	0.00246
3	1.41422	$\mid 0.00002 \mid < 0.0001^*$	0.00001

Solution de l'exrcice 9.4.7

1. Étude de la fonction g défine de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

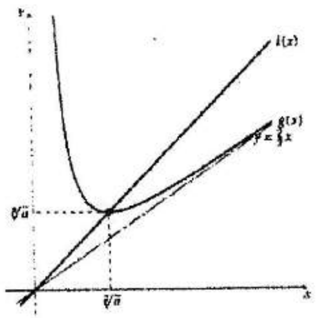
$$g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2}$$

- $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$;
- $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{2}{3}$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) - \frac{2}{3}x = 0$ donc $y = \frac{2}{3}x$ est un asymptote ;

- $g'(x) = \frac{2}{3x^3}(x^3 - 3)$;
- g est croissante sur $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$, décroissante sur $]0, \sqrt[3]{a}]$;
- $x = \sqrt[3]{a}$ est un minimum absolu et $g(\sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a}$

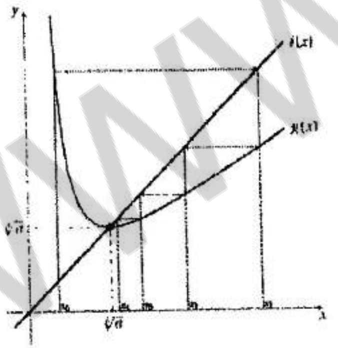
x	0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt[3]{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Les Graphes de la fonction g et celui de la fonctio $i(x) = x$, voir la figure suivante, ils se coupent en un seul point. On vérifie analytiquement qu'il existe une et une seule intersection entre la courbe d'équation $y = g(x)$ et la droite d'équation $y = x$:



$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2} = x \Leftrightarrow x^3 = 2$$

3. Étude graphique de la convergence de la méthode de point fixe : voir la figure



4. On en déduit que pour tout $x > 0$ on a $g(x) \geqslant \sqrt[3]{a}$ Donc, pour tout $k > 0$, $x_k = g(x_{k-1}) \geqslant \sqrt[3]{a}$. Vérifions les hypothèses du théorème de point fixe qui fournit une condition suffisante de convergence de la suite
   (a) pour tout x dans $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$ on a $g(x) > \sqrt[3]{a}$ donc $g([\sqrt[3]{a}, +\infty[) \subset [\sqrt[3]{a}, +\infty[$ (i.e. l'intervalle $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$ est stable) ;
   (b) $g \in C^1([\sqrt[3]{a}, +\infty[)$;
   (c) pour tout x dans $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$ on a
   $$|g'(x)| = |\frac{2}{3}(1 - \frac{a}{x^3})| < 1$$
   donc g est contractante.
   Alors la méthode converge vers α point fixe de g . De plus, pour tout $\alpha \in [\sqrt[3]{a}, +\infty[$ on a
   $$\alpha = g(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{a}$$
   la méthode permet donc de calculer de façon itérative la racine cubique de a.

5. Étant donné que
$$g'(\alpha) = 0 \text{ et } g''(\alpha) = \frac{2a}{\alpha^4} \neq 0$$
la méthode de point fixe converge avec l'ordre 2.

Algorithme

Début
Saisir $x_0 > 0$;
$x_1 \leftarrow g(x_0)$;
tantque $|x_1 - x_0| > 10^{-6}$ **faire**
  $x_0 \leftarrow x_1$;
  $x_1 \leftarrow g(x_0)$
fin tantque
écrire(l'approximation de la racine est :',x_1) ;
fin.

6. Algorithme de point fixe : Une remarques à propos du critère d'arrêt basé sur le contrôle de l'incrément. Les itérations s'achèvent dès que $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$; on se demande si cela garantit-t-il que l'erreur absolue e_{k+1} est elle aussi inférieur à ε ? L'erreur absolue à l'itération $(k+1)$ peut être évaluée par un développement de Taylor au premier ordre
$$e_{k+1} = |g(\alpha) - g(x_k)| = |g'(z_k) - 1)e_k|$$
avec z_k compris entre α et x_k. Donc
$$|x_{k+1} - x_k| = |e_{k+1} - e_k| = |g'(z_k) - 1|e_k = |g'(\alpha) - 1|e_k$$
Puisque $g'(\alpha) = 0$, on a bien $|x_{k+1} - x_k| \simeq e_k$

7. La suite définie par la méthode de Newton pour approcher la solution de l'équation $f(x) = x^3 - a$, elle s'écrit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2} = \frac{2}{3} + \frac{a}{3x_k^2}$$

Elle est convergente et son ordre de convergence égale à 2 (lorsque la racine est simple).

Solution de l'exrcice 9.4.8

1. Deux méthodes (équivalentes) sont possibles pour démontrer ce résultat.
Méthode 1 : La fonction $g : x \mapsto e^{-ax}$ est monotone décroissante,

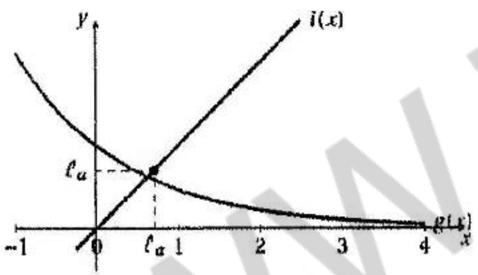
$$\lim_{x\to-\infty} e^{-ax} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{-ax} = 0;$$

par conséquente elle intersecte la droite d'équation $y = x$ une et une seule fois. Notons ce point l_a Comme la fonction $g : x \mapsto e^{-ax}$ est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$ tandis que la fonction $x \mapsto x$ est positive si et seulement si $x > 0$, on en déduit que $l_a > 0$. **Méthode 2** : La fonction $f : x \mapsto e^{-ax} - x$ est monotone décroissante,

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-ax} - x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{-ax} - x = -\infty;$$

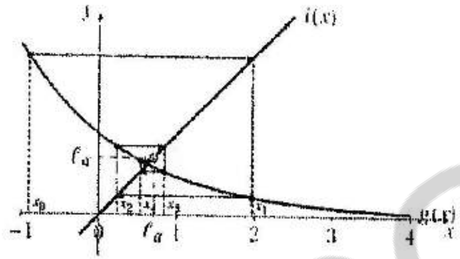
par le théorème des valeurs intermédiaires on conclut qu'il existe un et un seul $l_a \in \mathbb{R}$ tel que $f(l_a) = 0$. Comme $f(0) > 0$, on peut appliquer à nouveau le théorème des valeurs intermédiaires à l'intervalle $]0,1[$ et en déduire que $l_a > 0$. De plus, comme $f(1) < e^{-1} - 1 < 0$, on peut conclure que $l_a n]0;1[$.

2. Le graphe de la fonction g est celui en figure.



(a) Graphe de g comparé au graphe de $i(x) = x$.

FIGURE 1.1 –



(b) Étude graphique de la convergence de la méthode de point fixe.

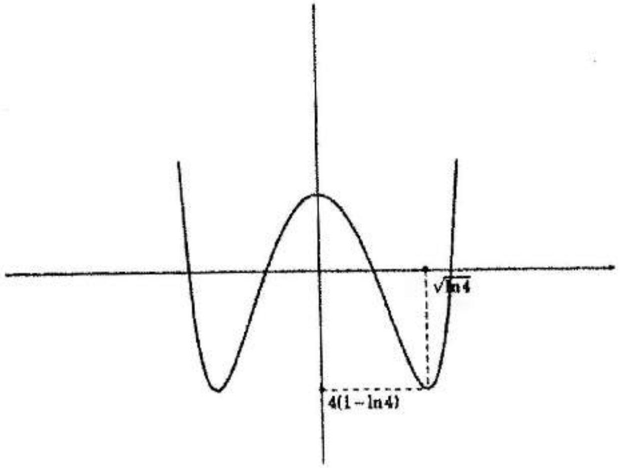
On en déduit que
- la suite $(u_n)_n$ converge pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$;
- $g(\mathbb{R}) =]0,+\infty[$, $g(]0,+\infty[) =]0,1[$ ainsi $u_1 \in]0,+\infty[$ et $u_n \in]0,1[$ pou tout $n > 1$
- la convergence n'est pas monotone : la sous-suite des termes d'indice pair est monotone croissante tandis que la sous-suite des termes d'indice impair est monotone décroissante (ce qui veut dire d'une part qu'on ne pourra pas utiliser les théorèmes du type (monotone plus bornée entraine la convergente) pour prouver la convergence, d'autre part on voit aussi que ni l'intervalle $[l_a;+\infty[$ ni l'intervalle $[0;l_a]$ sont stables);
- $|g'(x)|$ n'est pas bornée pour tout $x \in \mathbb{R}$ (croissance exponentielle à $-\infty$). Plus particulièrement, $|g'(x)| < 1$ si et seulement si $e^{ax} > a$ si et seulement si $x < \ln a/a$. Comme $0 < a < 1$, on conclut que $|g'(x)| < 1$ pour tout $x > 0$.

Solution de l'exrcice 9.4.9

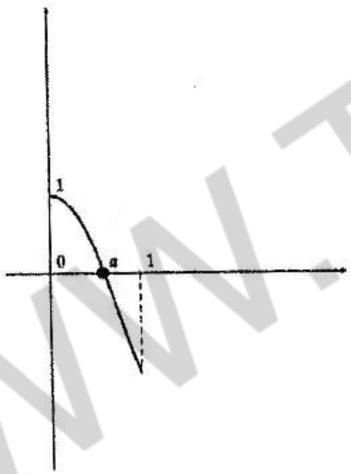
On considère la fonction $f(x) = exp(x^2) - 4x^2$, nous allons faire une brève étude de cette fonction.

1. On remarque que $f(-x) = f(x)$, la fonction est donc paire. Nous allons faire l'étudié de cette fonction sur $[0,+\infty[$
   - $f(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   - $f'(x) = 2xexp(x^2) - 8x$.
   - $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \sqrt{\ln 4}$ et on a $f(0) = 1$ et $f(\sqrt{\ln 4}) = 4(1 - ln4) < 0$, f est croissante pour $x > \sqrt{\ln 4}$ et décroissante pour $0 < x < \sqrt{\ln 4}$. Par suite l'équation $f(x) = exp(x^2) - 4x^2 = 0$ admet
   - une racine dans l'intervalle $]-\infty, -\sqrt{\ln 4}[$,
   - une racine dans l'intervalle $]-\sqrt{\ln 4}, 0[$

- une racine dans l'intervalle $]0, \sqrt{\ln 4}[$,
- une racine dans l'intervalle $]\sqrt{\ln 4}, +\infty[$.



2. Puisque $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = e - 4 < 0$, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Puisque $f'(x) = 2x exp(x^2) - 8x = 2x(exp(x^2) - 2^2) < 2x(e - 4) < 0$ pour tout $x \in]0,1[$, on en déduit que α est unique (Voir figure).



3. Étude de la convergence de la méthode
   (a) pour tout x dans $]0,1[$ on a
   $$0 < \sqrt{\frac{exp(x^2)}{2}} < \sqrt{\frac{e}{4}} < 1$$
   donc $\Phi :]0,1[\to]0,1[$;

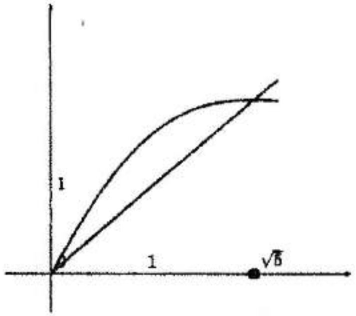
   (b) $\Phi \in C^1(]0,1[)$
   (c) Pour tout x dans $]0,1[$ on a
   $$|\Phi'(x)| = |\frac{x\sqrt{exp(x^2)}}{2} = x\Phi(x)| < |x| < 1$$
   donc la fonction Φ est contractante sur l'intervalle $]0,1[$. Par suite la méthode des approximations successive converge vers α, point fixe de Φ. De plus, pour tout $\alpha \in]0,1[$,
   $$\Phi(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow 2\alpha = \sqrt{exp(\alpha^2)} \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$$
   donc α, point fixe de Φ, est une racine de l'équation $f(x) = 0$.
   Puisque
   $$\Phi'(\alpha) = \alpha\Phi(\Phi) = \alpha^2 \neq 0$$
   la méthode de point fixe ou (des approximation succeves) converge seulement à l'ordre 1.
   (d) La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Ici donc elle s'écrit
   $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{exp(x_k^2) - 4x_k^2}{2x_k(exp(x_k^2) - 4)}$$
   (e) Puisque α est une racine simple de f , la méthode de Newton converge à l'ordre 2 tandis que la méthode de point fixe converge seulement à l'ordre 1 : la méthode de Newton est donc plus efficace.

Solution de l'exrcice 9.4.10

1. Supposons qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = l$
   - Par définition de convergence on a $l = \frac{10l}{l^2+5}$, et par conséquent $l \in \{-\sqrt{5}, 0, +\sqrt{5}\}$.
   - On prouve par récurrence que
     - si $x_0 = 0$ alors $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $l = 0$,
     - si $x_0 > 0$ alors $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $l \geq 0$,
     - si $x0 < 0$ alors $x_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $l \leq 0$.

   Comme $x_0 = 1 > 0$, alors $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $l \in \{0, \sqrt{5}\}$.
2. Soit la fonction g définie sur $[1, \sqrt{5}]$ par $g(x) = \frac{10x}{x^2+5}$. L'étudie la fonction g donne.
   - $g(x) > 0$ pour tout $x \in [1, \sqrt{5}]$.
   - $g(1) = \frac{5}{3}$, $g(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$.
   - $g'(x) = -10\frac{x^2-5}{(x^2+5)^2}$.
   - g est croissante sur $[1, \sqrt{5}]$ et $g'(\sqrt{5}) = 0$

   Graphe de g comparé au graphe de $i(x) = x$



On vérifie analytiquement qu'il existe une et une seule intersection entre la courbe d'équation $y = g(x)$ et la droite d'équation $y = x$ dans $[1; \sqrt{5}]$:

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{10x}{x^2+5} = x \Leftrightarrow x^2 = 5$$

3. On a $g(x) \in [5/3; \sqrt{5}]$ pour tout $x \in [1; \sqrt{5}]$ et on a vu Précédemment que g est croissante sur l'intervalle $[1; \sqrt{5}]$ et $g(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$. De plus, $g(x) \geqslant x$ car

$$g(x) = \frac{10x}{x^2+5} > \frac{10x}{(\sqrt{5})^2+5} = x$$

par conséquent la suite (x_k), $x_{k+1} = g(x_k)$, est croissante.
Comme $g(x) \leqslant \sqrt{5}$ alors la suite $x_{k+1} = g(x_k) \leqslant \sqrt{5}$ est bornée. On a ainsi une suite croissante et majorée, ce qui implique qu'elle converge. Or on a montré que si elle converge vers l alors $l \in (0, \sqrt{5}]$, on conclut que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{5}$.

Remarque

On ne peut pas utiliser le théorème de point fixe pour prouver la convergence de la suite sur l'intervalle $[1; \sqrt{5}]$. En effet

- g est au moins de classe $C^1([1; \sqrt{5}])$.
- $g([1; \sqrt{5}]) = [5/3; \sqrt{5}] \subset [1; \sqrt{5}]$
- mais $0 \leqslant g'(x) < 1$ si et seulement si $x \in [\sqrt{-10+5\sqrt{5}}; \sqrt{5}]$ (et on a $\sqrt{-10+5\sqrt{5}} > 1$).

En revanche, on peut utiliser le théorème de point fixe pour prouver la convergence de la suite sur l'intervalle $[5/3, \sqrt{5}]$ car

- g est au moins de classe $C^1([5/3; \sqrt{5}])$
- $g([5/3; \sqrt{5}]) \subset [5/3; \sqrt{5}]$.
- $0 \leqslant g'(x) < 1$ pour tout $x \in [5/3; \sqrt{5}]$

4. Comme $g'(\sqrt{5}) = 0$ et $g''(\sqrt{5}) \neq 0$, la méthode de point fixe associée à la fonction d'itérat g est d'ordre 2.

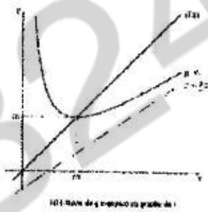
Solution de l'exrcice 9.4.11

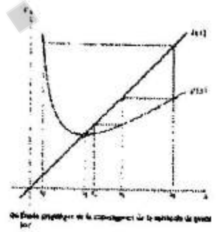
1. Étude de la fonction g de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x^3+4x^2+10}{3x^2+8x}$
   - $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$;

   - $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
     $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{2}{3}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - \frac{2}{3}x) = -\frac{4}{9}$ donc $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{9}$ est un asymptote ;
   - $g'(x) = \dfrac{2(3x+4)(x^3+4x^2-10)}{x^2(3x+8)^2}$.
   - g est croissante sur $[m, +\infty[$, décroissante sur $[0, m]$ où $m \approx 1,36$;
   - $x = m$ est un minimum absolu et $g(m) = m$.

x	0	m	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$ ↘	m	↗ $+\infty$

2. Graphe de g comparé au graphe de $i(x) = x$





. On vérifie analytiquement qu'il existe une et une seule intersection entre la courbe d'équation $y = g(x)$ et la droite d'équation $y = x$

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x^3+4x^2+10}{3x^2+8x} = x \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 10 = 0 \Leftrightarrow x = m \Leftrightarrow f(x) = 0$$

3. Pour l'étude graphique de la convergence de la méthode de point fixe voir la figure
4. On en déduit que pour tout $x > 0$ on a $g(x) \geqslant m$. Donc, pour tout $k > 0$, $x_k = g(x_{k-1}) \geqslant m$.
   Pour étudier la convergence de la méthode vérifions si on peut appliquer le théorème de point fixe
   (a) pour tout x dans $[m, +\infty[$ on a $g(x) > m$ donc $g([m, +\infty[) \subset [m, +\infty[$;
   (b) $g \in C^1([m, +\infty[)$;
   (c) pour tout x dans $[m, +\infty[$, on a $|g'(x)| = |\frac{(6x^2+8x)-g(x)(6x+8)}{3x^2+8x}| < 1$ alors g est contractante.
   Si les conditions précédentes sont vérifiées alors la méthode converge vers m point fixe de g . De plus, pour tout $\alpha \in [m, +\infty[$: $\alpha = g(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = m$ donc le point fixe de g est racine de f .
   (d) Algorithme de point fixe : Calcul de $x = g(x)$
   Require : $x_0 > 0$
   Require : $g : x \to g(x)$

while $|x_{k+1}-x_k|>\varepsilon$ do

$x_{k+1}\leftarrow g(x_k)$

end while

5. La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. Ici donc elle s'écrit

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3+4x_k^2-10}{3x_k^2+8x_k}=g(x_k)$$

autrement dit la méthode de point fixe assignée est la méthode de Newton.

6. Étant donné que la méthode de point fixe donnée est la méthode de Newton et que la racine m de f est simple, elle converge à l'ordre 2.
Quelques remarques à propos du critère d'arrêt basé sur le contrôle de l'incrément. Les itérations s'achèvent dès que $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$; on se demande si cela garantit-t-il que l'erreur absolue e_{k+1} est elle aussi inférieur à ε. L'erreur absolue à l'itération $(k+1)$ peut être évaluée par un développement de Taylor au premier ordre

$$e_{k+1}=|g(\alpha)-g(x_k)|=|g'(z_k)e_k|$$

avec z_k compris entre m et x_k. Donc

$$|x_{k+1}-x_k|=|e_{k+1}-e_k|=|g'(z_k)-1|e_k\approx|g'(m)-1|e_k.$$

Puisque $g'(x)=2\frac{3x+4}{x^2(3x+8)^2}f(x)$, alors $g'(m)=0$ donc on a bien $|x_{k+1}-x_k|\approx e_k$, par suite l'ordre de convergence de la suite est 1.

Solution de l'exrcice 9.4.12

1. La fonction f est paire. Comme $f'(x)=4x^3$, f est croissante pour $x>0$ et décroissante pour $x<0$; puisque $f(0)<0$ et $f(-1)=f(1)>0$, on conclut qu'il n'y a que deux racines réelles distinctes : $\alpha\in]0;1[$ et $-\alpha\in]-1;0[$.
2. L'étude la fonction $g(x)=\frac{x(9x^4+5)}{3(5x^4+1)}$ pour $x\geqslant 0$.

(a) $g(x)\geqslant 0$ pour tout $x\geqslant 0$ et $g(x)=0$ si et seulement si $x=0$;

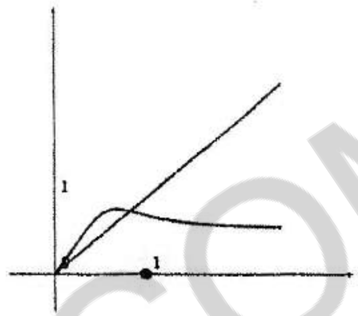
(b)
$$g'(x)=\frac{5(9x^8-6x^4+1)}{3(5x^4+1)^2}=\frac{5}{3}(\frac{3x^4-1}{5x^4+1})^2$$

donc $g'(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in]0;1[$ et $g'(x)=0$ si et seulement si $x=\sqrt[4]{13}$. De plus, $g(\sqrt[4]{13})=\sqrt[4]{13}$.

(c) Enfin,
$$g''(x)=\frac{10}{3}\frac{3x^4-1}{5x4+1}\frac{32x^3}{(5x4+1)^2}=\sqrt{\frac{20}{3}g'(x)}\frac{32x^3}{(5x4+1)^2}.$$

Donc $g''(x)=0$ si et seulement si $x=0$ ou $x=\sqrt[4]{13}$, g est concave pour $x\in]0,\sqrt[4]{13}[$, convexe pour $x>\sqrt[4]{13}$.

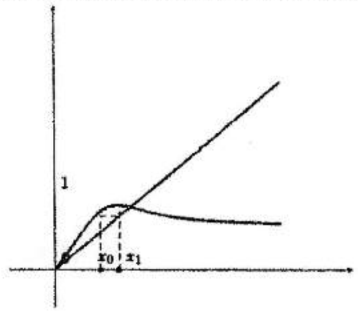
(d) La omparaison du graphe de g et celui de la fonction $i(x)=x$ pour $x\in[0;1]$ est donnée par.



(e) On vérifie analytiquement qu'il existe une et une seule intersection entre la courbe d'équation $y=g(x)$ et la droite d'équation $y=x$ dans l'intervalle $]0,1]$

$$\begin{aligned} g(x)=x &\Leftrightarrow \frac{x(9x^4+5)}{3(5x^4+1)}=x\\ &\Leftrightarrow 9x^4+5=3(5x^4+1)\\ &\Leftrightarrow x^4=\frac{1}{3}\\ &\Leftrightarrow x=0\end{aligned}$$

(f) Pour l'étude graphique de la convergence de la méthode de point fixe.



(g) Étude de la convergence de cette méthode. On remarque que

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{9x_k^4+5}{3(5x_k^4+1)}>1\Leftrightarrow x_k<\sqrt[4]{13}$$

donc la suite récurrente

$$\begin{cases} x_0\in]0,\sqrt[4]{13}[\\ x_{k+1}=g(x_k)\end{cases}$$

est monotone (croissante) et majorée par $\sqrt[4]{13}$. Elle est donc convergente vers $l\leqslant\sqrt[4]{13}$. Comme $l=g(l)$ si et seulement si $l=\sqrt[4]{13}$. on conclut qu'elle converge vers $\sqrt[4]{13}$ De même, la suite récurrente

$$\begin{cases} x_0\in]-\sqrt[4]{13},0[\\ x_{k+1}=g(x_k)\end{cases}$$

est monotone décroissante et minoré par $\sqrt[4]{13}$. Elle est donc convergente vers $l \leq \sqrt[4]{13}$. Comme $l = g(l)$ si et seulement si $l = \sqrt[4]{13}$ on conclut qu'elle converge vers $\sqrt[4]{13}$.

Par conséquent, quelque soit le point initiale, la méthode de point fixe donnée converge vers $\sqrt[4]{13}$ point fixe de g (et racine de f).

Soulignons qu'on ne peut pas utiliser le théorème de point fixe pour prouver la convergence de la méthode car g n'est pas contractante sur $[0;1]$. En effet, dans $[0;1]$ on a

$$\begin{aligned} |g'(x)| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad g'(x) < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 5(3x^4-1)^2 < 3(5x^4+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 15x^8 + 30x^4 - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^4 > 1 + \sqrt{\tfrac{15}{16}} \in]0,1[. \end{aligned}$$

(h) Si on pose $\alpha = \sqrt[4]{13}$ alors $g(\alpha) = \alpha$, $g'(\alpha) = 0$, $g''(\alpha) = 0$ et $g'''(\alpha) = |320\alpha^3 \frac{25\alpha^8 - 22\alpha^4+1}{(5\alpha^4+1)^4} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$. On conclut que la suite converge à l'ordre 3.

(i) Algorithme de point fixe

Calcul de $x = g(x)$

```
Début
saisir x0 > 0
saisir : g : x → g(x).
x1 ← g(x0);
tantque |x1 − x0| > ε faire
    x0 ← x1 ;
    x1 ← g(x1);
fin tantque;
écirire('l'approximation est :', x1);
Fin.
```

3. Entre la méthode de Newton et la méthode de point fixe $x_{k+1} = g(x_k)$, la plus efficace est la méthode de point fixe $x_{k+1} = g(x_k)$ car elle est d'ordre 3 tandis que celle de Newton n'est que d'ordre 2.

1.4 Méthode de la sécante ou de Lagrange

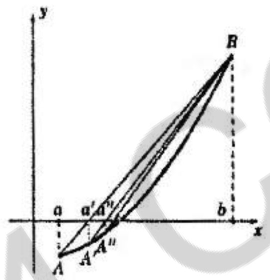
1.4.1 Principe de la sécante

L'idée de la méthode de la sécante est : pour une fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$, et vérifiant $f(a) \leq 0$, $f(b) > 0$, on trace le segment $[AB]$ où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Si le segment reste au-dessus du graphe de f alors la fonction s'annule sur l'intervalle $[a', b]$ où $(a_1, 0)$ est le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses.

$$a' = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a).$$

La droite (AB) s'appelle la sécante. On recommence ce procédé, en partant maintenant de l'intervalle $[a', b]$ pour obtenir une valeur a''.

$$a'' = a' - \frac{b-a'}{f(b)-f(a')} f(a').$$



On réitère cet algorithme pour obtenir une suite susceptible de converger vers la solution de l'équation $f(x) = 0$. Cette méthode est aussi appelée méthode de la fausse position.

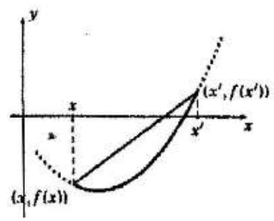
1.4.2 Convergence de la méthode de la sécante

Proposition 8.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et convexe telle que $f(a) \leq 0$, $f(b) > 0$. Alors la suite définie par

$$a_0 = a \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = a_n - \frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)} f(a_n)$$

est croissante et converge vers la solution ℓ de l'équation $f(x) = 0$.

L'hypothèse f convexe signifie exactement que pour tout x, x' dans $[a,b]$, la sécante (ou corde) entre $(x, f(x))$ et $(x', f(x'))$ est au-dessus du graphe de f.



Démonstration.

1. Justifions d'abord la construction de la suite récurrente.
   L'équation de la droite passant par les deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

$$y = (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(a)$$

Cette droite intersecte l'axe des abscisses en $(a_1, 0)$ qui vérifie donc

$$0 = (a_1 - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a),$$

donc

$$a_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a).$$

2. Croissance de (a_n).

Montrons par récurrence que $f(a_n) \leqslant 0$. C'est vrai au rang 0 car par hypothèse on a $f(a_0) = f(a) \leqslant 0$. Supposons vraie l'hypothèse $f(a_n) \leqslant 0$ au rang n. Si $a_{n+1} < a_n$ (un cas qui s'avérera a posteriori jamais réalisé), alors comme f est strictement croissante, on a $f(a_{n+1}) < f(a_n)$, et en particulier $f(a_{n+1}) \leqslant 0$. Sinon $a_{n+1} \geqslant a_n$. Comme f est convexe : la sécante entre $(a_n, f(a_n))$ et $(b, f(b))$ est au-dessus du graphe de f. En particulier le point $(a_{n+1}, 0)$ (qui est sur cette sécante par définition a_{n+1}) est au-dessus du point $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$, et donc $f(a_{n+1}) \leqslant 0$ aussi dans ce cas, ce qui conclut la récurrence.

Comme $f(a_n) \leqslant 0$ et f est croissante, alors par la formule $a_{n+1} = a_n - \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n)$, on obtient que $a_{n+1} \geqslant a_n$.

3. Convergence de (a_n). La suite (a_n) est croissante et majorée par b, donc elle converge. Notons ℓ sa limite. Par continuité

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(\ell).$$

Comme pour tout n, $f(a_n) \leqslant 0$, on en déduit que $f(\ell) \leqslant 0$. En particulier, comme on suppose $f(b) > 0$, on a $\ell < b$. Comme

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n \to +\infty} f(a_{n+1}) = f(\ell).$$

L'égalité $a_{n+1} = a_n - \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n)$ devient à la limite (lorsque $n \to +\infty$) :

$$\ell = \ell - \frac{b - \ell}{f(b) - f(\ell)} f(\ell),$$

ce qui implique $f(\ell) = 0$.

Conclusion la suite (a_n) converge vers la solution de l'équation $f(x) = 0$.

□

Ainsi présentée, cette méthode est mise en défaut si par exemple le réel x_1 est de l'autre côté de la racine. C'est le cas si on suppose que f est concave. Une variante de la méthode précédente est de construire x_{n+1} non pas seulement à l'aide de x_n et de b, mais à l'aide des deux points précédents, x_n et x_{n-1}. Autrement, la suite est cette fois définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

L'initialisation nécessite deux points x_0 et x_1, proches, si possible, de la solution.

1.4.3 Exemple

On utilise la méthode de la sécante pour approcher la racine du polynôme $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ contenue dans l'intervalle $[1, 2]$ (cette fonction est en effet continue et on a $f(1) = -1$ et $f(2) = 9$), avec une précision égale à 10^{-4}. Le tableau suivant donne les valeurs respectives des bornes a_k et b de l'intervalle d'encadrement, de l'approximation x_k de la racine et de $f(x_k)$ en fonction du numéro k de l'itération.

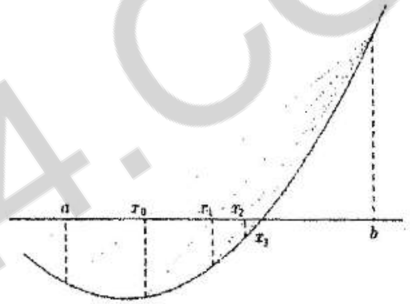


FIGURE 1.2 – Construction des premiers itérés de la méthode de la fausse position.

k	a_k	b	x_k	$f(x_k)$
0	1		2 1,1	-0,549
1	1,1	2	1,151744	-0,274401
2	1,151744	2	1,176841	-0,130742
3	1,176841	2	1,188628	-0,060876
4	1,188628	2	1,194079	-0,028041
5	1,194079	2	1,196582	-0,012852
6	1,196582	2	1,197728	-0,005877
7	1,197728	2	1,198251	-0,002685
8	1,198251	2	1,19849	-0,001226
9	1,19849	2	1,1986	-0,00056
10	1,1986	2	1,198649	-0,000255

Sous des hypothèses de régularité légèrement restrictives sur f, on peut établir le résultat de convergence suivant pour la méthode de la sécante appelée aussi méthode de la fausse position.

Théorème 5.
Soit f une fonction est strictement croissante, de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$, vérifiant

$f(a)f(b) < 0$, et soit $\alpha \in]a, b[$ l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. Alors, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de la sécante converge vers ξ. En notant

$$\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Le nombre d'or, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^{\rho}} = \text{existe}$$

C'est une convergence superlinéaire plus rapide due la convergence de la méhode de dichotomie, mais un peu moins rapide que la convergence quadratique de la méthode de Newton.

1.4.4 Résultats numériques pour $\sqrt{10}$

Pour $a = 3$, $b = 4$, $f(x) = x^2 - 10$, voici les résultats numériques, et aussi indiquée une majoration de l'erreur $\varepsilon_n = \sqrt{10} - a_n$.

$a_0 = 3$	$\varepsilon_0 \leq 0,1666\ldots$
$a_1 = 3,14285714285\ldots$	$\varepsilon_1 \leq 0,02040\ldots$
$a_2 = 3,16000000000\ldots$	$\varepsilon_2 \leq 0,00239\ldots$
$a_3 = 3,16201117318\ldots$	$\varepsilon_3 \leq 0,00028\ldots$
$a_4 = 3,16224648985\ldots$	$\varepsilon_4 \leq 3,28\ldots\cdot 10^{-5}$
$a_5 = 3,16227401437\ldots$	$\varepsilon_5 \leq 3,84\ldots\cdot 10^{-6}$
$a_6 = 3,16227723374\ldots$	$\varepsilon_6 \leq 4,49\ldots\cdot 10^{-7}$
$a_7 = 3,16227761029\ldots$	$\varepsilon_7 \leq 5,25\ldots\cdot 10^{-8}$
$a_8 = 3,16227765433\ldots$	$\varepsilon_8 \leq 6,14\ldots\cdot 10^{-9}$

1.4.5 Résultats numériques pour $(1,10)^{1/12}$

Voici les résultats numériques avec une majoration de l'erreur $\varepsilon_n = (1,10)^{1/12} - a_n$, avec $f(x) = x^{12} - 1,10$, $a = 1$ et $b = 1,1$

$a_0 = 1$	$\varepsilon_0 \leq 0,0083\ldots$
$a_1 = 1,00467633\ldots$	$\varepsilon_1 \leq 0,0035\ldots$
$a_2 = 1,00661950\ldots$	$\varepsilon_2 \leq 0,0014\ldots$
$a_3 = 1,00741927\ldots$	$\varepsilon_3 \leq 0,00060\ldots$
$a_4 = 1,00774712\ldots$	$\varepsilon_4 \leq 0,00024\ldots$
$a_5 = 1,00788130\ldots$	$\varepsilon_5 \leq 0,00010\ldots$
$a_6 = 1,00793618\ldots$	$\varepsilon_6 \leq 4,14\ldots\cdot 10^{-5}$
$a_7 = 1,00795862\ldots$	$\varepsilon_7 \leq 1,69\ldots\cdot 10^{-5}$
$a_8 = 1,00796779\ldots$	$\varepsilon_8 \leq 6,92\ldots\cdot 10^{-6}$

1.4.6 Calcul de l'erreur

La méthode de la sécante fournit l'encadrement $a_n \leq l \leq b$. Mais comme b est fixe cela ne donne pas d'informations exploitables pour $|l - a_n|$. Voici une façon générale d'estimer l'erreur, à l'aide du théorème des accroissements finis.

Proposition 9.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et ℓ tel que $f(\ell) = 0$. S'il existe une constante $m > 0$ telle que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \geq m$ alors

$$|x-\ell| \leq \frac{|f(x)|}{m} \qquad \text{pour tout } x \in I.$$

Démonstration. Par l'inégalité des accroissements finis entre x et ℓ : $|f(x) - f(\ell)| \geq m|x-\ell|$ mais $f(\ell) = 0$, d'où la majoration. □

Exemple 3 (Erreur pour $\sqrt{10}$). Soient $f(x) = x^2 - 10$ et l'intervalle $I = [3,4]$. Alors $f'(x) = 2x$ donc $|f'(x)| \geq 6$ sur I. On pose donc $m = 6$, $\ell = \sqrt{10}$, $x = a_n$. On obtient l'estimation de l'erreur :

$$\varepsilon_n = |\ell - a_n| \leq \frac{|f(a_n)|}{m} = \frac{|a_n^2 - 10|}{6}$$

Par exemple on a trouvé $a_2 = 3,16\ldots \leq 3,17$ donc $\sqrt{10} - a_2 \leq \frac{|3,17^2-10|}{6} = 0,489$.
Pour a_8 on a trouvé $a_8 = 3,1622776543347473\ldots$ donc $\sqrt{10} - a_8 \leq \frac{|a_8^2-10|}{6} = 6,14\ldots\cdot 10^{-9}$. On a en fait 7 décimales exactes après la virgule.

Dans la pratique, voici le nombre d'itérations suffisantes pour avoir une précision de 10^{-n} pour cet exemple. Une itération de plus donne une décimale supplémentaire.

10^{-10} (~ 10 décimales)	10 itérations
10^{-100} (~ 100 décimales)	107 itérations
10^{-1000} (~ 1000 décimales)	1073 itérations

Exemple 4 (Erreur pour $(1,10)^{1/12}$). On pose $f(x) = x^{12} - 1,10$, $I = [1; 1,10]$ et $\ell = (1,10)^{1/12}$. Comme $f'(x) = 12x^{11}$, si on pose de plus $m = 12$, on a $|f'(x)| \geq m$ pour $x \in I$. On obtient

$$\varepsilon_n = |\ell - a_n| \leq \frac{|a_n^{12} - 1,10|}{12}.$$

Par exemple $a_8 = 1.0079677973185432\ldots$ donc

$$|(1,10)^{1/12} - a_8| \leq \frac{|a_8^{12} - 1,10|}{12} = 6,92\ldots\cdot 10^{-6}.$$

1.4.7 Algorithme

Voici un algorithme : c'est tout simplement la mise en œuvre de la suite récurrente (a_n).

```
début
    lire(a);
    lire(b);
    lire(N);
    lire(ε);
    n ← 0;
    tr ← faux;
    repeter
        n ← n+1
        x ← a − f(a) (b−a)/(f(b)−f(a));
        si
            |x − a| < ε  alors  tr ← vrai;
        sinon
            a ← x;
        finsi
    jusqu'à((tr = vrai)ou(n = N));
    si
        tr = vrai  alors  écrire(la valeur approchée est x);
    sinon
        écrire(changer a ou N);
    finsi
fin.
```

1.4.8 Méthode de Régula falsi

Dans la méthode de la fausse position, les points $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M1(x_1, f(x_1))$ doivent être choisis de telle sorte que

$$f(x_0)f(x_1) < 0.$$

L'itéré x_2, abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la droite passant par M_0 et M_1, est donné par la formule

$$x_2 = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

L'itéré suivant est calculé en choisissant comme points de départ M_0 et $M_2(x_2, f(x_2))$ ou M_1 et M_2 selon que

$$f(x_0)f(x_2) < 0 \quad \text{ou} \quad f(x_1)f(x_2) < 0.$$

A chaque itération, on fait un test pour définir les points de départ, ce qui donne l'algorithme

```
Début
    Si f(x0)f(x1) < 0 alors
            Répéter
```



```
                x2 ← x1 − f(x1)(x0−x1)/(f(x0)−f(x1))
                Si f(x0)f(x2) > 0 alors x0 ← x2 ;
                  Sinon x1 ← x2 ;
                fin si
            jusqu'à ce que |f(x2)| < ε ou |x1 − x0| < ε ;
            écrire('la solution est',x2) ;
    fin si
fin.
```

1.4.9 Exercices

1.4.10 Exercices avec solutions

Exercice 9.5.1

On considère la fonction définie par $f(x) = 4x^3 + 12x + 1$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique α comprise entre 0 et 1.
2. Déterminer une approximation de α par la méthode de la sécante après 5 itérations.

Exercice 9.5.2

On considère la fonction définie par $f(x) = 4x^3 + 12x + 1$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique α comprise entre -1 et 0.
2. Déterminer une approximation de α par la méthode de la sécante après 5 itérations.

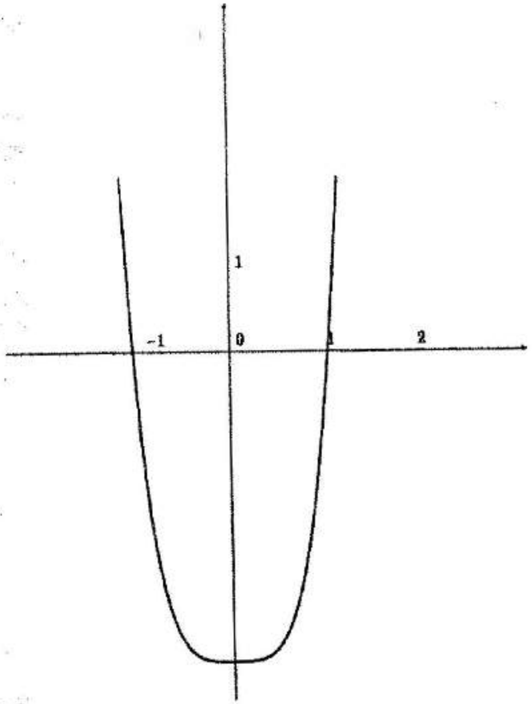
Exercice 9.5.3

Écrire l'algorithme de la méthode de la sécante pour calculer la solution de l'équation $f(x) = 0$.

1.4.11 Exercices sans solutions

Exercice 9.5.4

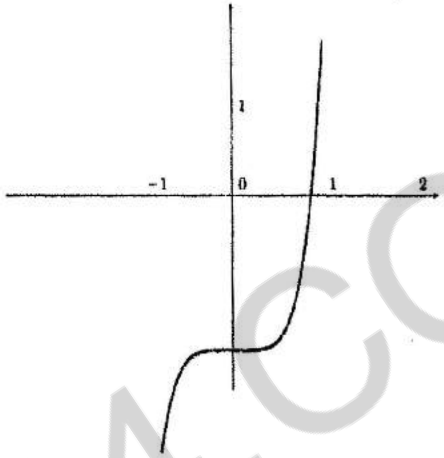
On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x^4 - 4$. On veut approcher la racine positive de l'équation$f(x) = 0$ par la méthode de Lagrange. On note (x_n) la suite itérée correspondante ayant comme premiers termes $x_0 = 4$ et $x_1 = 3$.



1. Donner la relation de récurrence en exprimant x en fonction de y et z où $x = x_{n+1}$, $y = x_n$ et $z = x_{n-1}$.
2. Calculer x_2.
3. Donner l'indice n du terme de la suite (x_n) qui approche α à 0.01 près.
4. Donner une approximation de la racine α de f à 0.01 près.

Exercice 9.5.5

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2(2x^5 - 1)$. On veut approcher la racine positive de f par la méthode de Lagrange. On note (x_n) la suite itérée correspondante ayant comme premiers termes $x_0 = 4$ et $x_1 = 3$.



1. Donner la relation de récurrence en exprimant x en fonction de y et z où $x = x_{n+1}$, $y = x_n$ et $z = x_{n-1}$;
2. Calculer x_2 et x_3.
3. Donner l'indice n du terme de la suite (x_n) qui approche α à 0.01 près.
4. Donner une approximation de la racine α de f à 0.01 près.

1.4.12 Solution des exercices

Solution de l'exercice 9.5.1

1. L'objectif est de chercher les zéros de la fonction $f(x) = e^{x^2} - 4x^2$. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $f'(x) = 2xe^{x^2} - 8x$. les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont $x = -\sqrt{\ln 4}$, $x = 0$ et $x = \sqrt{\ln 4}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\ln 4}$		0		$\sqrt{\ln 4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
f					1				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$		$4-4\ln 4$				$4-4\ln 4$		

Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $4 - 4\ln 4 < 0$, alors nous avons :

* une racine dans l'intervalle $\left]-\infty, -\sqrt{\ln 4}\right[$;
* une racine dans l'intervalle $\left]-\sqrt{\ln 4}, 0\right[$;
* une racine dans l'intervalle $\left]0, \sqrt{\ln 4}\right[$; et
* une racine dans l'intervalle $\left]\sqrt{\ln 4}, +\infty\right[$.

2. Puisque la fonction f est continue sur $[0,1]$ et que $f(0)f(1) < 0$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]0,1[$, or la fonction f est strictement décroissante sur $\left]0, \sqrt{\ln 4}\right[$ (voir le tableau

de variation de la fonction f), en particulier sur $]0,1[$, et par conséquent, la solution α est unique.

3. Pour donner une approximation de α par la méthode de la sécante après 5 itérations, il suffit de considérer la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \end{cases}$$

à partir de cette suite, nous obtenons le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0.000	1.0000	0.4383	0.5827	0.5995	0.5978

Solution de l'exercice 9.5.2

1. Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0,1]$, et que $f(-1)f(0) < 0$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]-1,0[$, or la fonction f est strictement croissante (il suffit de vérifier que $f'(x) = 4x^2 + 12 > 0$) sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0,1]$, alors la solution α est unique.
2. Pour donner une approximation de α par la méthode de la sécante après 5 itérations, il suffit de considérer la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ x_1 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \end{cases}$$

à partir de cette suite, nous obtenons le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
x_n	−1.000	0.0000	−0.0625	−0.0832	−0.0831	−0.0831

Solution de l'exercice 9.5.3

Algorithme de la méthde de la sécante.

Début
saisir x_0 ; x_1 ; ε ; $f : [a,b] \to IR$;
$x_2 \leftarrow x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$
tantque $|f(x_2)| > \varepsilon$ **faire**
  $x_0 \leftarrow x_1$;
  $x_1 \leftarrow x_2$;
  $x_2 \leftarrow x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$
fin tantque
écrire('une approximation de la solution est', x_2) ;
Fin.

1.5 Comparaison des méthodes

Pour comparer des méthodes numériques, il est important de tenir compte de la présence ou non des facteurs suivants :
- assurance de la convergence
- vitesse de la convergence
- stabilité de l'algorithme - précision des résultats
- efficacité des calculs (ex : nombre de fonctions à calculer à chaque itération).

1.5.1 Méthode de dichotomie

Avantages :
- La convergence est assurée
- On a un encadrement de la solution
- Un seul calcul de fonction à chaque itération.

Inconvénients
- Vitesse de convergence linéaire, donc lente
- Sensible aux erreurs d'arrondi ; exemple : la fonction $f(x) = e^x - 1 - x - x^2$ s'annule théoriquement en $x = 0$. Numériquement, elle change de signe un grand nombre de fois autour de $x = 0$.

1.5.2 Méthode de Newton

Avantages :
- Converge rapidement quand elle converge (ce qui compense largement le dernier inconvénient) ;
- Relativement stable et peu sensible aux erreurs d'arrondie si $f'(l)$ n'est pas trop petit.

Inconvénients
- Peut diverger ou converger vers un autre zéro que celui cherché si la donnée initiale est mal choisie ;
- Nécessite le calcul de la dérivée d'une fonction, ce qui est numériquement difficile si on ne la connaît pas explicitement ;
- Chaque étape nécessite deux évaluations de fonctions.

1.5.3 Méthode de la sécante

Avantages :
- Nécessite une seule évaluation de fonction à chaque étape ;
- Convergence relativement rapide, bien que moins que celle de Newton.

Inconvénients
- Comme la méthode de Newton, peut diverger si les données initiales sont mal choisies ;
- Le calcul de $f(x_n) - f(x_{n-1})$ peut produire des erreurs de chute.

1.5.4 Méthode du point fixe

Avantages :

- Convergence souvent difficile à réaliser en pratique ;
- Certains points fixes -dits instables- ne peuvent être atteints ;
- Convergence lente de type linéaire, en général.

Conclusion : cette dernière méthode a surtout un intérêt théorique : son analyse mathématique est relativement aisée et nous a permis d'en déduire celle de la méthode de Newton qui en est en fait un cas particulier. En pratique, elle est souvent utilisée dans de tels cas particuliers. Nous verrons à plusieurs reprises dans la suite qu'elle joue un rôle considérable pour adapter des algorithmes linéaires à des situations non linéaires. Elle est donc fondamentale en tant que concept. D'autre part, couplée avec des techniques d'accélération de la convergence (cf. paragraphe suivant), elle peut être intéressante. La méthode de Newton a généralement la faveur des utilisateurs : elle est effectivement très rapide et est certainement à conseiller lorsque le calcul de f' est aisé et lorsque des remarques simples permettent de choisir à coup sûr la donnée initiale dans le domaine de convergence. Pour cela, elle peut être, par exemple, précédée d'une application de quelques itérations de la méthode de dichotomie. Si on veut une méthode d'application plus universelle, la méthode de la sécante est plutôt à conseiller puisqu'elle nécessite seulement la connaissance de f. Elle est relativement rapide et ne nécessite qu'une évaluation de fonction à chaque itération. Ce dernier point peut même la faire considérer comme plus rapide que la méthode de Newton. En effet, si on pose

$$u_n = x_{2n},$$

le passage de u_n à u_{n+1} nécessite le même travail qu'une itération de la méthode de Newton. Mais on a

$$|u_{n+1} - l| \leq C|x_{2n+1} - l|^p \leq C|u_n - l|^{p^2}$$

Vue ainsi, la méthode est d'ordre $p^2 = 2,618...$! Ce genre de considérations n'est pas à négliger dans une évaluation globale du temps de calcul.

Terminons par un exemple :

Résolution de $x - 0,2\sin x - 0,5 = 0$ à l'aide des quatre algorithmes différents

k	Dichotomie	Sécante	Newton	Point fixe
	$x_{-1} = 0,5 ; x_0 = 1,0$	$x_{-1} = 0,5 ; x_0 = 1,0$	$x_0 = 1$	$x_0 = 1$
1	0, 75	0, 5	0, 5	0, 50
2	0, 625	0, 61212248	0, 61629718	0, 595885
3	0, 5625	0, 61549349	0, 61546820	0, 612248
4	0, 59375	0, 61546816	0, 61546816	0, 614941
5	0, 609375			0, 61538219
6	0, 6171875			0, 61545412
7	0, 6132812			0, 61546587
8	0, 6152343			0, 61546779
9	0, 6162109			0, 61546810
10	0, 6157226			0, 61546815
11	0, 6154785			
12	0, 6153564			
13	0, 6154174			
14	0, 6154479			
15	0, 6154532			
16	0, 61547088			
17	0, 61546707			
18	0, 61546897			
19	0, 615468025			
20	0, 615468502			

1.6 Accélération de la convergence

D'une manière générale, étant donnée une suite x_n qui converge vers l, accélérer sa convergence consiste à la remplacer par une suite $\tilde{x}_n$ convergeant plus vite vers l, c'est-à-dire vérifiant :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\tilde{x}_n - l}{x_n - l} = 0$$

Par exemple, si x_n converge linéairement, on cherchera à construire $\tilde{x}_n$ convergeant quadratiquement.

1.6.1 Méthode de relaxation

Elle est basée sur une idée très simple. Considérons une méthode de point fixe $x_{n+1} = g(x_n)$ qui ne converge pas ou très lentement vers un point fixe x^*. L'équation qu'on cherche à résoudre $x = g(x)$ peut également s'écrire

$$\alpha x + x = g(x) + \alpha x$$

et ce pour tout α réel. L'écriture de l'équation sous la forme précédente suggère d'utiliser une nouvelle méthode de point fixe :

$$x_{n+1} = \frac{g(x_n) + \alpha x_n}{\alpha + 1} = G(x_n)$$

Maintenant, d'après le théorème du point fixe, cette méthode va converger (en choisissant d'initialiser assez près de la solution) dès que

$$|G'(x^*)| = |\frac{g(x^*)+\alpha}{\alpha+1}| < 1$$

et ce d'autant plus rapidement que $|\frac{g(x^*)+\alpha}{\alpha+1}|$ est petit. Comme on est parfaitement libre de choisir le paramètre α (qui s'appelle ici paramètre de relaxation), l'idée est de le prendre le plus proche possible de $-g'(x^*)$. Bien sûr, la valeur exacte de $g'(x^*)$ n'est en général pas connue, mais par encadrement on peut en avoir des valeurs approchées convenables, qu'on peut d'ailleurs réactualiser éventuellement au cours des itérations. En conclusion cette méthode est très simple d'utilisation et peut rendre de précieux services.

1.6.2 Méthode du Δ^2 d'Aitken

Afin d'illustrer la méthode, commençons par considérer une suite x_n qui converge vers l et telle que :

$$x_{n+1} - l = k(x_n - l) \quad \text{où} \quad 0 < k < 1.$$

Les nombres k et l peuvent être exprimés en fonction des valeurs de la suite x_n à l'aide des deux équations :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - l &= k(x_n - l), \\ x_{n+2} - l &= k(x_{n+1} - l). \end{aligned}$$

On obtient par différence

$$x_{n+2} - x_{n+1} = k(x_{n+1} - x_n),$$

et en substituant dans la première équation mise sous la forme

$$l = x_n + \frac{x_{n+1} - x_n}{1-k}$$

on a

$$l = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} + x_n - 2x_{n+1}}$$

En utilisant les notations des différences finies, soit

$$\begin{aligned} \Delta x_n &= x_{n+1} - x_n \\ \Delta^2 x_n &= \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n), \end{aligned}$$

ceci s'écrit encore

$$l = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

La méthode tire son nom de cette formule. Elle montre ici que la limite l cherchée peut être exactement connue à l'aide de x_{n+2}, x_{n+1}, et x_n ; n quelconque. L'idée d'Aitken est de généraliser cette remarque aux suites convergeant linéairement, c'est-à-dire telles que

$$x_{n+1} - l = k_n(x_n - l)$$

avec

$$\lim_{n\to\infty} k_n = k \in [0,1[.$$

Pour une telle suite, le coefficient k_n est "presque" constant si n est grand et on peut alors faire le calcul précédent pour se convaincre que :

$$\tilde{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

doit être très voisin de l. On a en effet :

Théorème 6.
Soit une suite x_n vérifiant pour tout entier n, $x_n \neq l$ et $x_{n+1} - l = (k + \varepsilon_n)(x_n - l)$ avec $|k| < 1$ et $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Alors la suite définie par

$$\tilde{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

vérifie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n - l}{x_n - l} = 0$$

Démonstration. Posons $e_n = x_n - l$. On a

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_n &= e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n = e_n[(k+\varepsilon_{n+1})(k+\varepsilon_n) - 2(k+\varepsilon_n) + 1] \\ &= e_n[(k-1)^2 + \eta_n] \text{ où } \eta_n = k(\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n) + \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n - 2\varepsilon_n. \end{aligned}$$

Puisque η_n tend vers 0 et $e_n \neq 0$, $\Delta^2 x_n$ est différent de 0 pour n grand et $\tilde{x}_n$ est donc bien défini au moins pour n assez grand. D'autre part

$$\tilde{x}_n - l = e_n[1 - \frac{(k-1+\varepsilon_n)^2}{(k-1)^2 + \eta_n}]$$

Mais l'expression entre crochets tend vers 0 quand n tend vers l'infini ce qui prouve le résultat. □

Application : Algorithme de Stefensen Soit x_n définie par

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall n \geq 0$$

où g et x_0 vérifient les hypothèses du théorème précédent. On sait qu'alors x_n converge au moins linéairement vers l. On peut accélérer cette convergence en utilisant la méthode de Δ^2 d'Aitken. Il est alors plus efficace de repartir avec la nouvelle valeur $\tilde{x}_n$ à chaque nouvelle itération. Ceci donne l'algorithme suivant dit de Stefensen.

x_0 donné

$$\left[\begin{array}{l} \text{Pour } n = 0,1,2,\dots \\ y_n \leftarrow g(x_n),\ z_n \leftarrow g(y_n) \\ x_{n+1} \leftarrow x_n - \frac{(y_n - x_n)^2}{z_n - 2y_n + x_n} \end{array}\right.$$

Remarque. Cet algorithme est à nouveau un algorithme de point fixe

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \psi(x_n) \text{ avec} \\ \psi(x) &= x - \frac{(g(x)-x)^2}{g(g(x)) - 2g(x) + x} \end{aligned}$$

On peut montrer que si $g'(l) \neq 0$, alors $\psi'(l) = 0$. On sait qu'alors l'algorithme associé à ψ converge de façon quadratique. Ainsi, par rapport à l'algorithme associé à g :

- on accélère la convergence quand elle a lieu
- on a un procédé qui converge, même si $|g'(l)| \geq 1$.

Exemple 5. Nous avons vu que si $g(x) = x^2$, la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n^2$$

converge si $|x_0| < 1$ vers le point fixe 0. Le point fixe 1 n'est jamais atteint (sauf dans le cas irréaliste où x_0 est exactement égal à 1). Ceci est cohérent avec le fait que $g'(1) = 2 > 1$.
Calculons la fonction ψ dans ce cas

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= x - \frac{(x^2-x)^2}{x^4-2x^3+x} = x - \frac{x^2(x-1)^2}{x(x-1)(x^2+x-1)} \\
\psi(x) &= \frac{x(x^2+x-1)-x(x-1)}{x^2+x+1} = \frac{x^3}{x^2+x-1} = \frac{x^3}{(x-r_1)(x-r_2)}
\end{aligned}$$

où $r_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Puisque $\psi(x) \sim x^3$ pour x voisin de 0, si x_0 est choisi assez petit, la suite x_n se comportera sensiblement comme

$$y_{n+1} = y_n^3$$

d'où convergence d'ordre 3 vers 0.
Si x_0 est choisi voisin de 1, puisque $\psi'(1) = 0$ et $\psi''(1) \neq 0$, la suite associée à ψ converge de façon quadratique vers 1. Ici, il y a donc un gain considérable par rapport à g.