SOMMAIRE

INTÉGRALE DE RIEMANN **7**

RAPPEL DE COURS 7

ÉNONCÉ DES EXERCICES 11

CALCUL DES PRIMITIVES **50**

RAPPEL DE COURS 50

ÉNONCÉ DES EXERCICES 55

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES **105**

RAPPEL DE COURS 105

ÉNONCÉ DES EXERCICES 109

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES **124**

RAPPEL DE COURS 124

ÉNONCÉ DES EXERCICES 127

WWW.TALIB24.COM

CHAPITRE N°1 :
INTÉGRALE DE RIEMANN

RAPPEL DE COURS

Dans ce rappel de cours, a et b désignent deux réels, avec $a<b$.

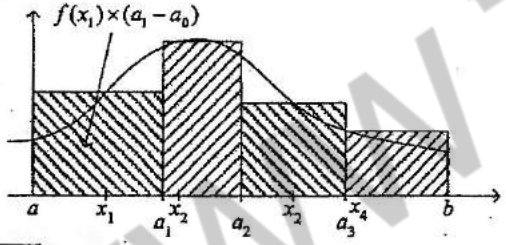
DEFINITION :

Soit f continue sur $[a,b]$, et $\sigma=(\underset{a}{a_0},...\underset{b}{a_n})$ une subdivision de $[a,b]$.

Une somme de Riemann attachée à f et σ, c'est une somme du type :

$S_{f,\sigma,x}=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})f(x_k)$, où $x=(x_1,...x_n)$ est une famille de points de $[a,b]$ telle que $\forall k\in[\![1,n]\!], x_k\in[a_{k-1},a_k]$.

Visualisation :



THEOREME :

Soit f continue sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon>0$. Alors il existe $\alpha>0$ tel que, pour toute subdivision σ de pas inférieur à α et toute somme de Riemann S attachée à f et σ, $\left|S-\int_a^b f\right|<\varepsilon$

(Le pas d'une subdivision $\sigma=(a_0,..a_n)$ est la valeur de $\max_{i\in[\![1,n]\!]}(a_i-a_{i-1})$)

Cas particulier : les sommes S_n, s_n, M_n

Soit f continue sur $[a,b]$. On note :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

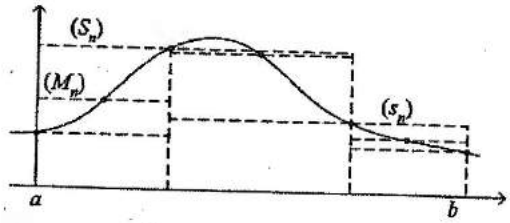
C'est-à-dire : On prend pour σ la subdivision régulière de $[a,b]$ en n segments, et, en notant $\sigma=(a_0,..a_n)$, on prend les $x_k=a_k$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

(Même subdivision, mais $x_k=a_{k-1}$)

$$M_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+(k-\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\right)$$

$(x_k=\frac{a_k+a_{k-1}}{2})$



THEOREME :

Les suites (S_n), (s_n), (M_n) convergent vers $\int_a^b f$.

Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

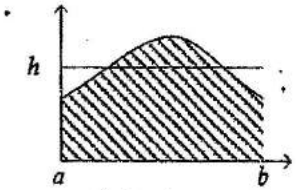
Soit $f:[a,b]\to IR$, une fonction continue sur $[a,b]$.

WWW.TALIB24.COM

DEFINITION :

La valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est le réel : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Explication :



La valeur moyenne h de f sur $[a,b]$ est le réel h tel que l'aire hachurée soit l'aire correspondante pour la fonction constante égale à h.

Ou :

Soit $(a_0,...a_n)$ la subdivision régulière de $[a,b]$.

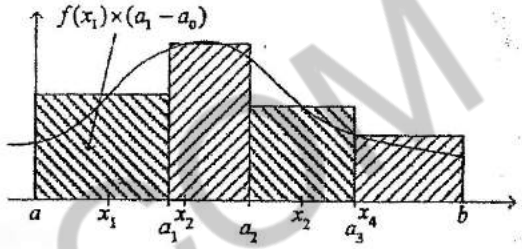
Moyenne arithmétique des $f(a_i), i \in [\![1,n]\!]$:

$$\frac{f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)}{n} = \frac{1}{b-a} \times \underbrace{\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)}_{\text{tend vers } \int_a^b f(t)dt}$$

THEOREME :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\exists c \in [a,b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Si on prend une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$, c'est-à-dire pour tout $0 \le i \le n-1$ les intervalles $[x_{i+1}, x_i]$ ont la même longueur $h = \frac{b-a}{n}$, alors on a $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$ et donc $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$; et d'après la définition de l'intégrale, on a la formule importante qui sert à calculer des limites de certaines suites :



THEOREME :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

REMARQUE :

Pour calculer une somme de Riemann, on prend toujours $a = 0$ et $b = 1$.

WWW.TALIB24.COM

ÉNONCÉ DES EXERCICES

Exercice 1 :

Calculer la limite des suites définies par :

(1) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$.

(2) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$.

(3) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}}$ avec $p \in IN$.

(4) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$

Solution de l'exercice 1 :

(1) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit de factoriser par $\frac{1}{n}$,

c'est-à-dire $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$. On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur [0,1] définie par $f(x) = x$, ainsi, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur [0,1], alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}}$$

(2) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit de factoriser par $\frac{1}{n}$,

c'est-à-dire $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2$. On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur [0,1] définie par $f(x) = x^2$, ainsi, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur [0,1], alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}}$$

(3) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit de factoriser par $\frac{1}{n}$,

c'est-à-dire $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p$. On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = x^p$, ainsi, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^p\,dx = \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}}$$

(4) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit de factoriser par $\frac{1}{n}$,

c'est-à-dire $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$. On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$, ainsi, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}}$$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 2 :

Calculer la limite des suites définies par :

(1) $u_n = \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$.

(2) $u_n = \frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$.

(3) $u_n = \frac{1^p+2^p+3^p+...+n^p}{n^{p+1}}$ avec $p \in IN$.

(4) $u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Solution de l'exercice 2 :

(1) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$:

Le terme général de la suite u_n se présente comme une somme dont le nombre de termes augmente indéfiniment avec n. La suite u_n s'écrit donc sous la forme $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$. Si on factorise par $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$, on a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur [0,1] définie par $f(x) = x$, ainsi, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur [0,1], alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}}$$

(2) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$:

La suite u_n s'écrit sous la forme $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$.

On met $\frac{1}{n}$ en facteur dans u_n, on obtient : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2$. Sous cette forme u_n apparaît comme la somme de Riemann correspondant à la subdivision régulière d'ordre n de la fonction continue sur [0,1] définie par $f(x) = x^2$,

ainsi, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur [0,1], alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}}$$

(3) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1^p+2^p+3^p+...+n^p}{n^{p+1}}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit d'écrire la suite u_n sous la forme $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}}$ puis factoriser par $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p$. On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur [0,1] définie par $f(x) = x^p$, par la suite, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur [0,1], alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^p\,dx = \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}}$$

(4) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit d'écrire la suite u_n sous la forme $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$ puis factoriser par $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$. On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur [0,1] définie par $f(x) = \sqrt{x}$, ainsi, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur [0,1], alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}}$$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 3 :

Calculer la limite des suites définies par :

(1) $u_n = \frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right]$.

(2) $u_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots \frac{1}{(n+n)^2}\right)$.

(3) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+8n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+16n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+24n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9n^2}}$.

Solution de l'exercice 3 :

(1) Calcul de

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right]$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit d'écrire la suite u_n sous la forme :

$u_n = \frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$, par la suite, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.}$$

(2) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots \frac{1}{(n+n)^2}\right)$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit d'écrire la suite u_n sous la forme :

$u_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots \frac{1}{(n+n)^2}\right) = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$.

On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, par la suite, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.}$$

(3) Calcul de

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+8n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+16n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+24n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9n^2}}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit d'écrire la suite u_n sous la forme :

$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+8n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+16n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9n^2}}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+8\frac{k}{n}}}$.

On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+8x}}$, par la suite, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+8x}}dx = \left[\frac{1}{4}\sqrt{1+8x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.}$$

Exercice 4 :

Calculer la limite des suites définies par :

(1) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha n+\beta k}$ avec $\alpha, \beta > 0$.

(2) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

(3) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

(4) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$.

(5) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2}$.

Solution de l'exercice 4 :

(1) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha n+\beta k}$.

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit de factoriser par $\frac{1}{n}$,

WWW.TALIB24.COM

c'est-à-dire $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha n+\beta k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha+\beta\frac{k}{n}}$.

On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur [0,1] définie par $f(x) = \frac{1}{\alpha+\beta x}$, ainsi,

$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur [0,1], alors :

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\alpha+\beta x}dx \\ &= \left[\frac{1}{\beta}\ln(\alpha+\beta x)\right]_0^1 = \frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right).\end{aligned}}$$

(2) Calcul de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit de factoriser par $\frac{n}{n^2}$

c'est-à-dire $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, ainsi, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Or, la fonction f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}}$$

(3) Calcul de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit de factoriser par $\frac{n}{n^2}$, c'est-à-dire

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur [0,1] définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, ainsi, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Or, la fonction f est continue sur [0,1], alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2).}$$

(4) Calcul de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$.

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit de factoriser par $\frac{n^2}{n^3}$, c'est-à-dire

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}$. On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur [0,1] définie par $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$, ainsi, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Or, la fonction f est continue sur [0,1], alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx = \left[\frac{1}{3}\ln(1+x^3)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln(2)}$$

(5) Calcul de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2}$.

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit de factoriser par $\frac{n}{n^2}$, c'est-à-dire .

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}$. On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur [0,1] définie par $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, ainsi,

$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur [0,1], alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.}$$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 5 :

Calculer la limite des suites définies par :

(1) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

(2) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.

(3) $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.

(4) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

Solution de l'exercice 5 :

(1) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit de factoriser par $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}$. On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$, ainsi,

$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}dx = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1.}$$

(2) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit de factoriser par $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$. On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, ainsi, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \left[arcsin\,\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.}$$

(3) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, on va écrire $\frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$, c'est-à-dire

$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$. On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, ainsi,

$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx = \left[-\sqrt{4-x^2}\right]_0^1 = 2-\sqrt{3}.}$$

(4) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, il suffit de factoriser par $\frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$.

On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, ainsi, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Or, la fonction f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = [arcshx]_0^1 = -ln(\sqrt{2}-1).}$$

WWW.TALIB24.COM

Soit i un entier naturel non nul et soit la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in IN^* \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n+k}\right)^i.$$

(1) Déterminer la limite de cette suite pour $i = 1$, $i = 2$, puis $i = 3$.

(2) Pour i quelconque > 0, déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution de l'exercice 5 :

(1) Premier cas : $i=1$

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = [x - ln(1+x)]_0^1 = 1 - ln2$$

Noter que $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$.

Conclusion, $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+k} = 1 - ln2.}$

Deuxième cas : $i=2$

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{1+x} - 2ln(1+x)\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2} - 2ln2$$

Noter que $\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^2 = 1 - \frac{2}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$

Conclusion, $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n+k}\right)^2 = \frac{3}{2} - 2ln2.}$

Troisième cas : $i=3$

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}\right)^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 dx$$

$$= \left[x + \frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{3}{1+x} - 3ln(1+x)\right]_0^1$$

$$= \frac{17}{8} - 3ln2$$

Noter que $\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 = \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^3 = 1 - 3\frac{1}{1+x} + 3\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}$

Conclusion, $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n+k}\right)^3 = \frac{17}{8} - 3ln2.}$

(2) Soit $i > 0$, on a

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}\right)^i \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1\left(\frac{x}{1+x}\right)^i dx$$

$$= \left[C_i^0 x - C_i^1 ln(1+x) + \sum_{j=2}^{i} C_i^j(-1)^j\frac{1}{(1+x)^{j-1}}\right]_0^1$$

$$= 1 + \sum_{j=2}^{i} C_i^j(-1)^j - iln(1+x)$$

Noter que $\left(\frac{x}{1+x}\right)^i = \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j\frac{(-1)^j}{(1+x)^j}$ et rappelons la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n+k}\right)^i = 1 + \sum_{j=2}^{i} C_i^j(-1)^j - iln(1+x).}$$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 8 :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, calculer la limite de la suite suivante : $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+x^2k^2}$.

Solution de l'exercice 8 :

On a $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+x^2k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x^2\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ est une somme de Riemann pour la fonction $f(t) = \frac{1}{1+x^2t^2}$.

La somme donc converge vers

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(t)\,dt = \left[\frac{1}{x}\arctan(xt)\right]_0^1 = \frac{\arctan(x)}{x}.}$$

Remarque : pour calculer l'intégrale ci-dessus, on utilise le changement de variable : $u = xt$.

Exercice 9 :

On se propose de calculer la limite de la suite suivante :

$$u_n = \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}.$$

(a) On pose $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2\ln(2) - 1$.

(b) En déduire la limite de u_n.

Solution de l'exercice 9 :

(a) On a $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x)$ avec $f(x) = \ln(1+x)$. Or la fonction f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} v_n &= \frac{1}{1-0}\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = [(1+x)\ln(1+x) - x]_0^1 \\ &= 2\ln(2) - 1.\end{aligned}}$$

(b) On pose $w_n = \ln(u_n)$

(Notons que la suite $u_n > 0$),
alors on a :

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln(n) + \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(n) + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right] = \ln(n) + v_n.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2\ln(2) - 1$,
alors $\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.
Et par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 10 :

Calculer la limite des suites données par :

(1) $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

(2) $u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$.

(3) $u_n = \frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$.

(4) $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n^2+k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Solution de l'exercice 10 :

(1) Calcul de $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$:

On pose $v_n = \ln(u_n)$ (Notons que $u_n > 0$).
Alors on a :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = [(1+x)\ln(1+x) - x]_0^1.$$

Ce qui donne : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2\ln 2 - 1$.
Finalement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{e}.}$$

WWW.TALIB24.COM

Remarque : Pour calculer l'intégrale ci-dessus, on utilise une intégration par parties : $u' = 1$ et $v = \ln(1+x)$ ou bien on remarque qu'une primitive de la fonction $\ln(1+x)$ est $(1+x)ln(1+x) - x$.

(2) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$:

On pose $v_n = \ln(u_n)$ (Notons que $u_n > 0$).

Alors on a :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$
$$= [(1+x)\ln(1+x) - x]_0^1.$$

Ce qui donne, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2\,ln\,(2) - 1$.

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{e}.}$$

(3) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$:

On a :

$\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n}\left[n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n} n^{\frac{2}{n}} \times$

$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

Et comme $\prod_{k=1}^{n} n^{\frac{2}{n}} = n^2$, alors

$\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}} = n^2\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{n}}$,

et par conséquent, $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

On pose $v_n = \ln(u_n)$ (Notons que $u_n > 0$),

alors on a : $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$.

Par conséquent,

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = [x\ln(1+x^2) - 2x + 2arctanx]_0^1$.

Ce qui donne : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = ln\ 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$. Finalement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{e^2}.}$$

(4) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n^2+k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$:

On peut remarquer que l'on a :

$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n^2+k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

On en déduit donc (d'après la question précédente) que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{e^2}.}$$

Exercice 11 :

Calculer la limite des suites données par :

(1) $u_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+k^2}$.

(2) $u_n = \frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$.

(3) $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

(4) $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k}$.

Solution de l'exercice 11 :

(1) Calcul de $u_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+k^2}$:

On pose : $m = 2n$ (lorsque n tend vers $+\infty$, on a aussi m tend vers $+\infty$) ce qui donne : $u_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+k^2} = v_m$,

avec :

WWW.TALIB24.COM

$v_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + k^2} = 4\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m^2+k^2} = 4\sum_{k=1}^{m} \frac{\frac{k}{m}}{1+\left(\frac{k}{m}\right)^2}$,

qui est une somme de Riemann pour la fonction $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. La somme converge donc vers :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{m\to+\infty} v_m = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2).}$$

(2) Calcul de $u_n = \frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$:

On commence par simplifier l'expression de la suite u_n en factorisant par n^2, ce qui donne :

$$u_n = \prod_{k=1}^{2n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Puis puisque $u_n > 0$, alors on pose :

$$v_n = \ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right).$$

On pose enfin $m = 2n$ (lorsque n tend vers $+\infty$, on a aussi m tend vers $+\infty$) ce qui donne :

$$v_n = \ln(u_n) = \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}\ln\left(1+4\left(\frac{k}{m}\right)^2\right) = w_m,$$

qui est une somme de Riemann pour la fonction $f(x) = \ln(1+x^2)$.

La somme converge vers :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} v_m = \lim_{m\to+\infty} w_n &= \frac{2}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx \\ &= 2[x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)]_0^1 \\ &= 2\ln(2) - 4 + \pi.\end{aligned}$$

Et par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 4e^{\pi-4}.}$$

(3) Calcul de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$:

On a :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots + \frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k},$$

qui est une somme de Riemann pour la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$. La somme converge vers

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).}$$

Remarque : On peut poser le changement de variable : $p = k - n$, ce qui donne $u_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p+n}$, qui est une somme de Riemann pour la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$. La somme converge vers

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).}$$

(4) Calcul de $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k}$:

On pose le changement de variable : $p = k - n$, ce qui donne $u_n = \sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{2n+p}$, qui est une somme de Riemann pour la fonction $f(x) = \frac{1}{2+x}$. La somme converge vers

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx = [\ln(2+x)]_0^1 = \ln(3).}$$

Exercice 12 :

Calculer la limite des suites données par :

(1) $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{n^2}$.

(2) $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+1}{n^3}$.

(3) $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^p+1}{n^{p+1}}$ avec $p \in IN$.

WWW.TALIB24.COM

Solution de l'exercice 12 :

(1) Calcul de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{n^2}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, on va factoriser par $\frac{n}{n^2}$, c'est-à-dire

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right]$.

Notons qu'il ne s'agit pas d'une somme de Riemann (le terme $\frac{1}{n}$ est tout seul).

Posons $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$ qui est une somme de Riemann qui converge vers : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

Posons ensuite $w_n = u_n - v_n$ et montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$?

On a :

$w_n = u_n - v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right] - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On déduit donc que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}.}$$

(2) Calcul de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+1}{n^3}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, on va factoriser par $\frac{n^2}{n^3}$, c'est-à-dire

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+1}{n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}\right]$.

Notons qu'il ne s'agit pas d'une somme de Riemann (le terme $\frac{1}{n^2}$ est tout seul).

Posons $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$ qui est une somme de Riemann qui converge vers :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Posons ensuite $w_n = u_n - v_n$ et montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$?

On a :

$w_n = u_n - v_n$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}\right] - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On déduit donc que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{3}.}$$

(3) Calcul de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p+1}{n^{p+1}}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, on va factoriser par $\frac{n^p}{n^{p+1}}$, c'est-à-dire

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p+1}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^p+\frac{1}{n^p}\right]$.

Notons qu'il ne s'agit pas d'une somme de Riemann (le terme $\frac{1}{n^p}$ est tout seul).

Posons $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$ qui est une somme de Riemann qui converge vers :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 x^p\,dx = \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

Posons ensuite $w_n = u_n - v_n$ et montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$?

On a :

$w_n = u_n - v_n$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^p+\frac{1}{n^p}\right] - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On déduit donc que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{p+1}.}$$

WWW.TALIB24.COM

Calculer la limite des suites données par :

(1) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k}{n^2+k^2}$.

(2) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3}$.

(3) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k^3}{n^4+k^4}$.

(1) Calcul de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k}{n^2+k^2}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, on va factoriser par $\frac{n}{n^2}$, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n}+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$.

Notons qu'il ne s'agit pas d'une somme de Riemann (le terme $\frac{1}{n}$ est tout seul).

Posons $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ qui est une somme de Riemann qui converge vers :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}ln\,(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{ln2}{2}.$$

Posons ensuite $w_n = u_n - v_n$ et montrons que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$?

On a :

$$w_n = u_n - v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n}+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Or $1 \le k \le n$ alors $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \le \frac{n^2}{n^2+1}$, c'est-à-dire que :

$\frac{n}{2} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \le \frac{n^3}{n^2+1}$, et par conséquent, $\frac{1}{2n} \le w_n \le \frac{n}{n^2+1}$, ce qui implique que $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On déduit donc que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{ln2}{2}.}$$

(2) Calcul de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, on va factoriser par $\frac{n^2}{n^3}$, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}$.

Notons qu'il ne s'agit pas d'une somme de Riemann (le terme $\frac{1}{n}$ est tout seul).

Posons $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}$ qui est une somme de Riemann qui converge vers :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx = \left[\frac{1}{3}ln\,(1+x^3)\right]_0^1 = \frac{ln2}{3}.$$

Posons ensuite $w_n = u_n - v_n$ et montrons que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$?

On a :

$$w_n = u_n - v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}.$$

Or $1 \le k \le n$ alors $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3} \le \frac{n^3}{n^3+1}$, c'est-à-dire que $\frac{n}{2} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3} \le \frac{n^4}{n^3+1}$ et par conséquent, $\frac{1}{2n} \le w_n \le \frac{n^2}{n^3+1}$, ce qui implique que $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On déduit donc que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{ln2}{3}.}$$

WWW.TALIB24.COM

(3) Calcul de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k^3}{n^4+k^4}$:

Pour faire apparaître une somme de Riemann, on va factoriser par $\frac{n^3}{n^4}$, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n^3}+\left(\frac{k}{n}\right)^3}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^4}$.

Notons qu'il ne s'agit pas d'une somme de Riemann (le terme $\frac{1}{n^3}$ est tout seul).

Posons $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^3}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^4}$ qui est une somme de Riemann qui converge vers :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}dx = \left[\frac{1}{4}ln\,(1+x^4)\right]_0^1 = \frac{ln2}{4}.$$

Posons ensuite $w_n = u_n - v_n$ et montrons que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$?

On a :

$$w_n = u_n - v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n^3}+\left(\frac{k}{n}\right)^3}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^4} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^3}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^4} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^4}.$$

Or $1 \le k \le n$, alors, $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^4} \le \frac{n^4}{n^4+1}$.

c'est-à-dire que :

$$\frac{n}{2} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \le \frac{n^5}{n^4+1}.$$

Et par conséquent, $\frac{1}{2n^3} \le w_n \le \frac{n}{n^4+1}$, ce qui implique que $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On déduit donc que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{ln2}{4}.}$$

Exercice 14 :

Calculer la limite des suites données par :

(1) $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.

(2) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}}$.

Solution de l'exercice 14 :

(1) Calcul de $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$:

On pose le changement de variable : $p = k - n$, ce qui donne $u_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2n+2p+1} = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2+2\frac{p}{n}+\frac{1}{n}}$.

Notons que cette somme n'est pas une somme de Riemann.

Posons donc la suite : $v_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2+2\frac{p}{n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{p}{n}}$

qui est une somme de Riemann qui converge vers :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}[\ln(1+x)]_0^1 = \frac{ln(2)}{2}.$$

Posons ensuite $w_n = v_n - u_n$,

et montrons que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

On a :

$$w_n = v_n - u_n = \sum_{p=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2n+2p} - \frac{1}{2n+2p+1}\right) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2n+2p)(2n+2p+1)}.$$

Or $0 \le p \le n-1 \le n$,

alors $\frac{1}{4n(4n+1)} \le \frac{1}{(2n+2p)(2n+2p+1)} \le \frac{1}{2n(2n+1)}$,

c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{4(4n+1)} \le \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2n+2p)(2n+2p+1)} \le \frac{1}{2(2n+1)},$$

et par conséquent, $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On déduit donc que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{ln2}{2}.}$$

WWW.TALIB24.COM

- **Une deuxième méthode** consiste à remarquer que
  $\frac{1}{2n+2(p+1)} \leq \frac{1}{2n+2p+1} \leq \frac{1}{2n+2p}$
  puis écrire $\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n+p} \leq u_n \leq \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{n+p}$

Les deux sommes $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n+p}$ et $\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{n+p}$ convergent vers la même limite $ln(2)$, on en déduit donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{ln2}{2}.}$$

- **Une troisième méthode** consiste à remarquer que la décroissance de la fonction $t \to \frac{1}{2t+1}$ sur IR_+ donne, pour tout $k \geq 1$:
  $\int_k^{k+1}\frac{dt}{2t+1} \leq \frac{1}{2t+1} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{2t+1}$
  En sommant, on obtient alors :
  $\int_n^{2n}\frac{dt}{2t+1} \leq u_n \leq \int_{n-1}^{2n-1}\frac{dt}{2t+1}$,
  soit $\frac{1}{2}\ln\frac{4n+1}{2n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}\ln\frac{4n-1}{2n-1}$
  d'où la conclusion avec le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{ln2}{2}.}$$

(2) Calcul de $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}}$:

Notons qu'il ne s'agit pas d'une somme de Riemann.
Posons donc $v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+n)}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k}{n}+1}$
qui est une somme de Riemann qui converge vers :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1\frac{1}{x+1}dx = [ln(1+x)]_0^1 = ln2.$$

Posons ensuite $w_n = v_n - u_n$,
et montrons que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$?

On a : $w_n = v_n - u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+n)}} - \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+n+1)}}\right)$.

Et comme

$$\frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+n)}} - \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+n+1)}\left(\sqrt{(k+n)(k+n+1)}+\sqrt{(k+n)(k+n)}\right)}$$

Alors

$$w_n = \frac{n}{\sqrt{(k+n)(k+n+1)}\left(\sqrt{(k+n)(k+n+1)}+\sqrt{(k+n)(k+n)}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On déduit donc que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = ln2.}$$

Exercice 1

On se propose de calculer la limite de la suite

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right).$$

(1) Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) \leq x.$$

(2) En déduire la limite de la suite suivante :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right).$$

Solution de l'exercice 1

(1) On pose $f(x) = \ln(1+x)$, donc $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

D'après Mc Laurin à l'ordre 2, il existe $0 < c < x$ tel que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\frac{-1}{(1+c)^2}.$$

Mais, comme $0 < c < x$, alors :

$$-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq \frac{x^2}{2}\frac{-1}{(1+x)^2} \leq 0.$$

D'où le résultat.

WWW.TALIB24.COM

Une deuxième méthode consiste à faire une étude de fonction.

Une troisième méthode consiste à considérer la formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral pour la fonction $\ln(1+x)$ entre 0 et x, en effet,

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} ln(1+x)dt.$$

Mais, comme $x > 0$, alors $\forall t \in [0,x]$, on a $ln(1+t) \geq 0$, et donc $\frac{(x-t)^2}{2!} ln(1+t) \geq 0$, ainsi $\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} ln(1+t)dt \geq 0$ et $x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1+x)$.

L'autre inégalité provient de la convexité.

(2) Posons $v_n = ln(u_n)$. Alors on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} \leq v_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$$

D'une part, $\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

où $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ est une somme de Riemann qui converge vers :

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x(1-x)} - \frac{1}{4}\sqrt{x(1-x)} + \frac{1}{8}arcsin(2x-1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

D'autre part, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann (donc elle converge) que l'on ne va pas la calculer car la suite $\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2}$ va converger vers 0.

Et par conséquent, v_n va converger vers $\frac{\pi}{8}$.

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^{\frac{\pi}{8}}.}$$

Exercice 16 :

On se propose de calculer la limite de la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^n sin\left(\frac{k}{n}\right) sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

(1) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq sinx \leq x.$$

(2) Calculer la limite de la suite

$$v_n = \frac{1}{n^6}\sum_{k=1}^n k^3 sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

(3) En déduire la limite de la suite suivante :

$$u_n = \sum_{k=1}^n sin\left(\frac{k}{n}\right) sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Solution de l'exercice 16 :

(1) On considère la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = sinx$. D'après Mc Laurin à l'ordre 3, il existe $0 < c < x$ tel que

$$sinx = x - \frac{x^3}{6}cos(c).$$

Mais, comme $0 < c < x \leq \frac{\pi}{2}$, alors :

$$-\frac{x^3}{6} \leq sinx - x \leq -\frac{x^3}{6}cosx \leq 0.$$

D'où le résultat.

Une deuxième méthode consiste à faire une étude de fonction.

Une troisième méthode consiste à considérer la formule de Taylor à l'ordre 3 avec reste intégral pour la fonction $sinx$ entre 0 et x, en effet,

$$sinx = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} sintdt.$$

Mais, comme $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

alors $\forall t \in [0,x]$, on a $sint \geq 0$,

et donc $\frac{(x-t)^3}{3!} sint \geq 0$, ainsi $\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} sintdt \geq 0$

et $x - \frac{x^3}{6} \leq sinx$.

WWW.TALIB24.COM

L'autre inégalité provient de la convexité.

(2) On a : $\left|\sum_{k=1}^{n} k^3 sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq |\sum_{k=1}^{n} k^3| \leq |\sum_{k=1}^{n} n^3| \leq n^4$.

D'où $0 \leq |v_n| = \left|\frac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

(3) On a alors, puisque $\sin\frac{k}{n} \geq 0$ lorsque $k \in \{1, \dots, n\}$

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{n^6}\right) sin\left(\frac{k}{n}\right) \leq u_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} sin\left(\frac{k}{n}\right)$.

La somme de droite $w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} sin\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann qui converge vers : $\int_0^1 xsinx\, dx = [sinx - xcosx]_0^1 = sin1 - cos1$.

Pour la somme de gauche, on a :

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{n^6}\right) sin\left(\frac{k}{n}\right) = w_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} sin1 - cos1$.

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = sin1 - cos1.}$$

Exercice 17 :

On se propose de calculer la limite de la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

(1) Montrer que pour tout $x \in IR$ on a :

$$|sinx - x| \leq x^2.$$

(2) On considère la suite

$$v_n = \sum_{k=1}^{n}\left(sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right) sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Montrer que $|v_n| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}} \leq \frac{1}{n}$.

(3) On considère la suite $w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Calculer la limite de w_n.

(4) En déduire la limite de la suite u_n.

Solution de l'exercice 17 :

(1) On considère la fonction $f(x) = sinx$. D'après Mc Laurin à l'ordre 2, il existe $0 < c < x$ tel que $sinx = x - \frac{x^2}{2} sin\,(c)$.

Mais, comme $|\sin(c)| \leq 1$, alors :

$$|sinx - x| = \left|\frac{x^2}{2} sin\,(c)\right| \leq \frac{x^2}{2} \leq x^2.$$

D'où le résultat.

(2) En utilisant la question (1) on a :

$$|v_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right) sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4} \leq \frac{1}{n}$$

(3) La somme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pi}{n} sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ est une somme de Riemann pour la fonction continue sur [0,1] définie par $f(x) = \pi x sin(\pi x)$, ainsi,

$w_n = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Or, la fonction f est continue sur [0,1], alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \pi x sin(\pi x)\, dx = \int_0^1 xsin(\pi x)\, dx}$$

Ou encore :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \left[\frac{1}{\pi^2} sin\pi x - \frac{1}{\pi} xcos\pi x\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}}$$

(4) Puisque l'on a : $u_n = v_n + w_n$, alors,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{\pi}.}$$

Exercice 18 :

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \int_0^1 x^{2n} sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$$

où

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right).$$

WWW.TALIB24.COM

Solution de l'exercice 18 :

On a :

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \left[-\frac{2}{\pi}cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$

Car on reconnaît une somme de Riemann pour la fonction $f(x) = sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Ainsi, $a_n \sim \frac{2n}{\pi}$.

Reste à déterminer un équivalent de $\int_0^1 x^{2n} sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$.

Une intégration par parties donne (on intègre x^{2n})

$\int_0^1 x^{2n} sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{\pi}{2(2n+1)}\int_0^1 x^{2n+1} cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$

$\left|\int_0^1 x^{2n+1} cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\right| \leq \int_0^1 x^{2n+1}\,dx = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi : $2n\int_0^1 x^{2n} sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$,

c'est-à-dire, $\int_0^1 x^{2n} sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sim \frac{1}{2n}$

Conclusion, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n \int_0^1 x^{2n} sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{1}{\pi}.}$

Exercice 19 :

On désire déterminer la limite de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n^2+nk+2016}$.

(1) S'agit-il d'une somme de Riemann ?

(2) Simplifier $\frac{n-k}{n^2+nk} - \frac{n-k}{n^2+nk+2016}$.

(3) En déduire la limite de S_n.

Solution de l'exercice 19 :

(1) La somme S_n n'est pas une somme de Riemann car $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}+\frac{2016}{n^2}}$

(2) On a $\frac{n-k}{n^2+nk} - \frac{n-k}{n^2+nk+2016} = \frac{2016(n-k)}{(n^2+nk)(n^2+nk+2016)}$.

(3) On pose $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n^2+nk} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}$ qui est une somme de Riemann qui converge vers :

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = \int_0^1 \left(-1+\frac{2}{x+1}\right)dx$

$= [-x + 2ln(1+x)]_0^1 = 2ln2 - 1.$

Posons ensuite $w_n = v_n - u_n$ et montrons que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$?

On a : $w_n = v_n - u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k}{n^2+nk} - \frac{n-k}{n^2+nk+2016}\right)$.

D'après la deuxième question on a :

$\frac{n-k}{n^2+nk} - \frac{n-k}{n^2+nk+2016} = \frac{2016(n-k)}{(n^2+nk)(n^2+nk+2016)}$.

Or $1 \leq k \leq n$

alors $0 \leq \frac{2016(n-k)}{(n^2+nk)(n^2+nk+2016)} \leq \frac{2016(n-1)}{(n^2+n)(n^2+n+2016)}$,

c'est-à-dire que :

$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2016(n-k)}{(n^2+nk)(n^2+nk+2016)} \leq \frac{2016n(n-1)}{(n^2+n)(n^2+n+2016)}$,

et par conséquent, $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 2ln2 - 1.}$$

Exercice 20 :

Déterminer la limite de la suite

$$u_n = n^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\left(1^1 2^2 3^3 \dots n^n\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

Indication : montrer que $ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} ln\frac{k}{n}$.

Solution de l'exercice 20 :

Supposons que (d'après l'indication) $ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} ln\frac{k}{n}$ qui est une somme de Riemann qui converge vers : $\int_0^1 xlnx\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 lnx - \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = -\frac{1}{4}$, et par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{-\frac{1}{4}}.}$$

WWW.TALIB24.COM

Noter que la fonction $f(x) = xlnx$ est prolongeable par continuité en 0.

Reste maintenant à démonter la question de l'indication :

D'une part,

$$ln(u_n) = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)lnn + \frac{1}{n^2}ln\left(\prod\prod_{k=1}^{n} k^k\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)lnn + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} klnk.$$

Et d'autre part,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}(lnk - lnn)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}lnk - \frac{lnn}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}lnk - \frac{lnn}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}lnk - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)lnn$$

Conclusion, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}ln\frac{k}{n}}$.

Exercice 21 :

La capacité pulmonaire exprimée en litres de l'être humain suivant son âge x exprimé en années est donnée par la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{110(lnx-2)}{x} \quad \text{pour } x \in [10,90].$$

Déterminer la valeur moyenne de la capacité pulmonaire de 20 à 70 ans, à 0,1 litre près.

Solution de l'exercice 21 :

La valeur moyenne est donnée par la formule :

$$c_m = \frac{1}{70-20}\int_{20}^{70} f(x)\,dx = \frac{11}{5}\int_{20}^{70}\frac{lnx-2}{x}dx = \frac{11}{5}\left[\frac{1}{2}(ln\,x-2)^2\right]_{20}^{70}$$

D'où $c_m \approx 4.5$ litres.

Exercice 22 :

Calculer les limites suivantes :

(1) $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\sin\frac{k\pi}{n}$

X (2) $\left(\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)\right)^{\frac{1}{n}}$ ($a > 0$ *donné*)

(3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$ X

Solution de l'exercice 22 :

1. Pour $n \geq 1$, on a :

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f(x) = x^2\sin(\pi x)$. u_n est donc une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction continue f sur $[0,1]$. Quand n tend vers $+\infty$, le pas $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et on sait que u_n tend vers

$$\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1}{\pi}x\sin(\pi x)\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right)$$
$$= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.$$

2. On peut avoir envie d'écrire :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(\ln(a+k) - \ln k)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{a}{k}\right).$$

La suite de nombres $a, \frac{a}{2}, \ldots, \frac{a}{n}$ est une subdivision (à pas non constant) de $[0, a]$ mais malheureusement son pas $a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$

WWW.TALIB24.COM

ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On n'est pas dans le même type de problèmes.

Rappel. Soit v une suite strictement positive telle que la suite $(\frac{v_{n+1}}{v_n})$ tend vers un réel positif ℓ, alors la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tend encore vers ℓ.

Posons $v_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)$ puis $u_n = \sqrt[n]{v_n}$.

On a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a+n+1}{n+1} \to 1$, et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. Encore une fois, ce n'est pas une somme de Riemann. On tente un encadrement assez large : pour $1 \le k \le n$,

$$\frac{n+k}{n^2+n} \le \frac{n+k}{n^2+k} \le \frac{n+k}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k),$$

et donc ((premier terme + dernier terme)×nombre de termes/2),

$$\frac{1}{n^2+n}\frac{((n+1)+2n)n}{2} \le u_n \le \frac{1}{n^2}\frac{((n+1)+2n)n}{2},$$

et finalement, $\frac{3n+1}{2(n+1)} \le u_n \le \frac{3n+1}{2n}$. Or, $\frac{3n+1}{2(n+1)}$ et $\frac{3n+1}{2n}$ tendent tous deux vers $\frac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

Exercice 23 :

Soit f une fonction de classe C^2 sur [0,1]. Déterminer le réel a tel que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Solution de l'exercice 23 :

Supposons f de classe C^2 sur [0,1]. Soit F une primitive de f sur [0,1]. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_n = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

f est de classe C^2 sur le segment [0,1]. Par suite, $F^{(3)} = f''$ est définie et bornée sur ce segment. En notant M_2 la borne supérieure de $|f''|$ sur [0,1], l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 appliquée Ă F sur le segment [0,1] fournit

$$\left|F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}F''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \frac{(1/n)^3 M_2}{6},$$

et donc,

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}F''\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right| \sum_{k=0}^{n-1}\left|F\left(\frac{k+1}{n}\right)\right.$$
$$\left. - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}F''\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

WWW.TALIB24.COM

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1/n)^3 M_2}{6} = \frac{M_2}{6n^2}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}F''\left(\frac{k}{n}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}F''\left(\frac{k}{n}\right)\right] = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ou enfin, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Maintenant, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right)$.

Or, la fonction f' est continue sur le segment [0,1]. Par suite, la somme de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers

$\int_0^1 f'(t)\,dt = f(1) - f(0)$ et donc :

$$\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n}(f(1) - f(0) + o(1)) = \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finalement, $\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

CHAPITRE N°2 : CALCUL DES PRIMITIVES

RAPPEL DE COURS

DEFINITION :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I et telle que $F' = f$.

PROPRIETE : EXISTENCE DE PRIMITIVES

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet des primitives sur I.

PROPRIETE : ENSEMBLE DES PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel quelconque appartenant à I. Alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble $\left\{x \mapsto \int_a^x f(t)dt + k,\ k \in IR\right\}$.

REMARQUE :

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Soient F et G deux primitives de la fonction f sur l'intervalle I.
Alors F et G diffèrent d'une constante : $F(x) = G(x) + c$

WWW.TALIB24.COM

PROPRIETE :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel quelconque de I. Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule pour $x = a$.

PROPRIETE :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels quelconques de I. Soit F une primitive quelconque de f sur I. Alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Notation : On écrit aussi $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$.

PROPRIETE : LINEARITE DE L'INTEGRALE

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a,b] et α et β deux réels, alors on a :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

PROPRIETE : POSITIVITE DE L'INTEGRALE

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b].
Si $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

PROPRIETE : CROISSANCE DE L'INTEGRALE

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a,b].
Si $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

PROPRIETE : RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b] et soit c un élément de [a,b], alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

PROPRIETE : VALEUR ABSOLUE

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b]. Alors :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx.$$

PROPRIETE : INVERSION DES BORNES

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b]. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

PROPRIETE : INEGALITE DE SCHWARZ

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a,b]. Alors :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

PROPRIETE : INTEGRATION PAR PARTIES

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I. Alors pour tous réels a et b appartenant à I, on a :

$$\int_a^b u(x) \times v'(x)\,dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x)\,dx.$$

Remarque : Cette formule est utile lorsqu'on doit intégrer une fonction de la forme $u(x) \times v'(x)$ et qu'on ne sait pas trouver une primitive de cette fonction alors qu'on sait déterminer une primitive de $u'(x) \times v(x)$.

PROPRIETE : CHANGEMENT DE VARIABLE

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b] et soit φ une bijection à valeur dans [a,b] telle que φ et φ^{-1} sont de classe C^1. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

APPLICATION : CALCUL D'AIRE

WWW.TALIB24.COM

Soit f une fonction continue et positive (respectivement, négative) sur un intervalle [a,b] et D la surface délimitée par la courbe de f, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
Alors : $Aire(D) = \int_a^b f(x)dx$ (respectivement, $Aire(D) = -\int_a^b f(x)dx$).

APPLICATION : CALCUL DE VOLUMES

Soit Σ un solide limité par deux plans orthogonaux à (Oz) d'équations $z=a$ et $z=b$.
Pour tout $z \in [a,b]$, on note $f(z)$ l'aire de la section de Σ avec le plan orthogonal à (Oz) de cote z.
Si la fonction $f: z \mapsto f(z)$ est continue sur l'intervalle [a,b], alors le volume de Σ est donné par la formule : $Volume(\Sigma) = \int_a^b f(z)dz$.

APPLICATION : CALCUL DE VOLUMES ENGENDRES

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a,b]. Alors le volume du solide Σ engendré en faisant tourner la courbe de f autour de l'axe (Ox) est donné par la formule : $Volume(\Sigma) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES :

$\int \frac{1}{x}dx = ln\ \lvert x\rvert$	$\alpha \in \mathbb{R}\{-1\},\ \int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\alpha \in \mathbb{R}^*,\ \int e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\int lnx\, dx = xlnx - x$
$\int cosx\, dx = sinx$	$\int sinx\, dx = -cosx$
$\int tanx\, dx = -ln\ \lvert cosx\rvert$	$\int cotanx\, dx = ln\ \lvert sinx\rvert$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tanx$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -cotanx$
$\int \frac{1}{\sin x}dx = ln\left\lvert tan\frac{x}{2}\right\rvert$	$\int \frac{1}{\cos x}dx = ln\left\lvert tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
$\int chx\, dx = shx$	$\int shx\, dx = chx$

$\int th\, dx = ln\ chx$	$\int cothx\, dx = ln\ \lvert shx\rvert$
$\int \frac{1}{ch^2 x}dx = thx$	$\int \frac{1}{sh^2 x}dx = -cothx$
$\int \frac{1}{sh\, x}dx = ln\left\lvert th\frac{x}{2}\right\rvert$	$\int \frac{1}{ch\, x}dx = 2arctan(e^x)$
$\alpha \neq 0,\ \int \frac{1}{x^2+\alpha^2}dx = \frac{1}{\alpha}arctan\frac{x}{\alpha}$	$\alpha \neq 0,\ \int \frac{1}{x^2-\alpha^2}dx = \frac{1}{2\alpha}ln\left\lvert\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right\rvert$
$\alpha > 0,$ $\int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx = arcsin\frac{x}{\alpha} = -arccos\frac{x}{\alpha}$	$\alpha \neq 0,$ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx = ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert$

WWW.TALIB24.COM

ÉNONCÉ DES EXERCICES

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes en précisant l'intervalle d'intégration :

(1) $f(x) = 4x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}$.

(2) $f(x) = \tan^2 x$.

(3) $f(x) = 3\sin(4x+1)$.

(4) $f(x) = x(5x^2+2)^3$.

(5) $f(x) = \frac{4x^2}{(x^3+1)^2}$.

(6) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$.

Solution de l'exercice 1 :

(1) La fonction F définie par $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ est une primitive de f sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

(2) On peut écrire la fonction f sous la forme $f(x) = 1 + \tan^2 x - 1$. La fonction F définie par $F(x) = \tan x - x$ est donc une primitive de f tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ où $k \in \mathbb{R}$.

(3) La fonction F définie par $F(x) = -\frac{3}{4}\cos(4x+1)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(4) Posons le changement de variable $u = 5x^2 + 2$. On a u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $u' = 10x$.

La fonction f est alors de la forme $f(x) = \frac{1}{10}u'u^3$.

Donc la fonction F définie par

$F(x) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4}u^4 = \frac{1}{40}(5x^2+2)^4$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(5) Posons le changement de variable $u = x^3 + 1$. On a u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et on a : $u' = 3x^2$.

La fonction f est alors de la forme $f(x) = \frac{4}{3}\frac{u'}{u^2}$.

Donc la fonction F définie par

$$F(x) = \frac{4}{3} \times \frac{-1}{u} = -\frac{4}{3}\frac{1}{x^3+1}$$

est une primitive de f sur les intervalles $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

(6) Posons le changement de variable $u = \ln x$. On a u est dérivable sur $]0; +\infty[$ strictement positive sur $]1; +\infty[$ et strictement négative sur $]0; 1[$ et $u' = \frac{1}{x}$.

La fonction f est alors de la forme $f(x) = \frac{u'}{u^2}$.

Donc la fonction F définie par $F(x) = \ln u = \ln\ln x$ est une primitive de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$ et la fonction G définie par $G(x) = \ln(-u) = \ln(-\ln x)$ est une primitive de f sur $]0; 1[$.

Exercice 2 :

Quelle est la primitive de la fonction suivante ?

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^4 x}dx.$$

Solution de l'exercice 2 :

Il est inutile ici de transformer les expressions trigonométriques ou de les linéariser.

En effet, il suffit de remarquer que cette primitive est de la forme : $\int \frac{u'}{u^4}dx$. En consultant la table des primitives on en déduit instantanément que :

$$\boxed{\int \frac{\sin(x)}{\cos^4 x}dx = \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x} + k.}$$

Remarque : En posant le changement de variable $u = \cos x$ on a : $du = -\sin x\, dx$ et on obtient :

WWW.TALIB24.COM

Soit f une fonction continue et positive (respectivement, négative) sur un intervalle [a,b] et D la surface délimitée par la courbe de f, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
Alors : $Aire(D) = \int_a^b f(x)dx$ (respectivement, $Aire(D) = -\int_a^b f(x)dx$).

APPLICATION : CALCUL DE VOLUMES

Soit Σ un solide limité par deux plans orthogonaux à (Oz) d'équations $z=a$ et $z=b$.
Pour tout $z \in [a,b]$, on note $f(z)$ l'aire de la section de Σ avec le plan orthogonal à (Oz) de cote z.
Si la fonction $f: z \mapsto f(z)$ est continue sur l'intervalle [a,b], alors le volume de Σ est donné par la formule : $Volume(\Sigma) = \int_a^b f(z)dz$.

APPLICATION : CALCUL DE VOLUMES ENGENDRES

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a,b]. Alors le volume du solide Σ engendré en faisant tourner la courbe de f autour de l'axe (Ox) est donné par la formule : $Volume(\Sigma) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES :

$\int \frac{1}{x}dx = ln\ \lvert x\rvert$	$\alpha \in \mathbb{R}\{-1\},\ \int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\alpha \in \mathbb{R}^*,\ \int e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\int lnx\, dx = xlnx - x$
$\int cosx\, dx = sinx$	$\int sinx\, dx = -cosx$
$\int tanx\, dx = -ln\ \lvert cosx\rvert$	$\int cotanx\, dx = ln\ \lvert sinx\rvert$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tanx$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -cotanx$
$\int \frac{1}{\sin x}dx = ln\left\lvert tan\frac{x}{2}\right\rvert$	$\int \frac{1}{\cos x}dx = ln\left\lvert tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
$\int chx\, dx = shx$	$\int shx\, dx = chx$

$\int th\, dx = ln\ chx$	$\int cothx\, dx = ln\ \lvert shx\rvert$
$\int \frac{1}{ch^2 x}dx = thx$	$\int \frac{1}{sh^2 x}dx = -cothx$
$\int \frac{1}{sh\, x}dx = ln\left\lvert th\frac{x}{2}\right\rvert$	$\int \frac{1}{ch\, x}dx = 2arctan(e^x)$
$\alpha \neq 0,\ \int \frac{1}{x^2+\alpha^2}dx = \frac{1}{\alpha}arctan\frac{x}{\alpha}$	$\alpha \neq 0,\ \int \frac{1}{x^2-\alpha^2}dx = \frac{1}{2\alpha}ln\left\lvert\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right\rvert$
$\alpha > 0,$ $\int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx = arcsin\frac{x}{\alpha} = -arccos\frac{x}{\alpha}$	$\alpha \neq 0,$ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx = ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert$

WWW.TALIB24.COM

ÉNONCÉ DES EXERCICES

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes en précisant l'intervalle d'intégration :

(1) $f(x) = 4x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}$.
(2) $f(x) = \tan^2 x$.
(3) $f(x) = 3\sin(4x+1)$.
(4) $f(x) = x(5x^2+2)^3$.
(5) $f(x) = \frac{4x^2}{(x^3+1)^2}$.
(6) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$.

Solution de l'exercice 1 :

(1) La fonction F définie par $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ est une primitive de f sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

(2) On peut écrire la fonction f sous la forme $f(x) = 1 + \tan^2 x - 1$. La fonction F définie par $F(x) = \tan x - x$ est donc une primitive de f tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ où $k \in \mathbb{R}$.

(3) La fonction F définie par $F(x) = -\frac{3}{4}\cos(4x+1)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(4) Posons le changement de variable $u = 5x^2 + 2$. On a u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $u' = 10x$.
La fonction f est alors de la forme $f(x) = \frac{1}{10}u'u^3$.
Donc la fonction F définie par
$F(x) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4}u^4 = \frac{1}{40}(5x^2+2)^4$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(5) Posons le changement de variable $u = x^3 + 1$. On a u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et on a : $u' = 3x^2$.
La fonction f est alors de la forme $f(x) = \frac{4}{3}\frac{u'}{u^2}$.
Donc la fonction F définie par

$$F(x) = \frac{4}{3} \times \frac{-1}{u} = -\frac{4}{3}\frac{1}{x^3+1}$$

est une primitive de f sur les intervalles $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

(6) Posons le changement de variable $u = \ln x$. On a u est dérivable sur $]0; +\infty[$ strictement positive sur $]1; +\infty[$ et strictement négative sur $]0; 1[$ et $u' = \frac{1}{x}$.
La fonction f est alors de la forme $f(x) = \frac{u'}{u^2}$.
Donc la fonction F définie par $F(x) = \ln u = \ln\ln x$ est une primitive de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$ et la fonction G définie par $G(x) = \ln(-u) = \ln(-\ln x)$ est une primitive de f sur $]0; 1[$.

Exercice 2 :

Quelle est la primitive de la fonction suivante ?

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^4 x}dx.$$

Solution de l'exercice 2 :

Il est inutile ici de transformer les expressions trigonométriques ou de les linéariser.
En effet, il suffit de remarquer que cette primitive est de la forme : $\int \frac{u'}{u^4}dx$. En consultant la table des primitives on en déduit instantanément que :

$$\boxed{\int \frac{\sin(x)}{\cos^4 x}dx = \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x} + k.}$$

Remarque : En posant le changement de variable $u = \cos x$ on a : $du = -\sin x\, dx$ et on obtient :

WWW.TALIB24.COM

$$\boxed{\int \frac{\sin(x)}{\cos^4 x}dx = \int \frac{-du}{u^4}dx = \frac{1}{3}\frac{1}{u^3} + k = \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x} + k.}$$

Exercice 3 :

Quelle est la primitive de la fonction suivante ?

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+1}dx.$$

Solution de l'exercice 3 :

Il est encore inutile ici de transformer les expressions trigonométriques ou de linéariser.

En effet cette primitive est de la forme : $\int \frac{w}{u^2+1}dx$. En consultant la table des primitives on en déduit instantanément que :

$$\boxed{\int \frac{\cos(x)}{\sin^2 x + 1}dx = \arctan \sin x + k.}$$

Remarque : En posant le changement de variable $u = \sin x$ on a : $du = \cos x\, dx$ et on obtient :

$$\boxed{\int \frac{\cos(x)}{\sin^2 x + 1}dx = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + k = \arctan \sin x + k.}$$

Exercice 4 :

En utilisant une intégration par parties, calculer les primitives des fonctions suivantes :

(1) $I_1 = \int \frac{\ln(x)}{x}dx.$

(2) $I_2 = \int \sin(x)\cos(x)dx.$

(3) $I_3 = \int \sin^2(x)\cos(x)dx.$

(4) $I_4 = \int \cos^2(x)\sin(x)dx.$

Solution de l'exercice 4 :

(1) **Calcul de $I_1 = \int \frac{\ln(x)}{x}dx$:**

En effet, il suffit de remarquer que cette primitive est de la forme : $\int uu'\,dx$ et on en déduit instantanément que :

$$\boxed{I_1 = \int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2(x) + k.}$$

(2) **Calcul de $I_2 = \int \sin(x)\cos(x)dx$:**

On remarquer que cette primitive est de la forme : $\int uu'\,dx$ et on en déduit que :

$$\boxed{I_2 = \int \sin(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + k.}$$

Remarque : on peut écrire : $I_2 = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + k.$

(3) **Calcul de $I_3 = \int \sin^2(x)\cos(x)dx$:**

Cette primitive est de la forme : $\int uu'\,dx$, on en déduit que :

$$\boxed{I_3 = \int \sin^2(x)\cos(x)dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + k.}$$

(4) **Calcul de $I_4 = \int \cos^2(x)\sin(x)dx$:**

Cette primitive est de la forme : $\int uu'\,dx$, on en déduit que :

$$\boxed{I_4 = \int \cos^2(x)\sin(x)dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + k.}$$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 5 :

En utilisant un changement de variable, calculer les primitives des fonctions suivantes :

(1) $I_1 = \int \frac{\ln(x)}{x} dx.$

(2) $I_2 = \int \sin x \cos x \, dx.$

(3) $I_3 = \int \sin^2 x \cos x \, dx.$

(4) $I_4 = \int \sin x \cos^2 x \, dx.$

Solution de l'exercice 5 :

(1) Calcul de $I_1 = \int \frac{\ln(x)}{x} dx$:

En posant le changement de variable $u = \ln x$ on a : $du = \frac{dx}{x}$ et on obtient :

$$\boxed{I_1 = \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + k = \frac{1}{2}\ln^2(x) + k.}$$

(2) Calcul de $I_2 = \int \sin x \cos x \, dx$:

En posant le changement de variable $u = \sin x$ on a : $du = \cos x \, dx$. On écrit :

$$\boxed{I_2 = \int \sin x \cos x \, dx = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + k = \frac{1}{2}\sin^2 x + k.}$$

Remarque : on peut poser le changement de variable $u = \cos x$.

(3) Calcul de $I_3 = \int \sin^2 x \cos x \, dx$:

Soit le changement de variable $u = \sin x$. Alors on a : $du = \cos x \, dx$ et on obtient :

$$\boxed{I_3 = \int \sin^2 x \cos x \, dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + k = \frac{1}{3}\sin^3 x + k.}$$

(4) Calcul de $I_4 = \int \sin x \cos^2 x \, dx$:

En posant le changement de variable $u = \cos x$ on a : $du = -\sin x \, dx$ et on obtient :

$$\boxed{I_4 = \int \sin x \cos^2 x \, dx = -\int u^2 du = -\frac{1}{3}u^3 + k = -\frac{1}{3}\cos^3 x + k.}$$

Exercice 6 :

Calculer les primitives des fonctions suivantes sans passer par un changement de variable :

(1) $I_1 = \int \tan(x) dx.$

(2) $I_2 = \int \frac{x}{1+x^2} dx.$

(3) $I_3 = \int \frac{6x+7}{3x^2+7x-13} dx.$

Solution de l'exercice 6 :

(1) Calcul de $I_1 = \int \tan(x) dx$:

On remarquer que cette primitive est de la forme : $\int \frac{u'}{u} dx$ et on en déduit que :

$$\boxed{I_1 = \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \ln|\cos(x)| + k.}$$

(2) Calcul de $I_2 = \int \frac{x}{1+x^2} dx$:

Cette primitive est de la forme : $\int \frac{u'}{u} dx$ et on en déduit que :

$$\boxed{I_2 = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k.}$$

Remarque : l'expression $1+x^2$ est toujours strictement positive.

(3) Calcul de $I_3 = \int \frac{6x+7}{3x^2+7x-13} dx$:

Il est inutile ici de partir dans une décomposition en éléments simples, une factorisation ou un changement de variable. En effet cette primitive est

WWW.TALIB24.COM

simplement de la forme : $\int \frac{u'}{u} dx$ et on en déduit donc que :

$$\boxed{I_3 = \int \frac{6x+7}{3x^2+7x-13} dx = ln(3x^2+7x-13) + k.}$$

Remarque : l'expression $3x^2 + 7x - 13$ est toujours strictement positive.

Exercice 7 :

En utilisant un changement de variable, calculer les primitives des fonctions suivantes :

(1) $I_1 = \int \tan(x) dx.$

(2) $I_2 = \int \frac{x}{1+x^2} dx.$

(3) $I_3 = \int \frac{6x+7}{3x^2+7x-13} dx.$

Solution de l'exercice 7 :

(1) Calcul de $I_1 = \int \tan(x) dx$:

En posant le changement de variable $u = cos\, x$ on a : $du = -\sin x\, dx$ et on obtient :

$$\boxed{I_1 = \int \tan(x) dx = \int \frac{sin(x)}{cos(x)} dx = \int \frac{-du}{u} = ln\,|\cos(x)| + k.}$$

(2) Calcul de $I_2 = \int \frac{x}{1+x^2} dx$:

Soit le changement de variable $u = 1 + x^2 > 0$. Alors on a : $du = 2xdx$ et on obtient :

$$\boxed{I_2 = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} ln(u) + k = \frac{1}{2} ln(1+x^2) + k.}$$

(3) Calcul de $I_3 = \int \frac{6x+7}{3x^2+7x-13} dx$:

En posant le changement de variable $u = 3x^2 + 7x - 13 > 0$ on a : $du = 6x + 7dx$ et on obtient :

$$\boxed{I_3 = \int \frac{6x+7}{3x^2+7x-13} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + k = ln(3x^2+7x-13) + k.}$$

Exercice 8 :

En utilisant une intégration par parties, calculer :

(1) $I_1 = \int xlnx\, dx.$

(2) $I_2 = \int xe^x\, dx.$

(3) $I_3 = \int xsinx\, dx.$

(4) $I_4 = \int x\cos x\, dx.$

Solution de l'exercice 8 :

(1) Calcul de $I_1 = \int xlnx\, dx$:

On choisit u' et v tel que : $\begin{cases} u' = x \\ v = lnx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2}x^2 \\ v' = \frac{1}{x} \end{cases}$, on en déduit :

$$\boxed{I_1 = \int xlnx\, dx = \frac{1}{2}x^2 lnx - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 lnx - \frac{1}{4}x^2 + k.}$$

(2) Calcul de $I_2 = \int xe^x\, dx$:

On choisit u' et v tel que : $\begin{cases} u' = e^x \\ v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = e^x \\ v' = 1 \end{cases}$, on en déduit :

$$\boxed{I_2 = \int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + k.}$$

(3) Calcul de $I_3 = \int xsinx\, dx$:

On choisit u' et v tel que : $\begin{cases} u' = sinx \\ v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -cosx \\ v' = 1 \end{cases}$, on en déduit :

$$\boxed{I_3 = \int xsinx\, dx = -xcosx + \int cosx\, dx = -xcosx + sinx + k.}$$

(4) Calcul de $I_4 = \int xcosx\, dx$:

On choisit u' et v tel que : $\begin{cases} u' = cosx \\ v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = sinx \\ v' = 1 \end{cases}$, on en déduit :

WWW.TALIB24.COM

$$\boxed{I_4 = \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + k.}$$

Exercice 9 :

En utilisant une intégration par parties, calculer :

(1) $I_1 = \int \ln(x)dx.$

(2) $I_2 = \int \arctan x\,dx.$

(3) $I_3 = \int \arcsin x\,dx.$

(4) $I_4 = \int \arccos x\,dx.$

Solution de l'exercice 9 :

(1) Calcul de $I_1 = \int \ln x\,dx$:

On choisit u' et v tel que :

$\begin{cases} u' = 1 \\ v = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v' = \frac{1}{x} \end{cases}$, on en déduit :

$$\boxed{I_1 = \int \ln x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + k.}$$

(2) Calcul de $I_2 = \int \arctan(x)dx$:

On choisit u' et v tel que :

$\begin{cases} u' = 1 \\ v = \arctan(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v' = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$, on en déduit:

$$\boxed{\begin{aligned} I_2 &= \int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k. \end{aligned}}$$

(3) Calcul de $I_3 = \int \arcsin(x)dx$:

On choisit u' et v tel que : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \arcsin(x) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} u = x \\ v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$, on en déduit:

$$\boxed{\begin{aligned} I_3 &= \int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + k. \end{aligned}}$$

(4) Calcul de $I_4 = \int \arccos(x)dx$:

On choisit u' et v tel que : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \arccos(x) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} u = x \\ v' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$, on en déduit:

$$\boxed{\begin{aligned} I_4 &= \int \arccos x\,dx = x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + k. \end{aligned}}$$

Exercice 10 :

En utilisant une intégration par parties, calculer :

(1) $I_1 = \int x^2 \sin x\,dx.$

(2) $I_2 = \int x^2 \cos x\,dx.$

(3) $I_3 = \int x^2 e^x dx.$

(4) $I_4 = \int x^2 \ln x dx.$

(5) $I_5 = \int \cos x e^x\,dx$ et $I_6 = \int \sin x e^x\,dx.$

Solution de l'exercice 10 :

(1) Calcul de $I_1 = \int x^2 \sin x\,dx$:

On choisit u' et v tel que :

$\begin{cases} u' = \sin x \\ v = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\cos x \\ v' = 2x \end{cases}$,

on en déduit :

$$I_1 = \int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx.$$

Pour calculer la deuxième intégrale, on réutilise une autre une intégration par parties, cette fois en choisissant u' et v tel que :

$\begin{cases} u' = \cos x \\ v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \sin x \\ v' = 1 \end{cases}$,

on en déduit :

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + k.$$

Et par conséquent,

$$\boxed{I_1 = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + k.}$$

WWW.TALIB24.COM

(2) Calcul de $I_2 = \int x^2 cosx\, dx$:

On choisit u' et v tel que :

$$\begin{cases} u' = cosx \\ v = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = sinx \\ v' = 2x \end{cases},$$

on en déduit :

$$I_2 = \int x^2 cosx\, dx = x^2 sinx - 2\int xsinx\, dx.$$

Pour calculer la deuxième intégrale, on réutilise une autre une intégration par parties, cette fois en choisissant u' et v tel que :

$$\begin{cases} u' = sinx \\ v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -cosx \\ v' = 1 \end{cases},$$

on en déduit :

$$\int xsinx\, dx = -xcosx + \int cosx\, dx$$
$$= -xcosx + sinx + k.$$

Et par conséquent,

$$\boxed{I_2 = x^2 sinx + 2xcosx - 2sinx + k.}$$

(3) Calcul de $I_3 = \int x^2 e^x\, dx$:

On choisit u' et v tel que :

$$\begin{cases} u' = e^x \\ v = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = e^x \\ v' = 2x \end{cases},$$

on en déduit :

$$I_3 = \int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int xe^x\, dx.$$

Pour calculer la deuxième intégrale, on réutilise une autre une intégration par parties, cette fois en choisissant u' et v tel que : $\begin{cases} u' = e^x \\ v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = e^x \\ v' = 1 \end{cases}$, on en déduit :

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + k.$$

Et par conséquent,

$$\boxed{I_3 = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + k.}$$

(4) Calcul de $I_4 = \int x^2 lnx\, dx$:

On choisit u' et v tel que :

$$\begin{cases} u' = x^2 \\ v = lnx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{3}x^3 \\ v' = \frac{1}{x} \end{cases},$$

on en déduit :

$$\boxed{I_4 = \int x^2 lnx\, dx = \frac{1}{3}x^3 lnx - \frac{1}{3}\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 lnx - \frac{1}{9}x^3 + k.}$$

(5) Calcul de $I_5 = \int cosxe^x\, dx$ et $I_6 = \int sinxe^x\, dx$

Pour calculer I_5, on choisit u' et v tel que :

$\begin{cases} u' = e^x \\ v = cosx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = e^x \\ v' = -sinx \end{cases}$, on en déduit que :

$$I_5 = \int cosxe^x\, dx = cosxe^x + \int sinxe^x\, dx = cosxe^x + I_6. \quad (1)$$

Pour calculer I_6, on choisit u' et v tel que :

$$\begin{cases} u' = e^x \\ v = sinx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = e^x \\ v' = cosx \end{cases},$$

on en déduit que :

$$I_6 = \int sinxe^x\, dx = sinxe^x - \int cosxe^x\, dx = sinxe^x - I_5. \quad (2)$$

A partir de (1) et (2), on en déduit que :

$$\boxed{\begin{cases} I_5 = \dfrac{sinx + cosx}{2}e^x \\ I_6 = \dfrac{sinx - cosx}{2}e^x \end{cases}}$$

Exercice 11 :

En utilisant une intégration par parties, calculer :

(1) $I_1 = \int ln\, xdx.$

(2) $I_2 = \int ln^2\, xdx.$

(3) $I_3 = \int ln^3\, xdx.$

(4) $I_3 = \int ln^4\, xdx.$

Solution de l'exercice 11 :

(1) Calcul de $I_1 = \int lnx\, dx$:

On choisit u' et v tel que :

WWW.TALIB24.COM

$\begin{cases} u' = 1 \\ v = lnx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v' = \frac{1}{x} \end{cases}$

on en déduit :

$$\boxed{I_1 = \int lnx\, dx = xlnx - \int 1\, dx = xlnx - x + k.}$$

(2) Calcul de $I_2 = \int ln^2 x\, dx$:

On choisit u' et v tel que :

$\begin{cases} u' = 1 \\ v = ln^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v' = 2\frac{lnx}{x} \end{cases}$

on en déduit :

$$I_2 = \int ln^2 x\, dx = x\, ln^2 x - 2I_1,$$

et par conséquent,

$$\boxed{I_2 = \int ln^2 x\, dx = x\, ln^2 x - 2xlnx + 2x + k.}$$

(3) Calcul de $I_3 = \int ln^3 x\, dx$:

On choisit u' et v tel que :

$\begin{cases} u' = 1 \\ v = ln^3 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v' = 3\frac{ln^2 x}{x} \end{cases}$

on en déduit :

$$I_3 = \int ln^3 x\, dx = x\, ln^3 x - 3I_2,$$

et par conséquent,

$$\boxed{I_3 = \int ln^3 x\, dx = x\, ln^3 x - 3x\, ln^2 x + 6xlnx - 6x + k.}$$

(4) Calcul de $I_4 = \int ln^4 x\, dx$:

On choisit u' et v tel que :

$\begin{cases} u' = 1 \\ v = ln^4 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v' = 4\frac{ln^3 x}{x} \end{cases}$

on en déduit :

$$I_4 = \int ln^4 x\, dx = x\, ln^4 x - 4I_3,$$

et par conséquent,

$$\boxed{I_4 = \int ln^4 x\, dx = x\, ln^4 x - 4x\, ln^3 x + 12x\, ln^2 x - 24xlnx + 24x + k.}$$

Exercice 12 :

En utilisant un changement de variable, calculer :

(1) $I_1 = \int x\sqrt{1+x^2}\, dx.$

(2) $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

(3) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin x\, dx.$

Solution de l'exercice 12 :

(1) Calcul de $I_1 = \int x\sqrt{1+x^2}\, dx$:

Posons le changement de variable $u = 1 + x^2 \Leftrightarrow du = 2xdx$, d'où :

$$\boxed{I_1 = \int x\sqrt{1+x^2}\, dx = \int \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + k = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + k.}$$

(2) Calcul de $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

Posons le changement de variable $x = sint \Leftrightarrow t = arcsinx$, avec $x \in]-1,1[$ ou $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $dx = costdt$, d'où :

$$\boxed{I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{costdt}{\sqrt{1-sin^2 t}} = \int \frac{costdt}{|cost|} = t + k = arcsinx + k.}$$

Remarque : $\sqrt{1-sin^2 t} = |cost| = cost$ pour $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(3) Calcul de $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} cos^2 x\, sin\, x\, dx$:

Soit le changement de variable

$u = cosx \Leftrightarrow du = -sinxdx$, avec $u_1 = \cos 0 = 1$ et $u_2 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Alors on a :

WWW.TALIB24.COM

$$\boxed{I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin x \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} u^2(-du) = \left[-\frac{u^3}{3}\right]_1^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{24}.}$$

Exercice 13 : Intégrales de fonctions rationnelles (1)

Calculer les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

(4) $I_1 = \int \frac{1}{x(x+1)} dx.$

(5) $I_2 = \int \frac{x}{x^2-1} dx.$

(6) $I_3 = \int \frac{2x+3}{x^2-5x+6} dx$

(7) $I_4 = \int \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx.$

Solution de l'exercice 13 :

(1) Calcul de $I_1 = \int \frac{1}{x(1+x)} dx$:

Pour calculer cette intégrale on décompose la fraction rationnelle $F: x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ en éléments simples, le dénominateur n'étant pas irréductible. On sait que cette fraction rationnelle se décompose avec des dénominateurs de degré 1 et des constantes aux numérateurs, c'est-à-dire, $F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ avec,

$$\begin{cases} a = xF(x)|_{x=0} = \frac{1}{0+1} = 1 \\ b = (x+1)F(x)|_{x=-1} = \frac{1}{-1} = -1 \end{cases}$$

Ce qui donne : $F(x) = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}$.

Le premier terme s'intègre comme $ln|x|$ et le second comme $-\ln(|x+1|)$.

On trouve finalement :

$$\boxed{I_1 = \int \frac{1}{x(1+x)} dx = ln|x| - ln(|x+1|) + k = ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) + k.}$$

(2) Calcul de $I_2 = \int \frac{x}{x^2-1} dx$:

On écrit la fraction rationnelle $F: x \mapsto \frac{x}{(x-1)(x+1)}$ en éléments simples :

$F(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ avec,

$$\begin{cases} a = (x-1)F(x)|_{x=1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ b = (x+1)F(x)|_{x=-1} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ce qui donne : $F(x) = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{-1}{2(x+1)}$.

Le premier terme s'intègre comme $\frac{1}{2} ln|x-1|$ et le second comme $\frac{1}{2}\ln(|x+1|)$. On trouve finalement :

$$\boxed{I_2 = \int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} ln(|x^2-1|) + k.}$$

(3) Calcul de $I_2 = \int \frac{2x+3}{x^2-5x+6} dx$:

Pour calculer cette intégrale on décompose la fraction rationnelle

$F: x \mapsto \frac{2x+3}{x^2-5x+6} = \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}$ en éléments simples :

$F(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}$ avec,

$$\begin{cases} a = (x-2)F(x)|_{x=2} = \frac{2\times 2+3}{2-3} = -7 \\ b = (x-3)F(x)|_{x=3} = \frac{2\times 3+3}{3-2} = 9 \end{cases}$$

Ce qui donne : $F(x) = \frac{-7}{x-2} + \frac{9}{x-3}$.

Le premier terme s'intègre comme $-7ln|x-2|$ et le second comme $9\ln(|x-3|)$. On trouve finalement :

$$\boxed{I_3 = \int \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)} dx = -7ln(|x-2|) + 9ln(|x-3|) + k.}$$

(4) Calcul de $I_4 = \int \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx$:

On écrit la fraction rationnelle $F: x \mapsto \frac{3x^2}{x(x-1)(x-2)}$ en éléments simples :

$F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$ avec,

WWW.TALIB24.COM

$$\begin{cases} a = xF(x)|_{x=0} = \frac{1}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2} \\ b = (x-1)F(x)|_{x=1} = \frac{1}{1(1-2)} = -1 \\ c = (x-2)F(x)|_{x=2} = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ce qui donne : $F(x) = \frac{1}{2x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{2(x-2)}$.

Par intégration nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}ln|x| + k_1 \\ \int \frac{1}{x-1}dx = ln|x-1| + k_2 \\ \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}dx = \frac{1}{2}ln|x-2| + k_3 \end{cases}$$

On trouve finalement :

$$\boxed{I_4 = \int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}dx = \frac{1}{2}ln(|x|) - ln|x-1| + \frac{1}{2}ln|x-2| + k.}$$

Exercice 14 : Intégrales de fonctions rationnelles (2)

Calculer les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

(1) $I_1 = \int \frac{1}{x^2(1+x)}dx.$

(2) $I_2 = \int \frac{1}{x(x+1)^2}dx.$

(3) $I_3 = \int \frac{1}{x^2(x-2)^2}dx.$

Solution de l'exercice 14 :

(1) Calcul de $I_1 = \int \frac{1}{x^2(x+1)}dx$:

On écrit la fraction rationnelle $F: x \mapsto \frac{1}{x^2(x+1)}$ en éléments simples :

$F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$ avec,

$$\begin{cases} b = x^2F(x)|_{x=0} = \frac{1}{0+1} = 1 \\ c = (x+1)F(x)|_{x=-1} = \frac{1}{(-1)^2} = 1 \end{cases}$$

Pour calculer a, on a d'une part $F(1) = \frac{1}{1^2(1+1)} = \frac{1}{2}$, et d'autre part on a $F(1) = \frac{a}{1} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1+1}$. Ce qui donne $a = -1$.

Et par conséquent, $F(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$.

Par intégration nous obtenons :

$$\begin{cases} -\int \frac{1}{x}dx = -ln|x| + k_1 \\ \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + k_2 \\ \int \frac{1}{x+1}dx = ln|x+1| + k_3 \end{cases}$$

On trouve finalement :

$$\boxed{I_2 = \int \frac{1}{x^2(1+x)}dx = -ln(|x|) - \frac{1}{x} + ln|x+1| + k.}$$

Remarque : Une autre méthode pour calculer a et b consiste à considérer la fonction $G(x) = x^2F(x) = \frac{1}{x+1}$.

Alors on a:

$$\begin{cases} b = G(0) = 1 \\ a = G'(0) = \frac{-1}{(0+1)^2} = -1 \end{cases}$$

(2) Calcul de $I_2 = \int \frac{1}{x(x+1)^2}dx$:

On écrit la fraction rationnelle $F: x \mapsto \frac{1}{x(x+1)^2}$ en éléments simples :

$F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$ avec,

$$\begin{cases} a = xF(x)|_{x=0} = \frac{1}{(0+1)^2} = 1 \\ c = (x+1)^2F(x)|_{x=-1} = \frac{1}{-1} = -1 \end{cases}$$

Pour calculer b, on a d'une part $F(1) = \frac{1}{1(1+1)^2} = \frac{1}{4}$, et d'autre part on a $F(1) = \frac{1}{1} + \frac{b}{1+1} + \frac{-1}{(1+1)^2}$.

WWW.TALIB24.COM

Ce qui donne $b = -1$.

Et par conséquent, $F(x) = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}$.

Par intégration nous obtenons :

$$\begin{cases} \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + k_1 \\ \int \frac{-1}{x+1} dx = -ln|x+1| + k_2 \\ \int \frac{-1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{x+1} + k_3 \end{cases}$$

On trouve finalement :

$$\boxed{I_2 = \int \frac{1}{x(1+x)^2} dx = ln(|x|) - ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + k.}$$

Remarque : Une autre méthode pour calculer b et c consiste à considérer la fonction $G(x) = (x+1)^2 F(x) = \frac{1}{x}$.

Alors on a:

$$\begin{cases} c = G(-1) = -1 \\ b = G'(-1) = \frac{-1}{(-1)^2} = -1 \end{cases}$$

(3) Calcul de $I_2 = \int \frac{1}{x^2(x-2)^2} dx$:

On écrit la fraction rationnelle $F: x \mapsto \frac{1}{x^2(x-2)^2}$ en éléments simples :

$F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}$ avec,

$$\begin{cases} b = x^2 F(x)|_{x=0} = \frac{1}{(0-2)^2} = \frac{1}{4} \\ d = (x-2)^2 F(x)|_{x=2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Pour calculer a et c :

On a d'une part, $\begin{cases} F(1) = \frac{1}{1^2(1-2)^2} = 1 \\ F(1) = \frac{a}{1} + \frac{1/4}{1^2} + \frac{c}{1-2} + \frac{1/4}{(1-2)^2} \end{cases}$

ce qui donne, $a - c + \frac{1}{2} = 1$ (1)

d'autre part, $\begin{cases} F(-1) = \frac{1}{(-1)^2(-1-2)^2} = \frac{1}{9} \\ F(-1) = \frac{a}{-1} + \frac{1/4}{(-1)^2} + \frac{c}{-1-2} + \frac{1/4}{(-1-2)^2} \end{cases}$

ce qui donne, $-a - \frac{c}{3} + \frac{5}{18} = \frac{1}{9}$ (2)

Les relations (1) et (2) donnent, $a = \frac{1}{4}$ et $c = -\frac{1}{4}$.

Et par conséquent, $F(x) = \frac{1/4}{x} + \frac{1/4}{x^2} + \frac{-1/4}{x-2} + \frac{1/4}{(x-2)^2}$.

Par intégration nous obtenons :

$$\begin{cases} \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + k_1 \\ \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + k_2 \\ \int \frac{1}{x-2} dx = ln|x-2| + k_3 \\ \int \frac{1}{(x-2)^2} dx = -\frac{1}{x-2} + k_4 \end{cases}$$

On trouve finalement :

$$\boxed{I_4 = \int \frac{1}{x^2(x-2)^2} dx = \frac{1}{4} ln(|x|) - \frac{1}{4x} - \frac{1}{4} ln|x-2| - \frac{1}{4(x+1)} + k.}$$

Remarque 1 : Une autre méthode pour calculer a et b consiste à considérer la fonction $G(x) = x^2 F(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$. Alors on a:

$$\begin{cases} b = G(0) = \frac{1}{(0-2)^2} = \frac{1}{4} \\ a = G'(0) = \frac{-2}{(0-2)^3} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Remarque 2 : Une autre méthode pour calculer c et d consiste à considérer la fonction $H(x) = (x-2)^2 F(x) = \frac{1}{x^2}$. Alors on a:

$$\begin{cases} d = H(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \\ c = H'(2) = \frac{-2}{2^3} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 15 : Intégrales de fonctions rationnelles (3)

Calculer les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

(1) $I_1 = \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx.$

(2) $I_2 = \int \frac{1}{x^2(x^2+2x+2)} dx.$

Solution de l'exercice 15 :

(1) Calcul de $I_1 = \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$:

On écrit la fraction rationnelle $F: x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$ en éléments simples :

$F(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.

Calcul de a : $a = xF(x)|_{x=0} = \frac{1}{0^2+1} = 1.$

Calcul de b : $lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0 = a + b$, ce qui donne, $b = -1$.

Calcul de c : $F(1) = \frac{1}{1(1^2+1)} = \frac{a}{1} + \frac{b+c}{1^2+1}$, ce qui donne, $c = 0$.

Et par conséquent, $F(x) = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}$.

Par intégration nous obtenons :

$$\begin{cases} \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + k_1 \\ \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + k_2 \end{cases}$$

On trouve finalement :

$$\boxed{I_1 = \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = ln(|x|) - \frac{1}{2} ln|x^2+1| + k.}$$

(2) Calcul de $I_1 = \int \frac{1}{x^2(x^2+2x+2)} dx$:

On écrit la fraction rationnelle $F: x \mapsto \frac{1}{x^2(x^2+2x+2)}$ en éléments simples :

$F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2}$.

Calcul de a et b : On considère la fonction

$$G(x) = x^2F(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}.$$

Alors on a:

$$\begin{cases} b = G(0) = \frac{1}{0^2+2\times0+2} = \frac{1}{2} \\ a = G'(0) = \frac{-1(2\times0+2)}{(0^2+2\times0+2)^2} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Remarque :On peut calculer b comme suit : $b = x^2F(x)|_{x=0} = \frac{1}{0^2+2\times0+2} = \frac{1}{2}$.

Calcul de c : $lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0 = a + c$, ce qui donne, $c = \frac{1}{2}$.

Calcul de d : $F(1) = \frac{1}{1^2(1^2+2\times1+2)} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1^2} + \frac{c\times1+d}{1^2+2\times1+2}$, ce qui donne, $d = \frac{1}{2}$.

Et par conséquent, $F(x) = \frac{-1/2}{x} + \frac{1/2}{x^2} + \frac{1/2x+1/2}{x^2+2x+2}$.

Par intégration nous obtenons :

$$\begin{cases} \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + k_1 \\ \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} + k_2 \\ \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} ln(x^2+2x+2) + k_3 \end{cases}$$

On trouve finalement :

$$\boxed{I_2 = \int \frac{1}{x^2(x^2+2x+2)} dx = -\frac{1}{2} ln(|x|) - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{4} ln(x^2+2x+2) + k.}$$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 16 :

Quelles sont les primitives des fonctions suivantes ?

(1) $I_1 = \int \frac{1}{x^2+1} dx.$

(2) $I_2 = \int \frac{1}{x^2+x+1} dx.$

(3) $I_3 = \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx.$

(4) $I_4 = \int \frac{1}{4x^2+8x+8} dx.$

(5) $I_5 = \int \frac{1}{x^2-4x+8} dx.$

Solution de l'exercice 16 :

(1) La réponse est immédiate en consultant la table des primitives :

$$\boxed{I_1 = \int \frac{1}{x^2+1} dx = arctan\, x + k.}$$

(2) D'une manière générale, on commence à écrire le dénominateur sous sa forme canonique, puis on procède à un changement de variable afin de reconnaître la dérivée de la fonction ***arctan***.

(a) On écrit le dénominateur sous sa forme canonique :

$x^2 + x + 1 = (x + a)^2 + b$. Ici, on trouve $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{4}$.

(b) On effectue un premier changement de variable : $u = x + \frac{1}{2}$. On obtient :

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{du}{\frac{4}{3}u^2+1}.$$

(c) On effectue un second changement de variable : $t = \frac{2}{\sqrt{3}} u$. On obtient :

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{t^2+1}.$$

L'intégrale de l'élément simple de seconde espèce devient :

$$\boxed{\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + k. \end{aligned}}$$

(3) D'une manière générale, on commence à écrire le dénominateur sous sa forme canonique, puis on procède à un changement de variable afin de reconnaître la dérivée de la fonction ***arctan***.

(a) On écrit le dénominateur sous sa forme canonique :

$x^2 + 2x + 3 = (x + a)^2 + b$. Ici, on trouve $a = 1$ et $b = 2$.

(b) On effectue un premier changement de variable : $u = x + 1$. On obtient :

$$I_3 = \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\frac{1}{2}u^2+1}.$$

(c) On effectue un second changement de variable : $t = \frac{1}{\sqrt{2}} u$. On obtient :

$$I_3 = \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dt}{t^2+1}.$$

L'intégrale de l'élément simple de seconde espèce devient :

$$\boxed{\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)\right) + k. \end{aligned}}$$

(4) D'une manière générale, on commence à écrire le dénominateur sous sa forme canonique, puis on procède à un changement de variable afin de reconnaître la dérivée de la fonction ***arctan***.

(a) On écrit le dénominateur sous sa forme canonique :

WWW.TALIB24.COM

$4x^2+8x+8=4(x+a)^2+b$. Ici, on trouve $a=1$ et $b=4$.

(b) On effectue le changement de variable : $u=x+1$. On obtient :

$$I_3=\int\frac{1}{4x^2+8x+8}dx=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2+1}.$$

L'intégrale de l'élément simple de seconde espèce devient :

$$\boxed{I_4=\int\frac{1}{4x^2+8x+8}dx=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{1}{4}\arctan(x+1)+k.}$$

(5) D'une manière générale, on commence à écrire le dénominateur sous sa forme canonique, puis on procède à un changement de variable afin de reconnaître la dérivée de la fonction ***arctan***.

(a) On écrit le dénominateur sous sa forme canonique :

$x^2-4x+8=(x+a)^2+b$. Ici, on trouve $a=-2$ et $b=4$.

(a) On effectue un premier changement de variable : $u=x-2$. On obtient :

$$I_5=\int\frac{1}{x^2-4x+8}dx=\int\frac{du}{u^2+4}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{\frac{1}{4}u^2+1}.$$

(b) On effectue un second changement de variable : $t=\frac{1}{2}u$. On obtient :

$$I_5=\int\frac{1}{x^2-4x+8}dx=\int\frac{du}{u^2+4}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{\frac{1}{4}u^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}.$$

L'intégrale de l'élément simple de seconde espèce devient :

$$\boxed{\begin{aligned}I_5&=\int\frac{1}{x^2-4x+8}dx=\int\frac{du}{u^2+4}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{\frac{1}{4}u^2+1}\\&=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}(x-2)\right)+k.\end{aligned}}$$

Exercice 17 :

Quelles sont les primitives des fonctions suivantes ?

(1) $I_1=\int\frac{x}{x^2+1}dx$

(2) $I_2=\int\frac{2x}{x^2+x+1}dx.$

(3) $I_3=\int\frac{2x+5}{x^2+2x+3}dx.$

(4) $I_4=\int\frac{x-7}{4x^2+8x+8}dx.$

(5) $I_5=\int\frac{3x+1}{x^2-4x+8}dx.$

Solution de l'exercice 17 :

(1) La réponse est immédiate en consultant la table des primitives :

$$\boxed{I_1=\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+k.}$$

(2) D'une manière générale, on utilise la méthode qui consiste à réécrire le numérateur afin d'y faire apparaître la dérivée du dénominateur :

(a) Le dénominateur est : x^2+x+1.

(b) La dérivée du dénominateur est : $2x+1$.

(c) Nous remplaçons donc au numérateur $\mathbf{2x}$ par $\mathbf{2x+1-1}$, on obtient :

$$I_2=\int\frac{2x}{x^2+x+1}dx=\int\frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\int\frac{1}{x^2+x+1}dx.$$

La première intégrale est de la forme u'/u, et la seconde intégrale est de la forme *arctangente* (voir l'exercice précédent). On en déduit alors une primitive de I_2 :

$$\boxed{I_2=\int\frac{2x}{x^2+x+1}dx=\ln(x^2+x+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+k.}$$

WWW.TALIB24.COM

(3) D'une manière générale, on utilise la méthode qui consiste à réécrire le numérateur afin d'y faire apparaître la dérivée du dénominateur :

(a) Le dénominateur est : $x^2 + 2x + 3$.

(b) La dérivée du dénominateur est : $2x + 2$.

(c) Nous remplaçons donc au numérateur $\mathbf{2x + 5}$ par $\mathbf{2x + 2 + 3}$, on obtient :

$$I_2 = \int \frac{2x+5}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{2x+2+3}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx + 3\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx.$$

La première intégrale est de la forme u'/u, et la seconde intégrale est de la forme *arctangente* (voir l'exercice précédent). On en déduit alors une primitive de I_3 :

$$\boxed{I_3 = \int \frac{2x+5}{x^2+2x+3}dx = ln(x^2+2x+3) + 3\frac{\sqrt{2}}{2}arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)\right) + k.}$$

(4) D'une manière générale, on utilise la méthode qui consiste à réécrire le numérateur afin d'y faire apparaître la dérivée du dénominateur :

(a) Le dénominateur est : $4x^2 + 8x + 8$.

(b) La dérivée du dénominateur est : $8x + 8$.

(c) Nous remplaçons donc au numérateur $\mathbf{x - 7}$ par $\mathbf{\frac{1}{8}(8x + 8) - 8}$, on obtient :

$$I_4 = \int \frac{x-7}{4x^2+8x+8}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x+8}{4x^2+8x+8}dx - 8\int \frac{1}{4x^2+8x+8}dx.$$

La première intégrale est de la forme u'/u, et la seconde intégrale est de la forme *arctangente* (voir l'exercice précédent). On en déduit alors une primitive de I_4 :

$$\boxed{I_4 = \int \frac{x-7}{4x^2+8x+8}dx = ln(4x^2+8x+8) - 2\,arctan(x+1) + k.}$$

(5) D'une manière générale, on utilise la méthode qui consiste à réécrire le numérateur afin d'y faire apparaître la dérivée du dénominateur :

(a) Le dénominateur est : $x^2 - 4x + 8$.

(b) La dérivée du dénominateur est : $2x - 4$.

(c) Nous remplaçons donc au numérateur $\mathbf{3x + 1}$ par $\mathbf{\frac{3}{2}(2x - 4) + 7}$, on obtient :

$$I_5 = \int \frac{3x+1}{x^2-4x+8}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + 7\int \frac{1}{x^2-4x+8}dx.$$

La première intégrale est de la forme u'/u, et la seconde intégrale est de la forme *arctangente* (voir l'exercice précédent). On en déduit alors une primitive de I_5 :

$$\boxed{I_5 = \int \frac{3x+1}{x^2-4x+8}dx = \frac{3}{2}ln(x^2-4x+8) + \frac{7}{2}arctan\left(\frac{1}{2}(x-2)\right) + k.}$$

Exercice 18 : Calcul des intégrales "abéliennes" (1)

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

(1) $I_1 = \int \sqrt{1 - x^2}\,dx$.

(2) $I_2 = \int \sqrt{2 - x^2}\,dx$.

(3) $I_3 = \int \sqrt{3 - 4x^2}\,dx$.

(4) $I_4 = \int \sqrt{b - ax^2}\,dx$, avec $a, b > 0$.

Solution de l'exercice 18 :

La méthode d'intégration repose sur la mise du trinôme sous forme canonique et l'emploi d'un changement de variable utilisant les fonctions circulaires.

(1) Calcul de $I_1 = \int \sqrt{1 - x^2}dx$:

La fonction $x \to \sqrt{1 - x^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $[-1,1]$, elle admet donc sur cet intervalle des primitives.

On pose $x = sint$, on a :

WWW.TALIB24.COM

$$I_1 = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{t}{2} + k$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin x}{2} + k.$$

(2) Calcul de $I_2 = \int \sqrt{2-x^2}dx$:

La fonction $x \to \sqrt{2-x^2} = \sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, elle admet donc sur cet intervalle des primitives.

On pose $\frac{x}{\sqrt{2}} = \sin t$, on a :

$$I_2 = \sqrt{2}\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = 2\int \cos^2 t\,dt = \sin t\cos t + t + k$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + k.$$

(3) Calcul de $I_3 = \int \sqrt{3-4x^2}dx$:

La fonction $x \to \sqrt{3-4x^2} = \sqrt{3}\sqrt{1-\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, elle admet donc sur cet intervalle des primitives.

On pose $\frac{2}{\sqrt{3}}x = \sin t$, on a :

$$I_3 = \sqrt{3}\int \sqrt{1-\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \cos^2 t\,dt = \frac{3}{4}\sin t\cos t + \frac{3}{4}t + k$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{3-4x^2} + \frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + k.$$

(4) Calcul de $I_4 = \int \sqrt{b-ax^2}dx$:

La fonction $x \to \sqrt{b-ax^2} = \sqrt{b}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x\right)^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}, \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right]$, elle admet donc sur cet intervalle des primitives.

On pose $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x = \sin t$, on a :

$$I_3 = \sqrt{b}\int \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x\right)^2}\,dx = \frac{b}{\sqrt{a}}\int \cos^2 t\,dt = \frac{3}{4}\sin t\cos t + \frac{3}{4}t + k$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{b-ax^2} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x\right) + k.$$

Exercice 19 : Calcul des intégrales "abéliennes" (2)

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

(1) $I_1 = \int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

(2) $I_2 = \int \sqrt{2+x^2}\,dx$.

(3) $I_3 = \int \sqrt{3+4x^2}\,dx$.

(4) $I_4 = \int \sqrt{b+ax^2}\,dx$, avec $a, b > 0$.

Solution de l'exercice 19 :

La méthode d'intégration repose sur la mise du trinôme sous forme canonique et l'emploi d'un changement de variable utilisant les fonctions hyperboliques.

(1) Calcul de $I_1 = \int \sqrt{1+x^2}dx$:

La fonction $x \to \sqrt{1+x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

On pose $x = sh(t)$, on a :

$$I_1 = \int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int ch^2(t)\,dt = \frac{1}{2}sh(t)ch(t) + \frac{t}{2} + k$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{argsh(x)}{2} + k.$$

(2) Calcul de $I_2 = \int \sqrt{2+x^2}dx$:

WWW.TALIB24.COM

La fonction $x \to \sqrt{2+x^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc sur $\mathbb{R}$ des primitives.

On pose $\frac{x}{\sqrt{2}} = sh(t)$, on a :

$$\boxed{\begin{aligned} I_2 &= \sqrt{2}\int \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = 2\int ch^2(t)\,dt = sh(t)ch(t)+t+k \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{2+x^2} + argsh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+k. \end{aligned}}$$

(3) Calcul de $I_3 = \int \sqrt{3+4x^2}dx$:

La fonction $x \to \sqrt{3+4x^2} = \sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc sur $\mathbb{R}$ des primitives.

On pose $\frac{2}{\sqrt{3}}x = sh(t)$, on a :

$$\boxed{\begin{aligned} I_3 &= \sqrt{3}\int \sqrt{1+\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int ch^2(t)\,dt = \frac{3}{4}sh(t)ch(t)+\frac{3}{4}t+k \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{3+4x^2} + \frac{3}{4}argsh\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)+k. \end{aligned}}$$

(4) Calcul de $I_4 = \int \sqrt{b+ax^2}dx$:

La fonction $x \to \sqrt{b+ax^2} = \sqrt{b}\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x\right)^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc sur $\mathbb{R}$ des primitives.

On pose $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x = sh(t)$, on a :

$$\boxed{\begin{aligned} I_3 &= \sqrt{b}\int \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x\right)^2}\,dx = \frac{b}{\sqrt{a}}\int ch^2(t)\,dt = \frac{3}{4}sh(t)ch(t)+\frac{3}{4}t+k \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{b+ax^2} + \frac{b}{2\sqrt{a}}argsh\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x\right)+k. \end{aligned}}$$

Exercice 20 : Primitives de fonctions rationnelles en sin et cos (1)

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

(1) $I_1 = \int \tan x\,dx$.

(2) $I_2 = \int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx$.

(3) $I_3 = \int \frac{1}{\sin x+\sin 2x}dx$.

Solution de l'exercice 20 :

(1) Calcul de $I_1 = \int \tan x\,dx$:

L'expression $f(x)dx = \tan x dx$ est invariante quand on remplace x par $-x$, alors (d'après les règles de Bioche) on prend le changement de variable $u = \cos x \Leftrightarrow du = -\sin x\,dx$.

$$\boxed{I_1 = \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \int \frac{-du}{u} = \ln|\cos x| + k.}$$

(2) Calcul de $I_2 = \int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx$:

L'expression $f(x)dx = \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx$ est invariante quand on remplace x par $-x$, alors (d'après les règles de Bioche) on prend le changement de variable $u = \cos x \Leftrightarrow du = -\sin x\,dx$.

$$\boxed{\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{-du}{2-u^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right)+k \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\cos x-\sqrt{2}}{\cos x+\sqrt{2}}\right|+k. \end{aligned}}$$

(3) Calcul de $I_3 = \int \frac{1}{\sin x+\sin 2x}dx$:

L'expression $f(x)dx = \frac{1}{\sin x+\sin 2x}dx$ est invariante quand on remplace x par $-x$, alors (d'après les règles de Bioche) on prend le changement de variable $u = \cos x \Leftrightarrow du = -\sin x\,dx$.

WWW.TALIB24.COM

$$I_3 = \int \frac{1}{\sin x + \sin 2x} dx = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x(1+2\cos x)} = \int \frac{-du}{(1-u^2)(1+2u)} + k.$$

En utilisant la décomposition en éléments simples, on trouve :

$$\int \frac{-du}{(1-u^2)(1+2u)} = \frac{1}{6} ln|u-1| + \frac{1}{2} ln|u+1| - \frac{2}{3} ln|1+2u| + k.$$

Finalement,

$$\boxed{I_3 = \int \frac{1}{\sin x + \sin 2x} dx = \frac{1}{6} ln|cosx - 1| + \frac{1}{2} ln|cosx + 1| - \frac{2}{3} ln|1 + 2cosx| + k.}$$

Exercice 21 :
Primitives de fonctions rationnelles en sin et cos (2)

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

(1) $I_1 = \int \tan x\, dx.$

(2) $I_2 = \int \frac{1}{\cos^3 x} dx$

(3) $I_3 = \int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x} dx.$

Solution de l'exercice 21 :

(1) Calcul de $I_1 = \int \tan x\, dx$:

L'expression $f(x)dx = tanxdx$ est invariante quand on remplace x par $\pi - x$, alors (d'après les règles de Bioche) on prend le changement de variable $u = \sin x \Leftrightarrow du = \cos x\, dx$.

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= \int tan\, dx = \int \frac{sinxcos\, x\, dx}{cos^2 x} \\ &= \int \frac{udu}{1-u^2} = -\frac{1}{2} ln(1-u^2) + k \\ &= -lncosx + k. \end{aligned}}$$

(2) • Calcul de $I_2 = \int \frac{1}{cos^3 x} dx$:

L'expression $f(x)dx = \frac{1}{cos^3 x} dx$ est invariante quand on remplace x par $\pi - x$, alors (d'après les règles de Bioche) on prend le changement de variable $u = \sin x \Leftrightarrow du = \cos x\, dx$.

$$\boxed{\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{cos^3 x} dx = \int \frac{cos\, x\, dx}{cos^4 x} = \int \frac{du}{(1-u^2)^2} \\ &= \frac{1}{4} ln\left|\frac{sinx+1}{sinx-1}\right| - \frac{1}{4(sinx-1)} - \frac{1}{4(sinx+1)} + k. \end{aligned}}$$

(3) Calcul de $I_3 = \int \frac{cos x}{1+cos^2 x} dx$:

L'expression $f(x)dx = \frac{cos x}{1+cos^2 x} dx$ est invariante quand on remplace x par $\pi - x$, alors (d'après les règles de Bioche) on prend le changement de variable $u = \sin x \Leftrightarrow du = \cos x\, dx$.

$$\boxed{\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{cos\, x}{1+cos^2 x} dx = \int \frac{du}{2-u^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} ln\left(\frac{u+\sqrt{2}}{u-\sqrt{2}}\right) + k \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} ln\left|\frac{\sin x + \sqrt{2}}{sin\, x - \sqrt{2}}\right| + k. \end{aligned}}$$

Exercice 22 :
Primitives de fonctions rationnelles en sin et cos (3)

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

(1) $I_1 = \int \frac{1}{\cos^4 x} dx.$

(2) $I_2 = \int \frac{1}{1+\sin x \cos x} dx.$

(3) $I_3 = \int \frac{1}{1+cos^2 x} dx.$

Solution de l'exercice 22 :

(1) Calcul de $I_1 = \int \frac{1}{cos^4 x} dx$:

L'expression $f(x)dx = \frac{1}{cos^4 x} dx$ est invariante quand on remplace x par $\pi + x$, alors (d'après les règles de Bioche) on prend le changement de variable $u = \tan x \Leftrightarrow du = (1 + \tan^2 x)\, dx$.

On a :

$$I_1 = \int \frac{1}{cos^4 x} dx = \int (1 + tan^2 x)^2 dx = \int (1 + u^2) du.$$

WWW.TALIB24.COM

Avec un calcul simple, on trouve :

$\int(1+u^2)du = u+\frac{1}{3}u^3+k.$

Finalement,

$$\boxed{I_1 = \int \frac{1}{cos^4 x}dx = tanx + \frac{1}{3}tan^3x + k.}$$

(2) Calcul de $I_2 = \int \frac{1}{1+sin\,x\,cos\,x}dx$:

L'expression $f(x)dx = \frac{1}{cos^4 x}dx$ est invariante quand on remplace x par $\pi + x$, alors (d'après les règles de Bioche) on prend le changement de variable $u = \tan x \Leftrightarrow du = (1+\tan^2 x)\,dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

On a :

$I_2 = \int \frac{1}{1+sin\,x\,cos\,x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{cos^{-2}x+\tan x}dx = \int \frac{du}{u^2+u+1}$.

Avec un calcul simple on trouve:

$\int \frac{du}{u^2+u+1} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2\tan x+1)\right)+k.$

Finalement,

$$\boxed{I_2 = 2\frac{\sqrt{3}}{3}arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2\tan x+1)\right)+k.}$$

(3) Calcul de $I_3 = \int \frac{1}{1+cos^2 x}dx$:

L'expression $f(x)dx = \frac{1}{1+cos^2 x}dx$ est invariante quand on remplace x par $\pi + x$, alors (d'après les règles de Bioche) on prend le changement de variable $u = \tan x \Leftrightarrow du = (1+\tan^2 x)\,dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

On a :

$I_3 = \int \frac{1}{1+cos\,x^2}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{cos^{-2}x+1}dx = \int \frac{du}{u^2+2}$.

Avec un calcul simple on trouve:

$\int \frac{du}{u^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u\right)+k.$

Finalement,

$$\boxed{I_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tan x\right)+k.}$$

Exercice 23 : Primitives de fonctions rationnelles en sin et cos (4)

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

(1) $I_1 = \int \frac{1}{2+sinx+cosx}dx.$

(2) $I_2 = \int \frac{sinx}{1+sin\,x}dx.$

(3) $I_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx.$

Solution de l'exercice 23 :

(1) Calcul de $I_1 = \int \frac{1}{2+sinx+cosx}dx$:

Les règles de Bioche nous conduisent à poser $u = \tan\frac{x}{2}$, dans ce cas on a :

$$\begin{cases} sinx = \dfrac{2u}{1+u^2} \\ cosx = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \dfrac{2du}{1+u^2} \end{cases}$$

Avec $\frac{dx}{2+sinx+cosx} = \frac{2du}{1+u^2}\frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \frac{1}{2}\frac{du}{u^2+2u+3}$,

il vient

$$I_1 = \int \frac{dx}{2+sinx+cosx} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+2u+3}.$$

Or $\int \frac{du}{u^2+2u+3} = \frac{\sqrt{2}}{2}arctan\frac{\sqrt{2}}{2}(u+1)+k$, alors,

$$\boxed{I_1 = \int \frac{1}{2+sinx+cosx}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}arctan\frac{\sqrt{2}}{2}(\tan x+1)+k.}$$

(2) Calcul de $I_2 = \int \frac{sinx}{1+sin\,x}dx$:

WWW.TALIB24.COM

Les règles de Bioche nous conduisent à poser $u = \tan\frac{x}{2}$, dans ce cas on a :

$$\begin{cases} sinx = \dfrac{2u}{1+u^2} \\ cosx = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \dfrac{2du}{1+u^2} \end{cases}$$

Avec $\frac{sinx}{1+sin\,x}dx = \frac{2du}{1+u^2}\frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}} = \frac{4udu}{(1+u)^2(1+u^2)}$,

il vient $I_2 = \int \frac{dx}{1+sinx} = 4\int \frac{udu}{(1+u)^2(1+u^2)}$.

Or $\int \frac{udu}{(1+u)^2(1+u^2)} = \frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + k$,

alors, $\boxed{I_2 = \int \frac{sin}{1+sinx}dx = \frac{2}{tan\frac{x}{2}+1} + x + k.}$

(3) Calcul de $I_3 = \int \frac{sin^2 x}{sin\,x+cos\,x}dx$:

Les règles de Bioche nous conduisent à poser $u = \tan\frac{x}{2}$, dans ce cas on a :

$$\begin{cases} sinx = \dfrac{2u}{1+u^2} \\ cosx = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \dfrac{2du}{1+u^2} \end{cases}$$

Avec $\frac{sin^2 x}{sin\,x+cos\,x}dx = \frac{\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2}{\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2} = \frac{-8u^2du}{(u^2+1)^2(u^2-2u-1)}$,

il vient $I_3 = \int \frac{sin^2 xdx}{sin\,x+cos\,x} = \int \frac{-8u^2du}{(u^2+1)^2(u^2-2u-1)}$.

La décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{-8u^2}{(u^2+1)^2(u^2-2u-1)} = \frac{u^2+2u-1}{u^4+2u^2+1} - \frac{1}{u^2-2u-1},$$

Or $\int \frac{u^2+2u-1}{u^4+2u^2+1} = -\frac{u+1}{u^2+1} + k_1$,

et $\int \frac{1}{u^2-2u-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}ln\left(\frac{u-\sqrt{2}-1}{u+\sqrt{2}-1}\right) + k_2$,

alors,

$$\boxed{I_3 = \int \frac{sin^2 xdx}{sin\,x+cos\,x} = -\frac{tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}ln\left(\frac{tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{2}-1}{tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{2}-1}\right) + k.}$$

Exercice 24 :

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}$.
2. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$.
3. $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.
4. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}$.
5. $\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx$.
6. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}$.
7. $\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx$.
8. $\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx$.
9. $\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx$.
10. $\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,dx$.
11. $\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx$ pour $a \in \mathbb{R}$.

WWW.TALIB24.COM

Y a-t-il une limite quand $a \to +\infty$?

12. $\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1}$.

Solution de l'exercice 24 :

1. $\frac{1}{x^2+2}$ est un élément simple. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Décomposition : $\frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}}{x-1}$.

   Intégrale : $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} = \ln 3$.
3. Pas besoin de décomposer la fraction rationnelle, car $2x+1$ est la dérivée de x^2+x-3, donc $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \ln 3$.
4. On peut évidemment décomposer la fraction rationnelle en éléments simples :

   $$\frac{x}{x^4+16} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}}{x^2-2x\sqrt{2}+4} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}}{x^2+2x\sqrt{2}+4},$$

   mais il est bien plus simple de faire le changement de variables $x^2 = u$.

   Alors $\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{u^2+16} = \frac{\pi}{32}$.
5. La décomposition de $\frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}$ est $x+18+\frac{163}{x-4}+\frac{507}{(x-4)^2}+\frac{565}{(x-4)^3}$; les primitives sont $\frac{x^2}{2}+18x-\frac{1014x-3491}{2(x-4)^2}+163\ln|x-4|+C$.

   Enfin, $\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx = \frac{5565}{32} - 326\ln 2$.
6. Décomposition : $\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}$.

   Primitives : $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5}\right| + C$,

d'où $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{27}{4}\right)$.

7. Décomposition :

   $$\frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8} = 2x+3+\frac{2}{x+2}+\frac{3x-1}{x^2-2x+4}.$$

   Les primitives sont :

   $x^2+3x+\ln(x+2)^2+\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+4)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$.

   Intégrale :

   $\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx = 6+\frac{7\ln 3-3\ln 7}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}$.
8. Décomposition : $\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$.

   Primitives : $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\arctan x + C$,

   d'où $\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx = \ln\frac{3}{2} + 2\arctan\frac{1}{7}$.
9. La décomposition est

   $$\frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2} = 1+\frac{\frac{4}{3}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{11}{9}}{x-1}-\frac{\frac{11}{9}}{x+2}.$$

   On trouve alors $\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx = \frac{5}{3} - \frac{22}{9}\ln 2$.
10. La décomposition de : $\frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}$

    est $\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^2+2}-\frac{6}{(x^2+2)^2}-\frac{12x-16}{(x^2+2)^3}$.

    les primitives sont $-\frac{1}{x^3}+\frac{2x+3}{(x^2+2)^2}+\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

    Enfin,

    $$\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,dx = \frac{37}{72}+2\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$
10. Décomposition de la fraction rationnelle :

    $$\frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4} = \frac{2x+3}{x^2+1}-\frac{2x+5}{x^2+4}.$$

    Primitives : $\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+4}\right| + 3\arctan x - \frac{5}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$.

WWW.TALIB24.COM

Alors

$$\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx = \ln\left|\frac{a^2+1}{a^2+4}\right| + 3\arctan a - \frac{5}{2}\arctan\frac{a}{2} + 2\ln 2.$$

Enfin $\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{4} + 2\ln 2.$

12. Pour factoriser le dénominateur, penser à faire $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2$; on trouve alors $\frac{1}{x^4+1} = \frac{\frac{x\sqrt{2}+2}{4}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{\frac{x\sqrt{2}-2}{4}}{x^2-x\sqrt{2}+1}$.

Les primitives s'écrivent

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\arctan(x\sqrt{2}+1) + \arctan(x\sqrt{2}-1)\right) + C$$

ce qui donne

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{33+20\sqrt{2}}{17} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\pi - \arctan\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

Exercice 25

Calculer les primitives suivantes.

1. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$.
2. $\int \cos^5 t\,dt$; $\int \cosh^3 t\,dt$; $\int \cos^4 t\,dt$; $\int \sinh^4 t\,dt$.
3. $\int x^3 e^x\,dx$.
4. $\int \ln x\,dx$; $\int x\ln x\,dx$; $\int \arcsin x\,dx$.
5. $\int \cosh t\sin t\,dt$.
6. $\int dx\sin x$.

7. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.
8. $\int e^{2x}\sqrt{e^x+1}\,dx$.
9. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$; $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.
10. $\int \sqrt{x(1-x)^3}\,dx$ pour $0 < x < 1$.
11. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.
12. $\int dx\cos x + 2\sin x + 3$.
13. $\int \sqrt{x}\,dx\sqrt{a^3-x^3}$ avec $0 < x < a$.
14. $\int \cosh x\cosh x + \sinh x\,dx$.

Solution de l'exercice 25 :

1. Changement de variable $u = \sin^2 x$ (ou d'abord $u = \sin x$) ; $e^{\sin^2 x} + C$.

2. Deux méthodes : changement de variable $u = \sin t$ (ou $u = \sinh t$), ou linéarisation.

$115(15\sin t - 10\sin^3 t + 3\sin^5 t) + C$

ou $180\sin 5t + 548\sin 3t + 58\sin t + C$;

$\sinh t + 13\sinh^3 t + C$ ou $112\sinh 3t + 34\sinh t + C$;

$132(\sin 4t + 8\sin 2t + 12t) + C$; $132(\sinh 4t - 8\sinh 2t + 12t) + C$.

3. Intégrations par parties : $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$.

WWW.TALIB24.COM

4. Intégration par parties : $x\ln x - x + C$; $x^2 2\ln x - x^2 4 + C$; $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

5. Intégrations par parties : $12(\sinh t\sin t - \cosh t\cos t) + C$.

6. Changement de variable $t = \tan x2$; $\ln|\tan x2| + C$ sur chaque intervalle

7. Changement de variable $x = a\sin u$; $a^2 2\arcsin xa + x2\sqrt{a^2 - x^2} + C$.

8. Changement de variable $u = e^x$; $23\sqrt{e^x + 1}(e^x - 2) + C$.

9. Intégrations par parties : $1a^2 + b^2 e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C$; $1a^2 + b^2 e^{ax}(-b\cos bx + a\sin bx) + C$.

10. Changement de variable

$$t = \sqrt{x1 - x}\,;\ 2\sqrt{x1 - x} - 2\arctan\sqrt{x1 - x} + C.$$

11. Changement de variable

$$t = \arcsin x\,;\ 12\left(\arcsin x - x\sqrt{1 - x^2}\right) + C.$$

12. Changements de variable $u = \tan x2$, $t = 1 + u$; $\arctan(\tan x2 + 1) + C$ sur chaque intervalle Mais, au fait, ne cherchait-on pas une primitive *sur IR*?

13. Changement de variable $x^3 = u^2$; $23\arcsin\sqrt{x^3 a^3} + C$.

14. Multiplier et diviser par $\cosh x - \sinh x$, ou passer en e^x; $x2 + \sinh 2x4 - \cosh 2x4 + C$ ou $x2 - e^{-2x}4 + C$.

Exercice 26 : Intégrales de Wallis

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.

3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.

4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.

5. Calculer nI_nI_{n+1}.

6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

Solution de l'exercice 26 :

(1) Par IPP, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

(2) $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$ et

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1}{2p\times(2p-2)\times\cdots\times 2} I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2},\quad I_{2p+1} = \frac{2p\times(2p-2)\times\cdots\times 2}{(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 1} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

(3) En regardant l'intégrand.

(4) D'après la question précédente, $0 < I_{n+2}I_{n+1}I_n$ donc

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{I_{n+2}}{I_n}\frac{I_{n+1}}{I_n} 1$$

par conséquent $\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

WWW.TALIB24.COM

(5) On a :

$$(2p-1)I_{2p-1}I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}\frac{\pi}{2}, \quad 2pI_{2p}I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{\pi}{2}$$

soit $nI_nI_{n+1} = \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2}$, ce qui peut aussi se démontrer par récurrence.

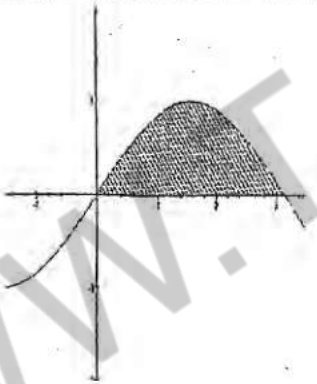
(6) Comme $\frac{\pi}{2(n+1)} I_nI_{n+1} \sim I_n^2$ on en déduit que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 27 :

Calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe de $f(x) = sinx$, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \pi$.

Solution de l'exercice 27 :

La fonction $f(x) = sinx$ est continue et positive sur un intervalle $[0, \pi]$.
L'aire de la surface délimitée par la courbe de la fonction f, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \pi$ est donnée par :



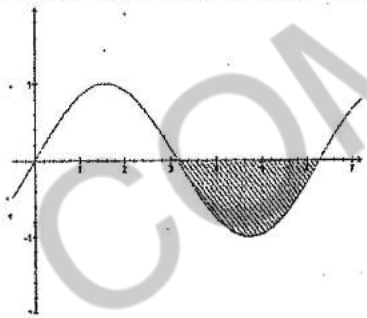
$$\boxed{Aire(D) = \int_0^{\pi} f(x)dx = 2.}$$

Exercice 28 :

Calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe de $f(x) = sinx$, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = \pi$ et $x = 2\pi$.

Solution de l'exercice 28 :

La fonction $f(x) = sinx$ est continue et négative sur un intervalle $[\pi, 2\pi]$.
L'aire de la surface délimitée par la courbe de la fonction f, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = \pi$ et $x = 2\pi$ est donnée par :



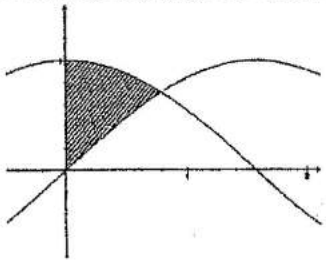
$$\boxed{Aire(D) = -\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = 2.}$$

Exercice 29 :

Calculer l'aire de la surface comprise entre les courbes des fonctions $f(x) = sinx, g(x) = cosx$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$.

Solution de l'exercice 29 :

Les fonctions $f(x) = sinx$ et $g(x) = cosx$ sont continues sur un intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$ et on a de plus :
$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ g(x) - f(x) \geq 0.$
L'aire de la surface délimitée par les courbes des fonctions f et g, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$ est donnée par :



$$\boxed{Aire(D) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) - f(x))dx = \sqrt{2} - 1.}$$

WWW.TALIB24.COM

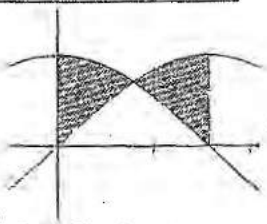
Calculer l'aire de la surface comprise entre les courbes des fonctions $f(x) = sinx, g(x) = cosx$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

Solution de l'exercice 30 :

Les fonctions $f(x) = sinx$ et $g(x) = cosx$ sont continues sur un intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on a de plus :

(1) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) - f(x) \geq 0$.

(2) $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) - f(x) \leq 0$.

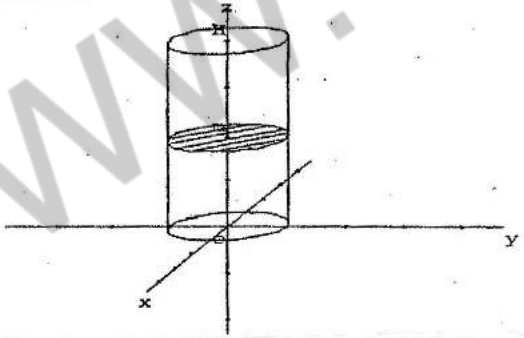


L'aire de la surface délimitée par les courbes des fonctions f et g, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ est donnée par :

$$Atre(D) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) - f(x))dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x))dx = 2\sqrt{2} - 2.$$

Exercice 31 :

Calculer le volume d'un cylindre de révolution.



Solution de l'exercice 31 :

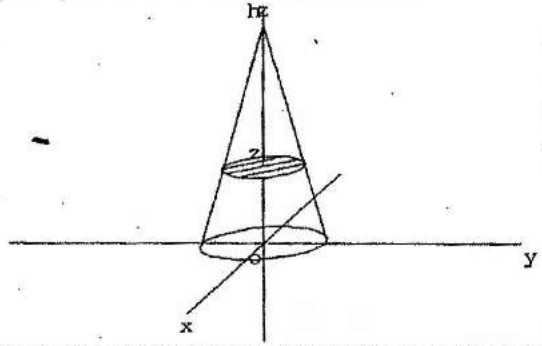
Soit Σ un cylindre de révolution de rayon R et de hauteur h. Alors Σ est limité par les plans d'équations $z=0$ et $z=h$ et pour tout $z \in [0, h]$, on a $f(z) = \pi R^2$.

La fonction f étant constante sur l'intervalle $[0, h]$, elle est continue sur cet intervalle et on a :

$$Volume(\Sigma) = \int_0^h \pi R^2 dz = \pi R^2 h.$$

Exercice 32 :

Calculer le volume d'un cône de révolution.



Solution de l'exercice 32 :

Soit Σ un cône de révolution de rayon R et de hauteur h. Alors Σ est limité par les plans d'équations $z=0$ et $z=h$ et pour tout $z \in [0, h]$, on a $f(z) = \pi r^2$, le rayon r vérifiant d'après le théorème de Thalès : $\frac{r}{R} = \frac{z}{h}$, soit donc $r = \frac{R}{h}z$.

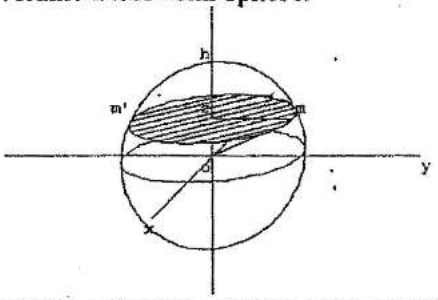
D'où : $f(z) = \pi \frac{R^2}{h^2} z^2$. La fonction f est continue sur l'intervalle $[0, h]$, donc :

$$Volume(\Sigma) = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 33 :

Calculer le volume d'une demi-sphère.



Solution de l'exercice 33 :

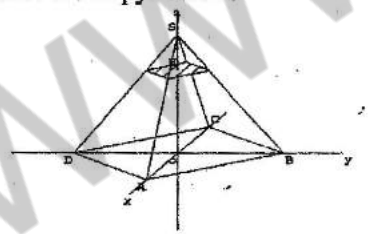
Soit Σ une demi-sphère de rayon R et de hauteur h. Alors Σ est limitée par les plans d'équations $z=0$ et $z=R$ et pour tout $z \in [0, R]$, on a $f(z) = \pi r^2$, le rayon r vérifiant d'après le théorème de Pythagore : $r = \sqrt{R^2 - z^2}$,
d'où $f(z) = \pi(R^2 - z^2)$.
La fonction f est continue sur l'intervalle $[0, R]$, donc :

$$\boxed{Volume(\Sigma) = \int_0^R \pi(R^2 - z^2)dz = \frac{2\pi R^3}{3}.}$$

On en déduit que le volume de la sphère est égal à $\frac{4\pi R^3}{3}$.

Exercice 34 :

Calculer le volume d'une pyramide.



Solution de l'exercice 34 :

Soit Σ une pyramide de hauteur h dont la base est un polygone P. Alors Σ est limitée par les plans d'équations $z=0$ et $z=h$ et $f(z)$ est l'aire d'un polygone qui d'après le théorème de Thalès est une réduction du polygone P de coefficient $\frac{z}{h}$. Donc $f(z) = aire(P)\frac{z^2}{h^2}$.
La fonction f est continue sur l'intervalle $[0, h]$, donc :

$$\boxed{Volume(\Sigma) = \int_0^h aire(P)\frac{z^2}{h^2}dz = \frac{aire(P) \times h}{3}.}$$

Exercice 35 :

Calculer le volume engendré par rotation de la courbe représentative de la fonction carré autour de l'axe (Ox) sur l'intervalle [0,1].

Solution de l'exercice 35 :

La fonction '*carré*' est positive et continue sur l'intervalle [0,1], donc

$$\boxed{Volume(\Sigma) = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{5}.}$$

WWW.TALEB24.COM

CHAPITRE N°3 :
INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

RAPPEL DE COURS

OBJECTIF :

L'objectif de ce rappel de cours est d'apprendre à étudier la convergence (et éventuellement à faire le calcul) d'intégrales dont une borne est infinie comme : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, ou encore avec au moins une borne où la fonction n'est pas définie et a une limite infinie comme : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$.

On suppose dans la définition suivante (et même dans toute la suite) que le seul "problème" est sur la borne b (on procéderait de même en cas de problème sur la borne d'en bas).

DEFINITION :

Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle]a;b[avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On appelle **intégrale généralisée de f entre a et b** la limite suivante : $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$.

L'intégrale est dite **convergente** si cette limite est finie et **divergente** dans le cas contraire.

PROPRIETE : RELATION DE CHASLES SUR LES INTEGRALES GENERALISEES CONVERGENTES

Soit f une fonction continue par morceaux sur]a ;b[et $c \in]a; b[$. Alors (sous réserve d'existence) :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

REMARQUE :

Il faut "couper" pour connaître la nature d'une intégrale généralisée.

Par exemple, on a : $\int_{-x}^{x} \sin t \, dt = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ converge et pourtant $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t \, dt$ diverge ($x \to cosx$ est une primitive de $x \to sinx$ et n'a pas de limite en l'infini).

PROPRIETE :

Soit f une fonction prolongeable par continuité en b, l'intégrale généralisée (dite fausse intégrale généralisée) $\int_a^b f(t)dt$ converge.

PROPRIETE : INTEGRALE DE RIEMANN

Soit $\alpha > 0$. Alors on :

$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

THEOREME DE COMPARAISON

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et **positives** sur [a;b[et telles que $f \leq g$. Alors :

Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

THEOREME D'EQUIVALENCE

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et **positives** sur [a;b[.

Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ ont la même nature (soit elles sont toutes les deux convergentes, soit elles sont toutes les deux divergentes).

WWW.TALIB24.COM

DEFINITION :

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite **absolument convergente** si, et seulement si, l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

THEOREME :

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

REMARQUE :

La réciproque est fausse : on parle alors de **semi-convergence.**

REMARQUES :

- ✓ Pour déterminer la nature d'une intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$, il faut d'abord déterminer les points "à problème", c'est à dire les points où f n'est pas définie et les éventuelles bornes infinies de l'intégrale (beaucoup plus visibles !).
- ✓ Ensuite, il faut montrer que la fonction f est localement intégrable sur [a;b[ou]a;b] ce qui est le cas des fonctions continues sur ces intervalles, ou alors ce qui arrive assez souvent aussi, des fonction continues par morceaux sur ces intervalles.
- ✓ Pour montrer que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge en b (respectivement en a), il faut :
  - o Soit revenir à la définition et montrer, par calcul de primitive, intégration par parties ou changement de variable, que $x \to \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie lorsque $x \to b^-$ (respectivement, $x \to \int_x^b f(t)dt$ admet une limite finie lorsque $x \to a^+$, ce qui permet en outre, ce qui n'est pas très fréquent, de calculer $\int_a^b f(t)dt$.

  - o Soit utiliser les différents critères énoncés dans le cours en particulier si la fonction est positive sur]a;b[.

REMARQUE :

Attention, les calculs de primitives, les intégrations par parties et les changements de variables sont "officiellement" interdits dans les intégrales généralisées. Pour effectuer ces opérations licites néanmoins, il faut toujours se ramener à une intégrale définie, c'est à dire sur un intervalle où la fonction est continue, puis calculer la limite du résultat.

REMARQUE :

Attention, des intégrales "faussement généralisées" peuvent se glisser dans les énoncés.

Exemple : $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$. On peut prolonger la fonction f par continuité en 0 en posant f(0)=1 donc $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

REMARQUE :

Attention avant de linéariser une intégrale généralisée, il faut toujours s'assurer de la convergence de toutes les intégrales mises en jeu.

WWW.TALIB24.COM

ÉNONCÉ DES EXERCICES

Exercice 1 :

Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes et les calculer lorsqu'elles sont convergentes :

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

(3) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

(4) $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$

(5) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

(6) $\int_0^{+\infty} \sin t dt$

Solution de l'exercice 1 :

L'objectif de l'exercice est d'utiliser la définition pour montrer la convergence ou la divergence d'une intégrale généralisée.

1. La fonction $f(t) = e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$. Or
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}[-e^{-t}]_0^x = \lim_{x\to+\infty}(1-e^{-x}) = 1,$$
donc l'intégrale converge, de plus on a : $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.
2. La fonction $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$.
Or $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}dt = \lim_{x\to+\infty}[\arctan t]_0^x = \lim_{x\to+\infty}(\arctan x - 0) = \frac{\pi}{2}$,
donc l'intégrale converge, de plus on a $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.
3. La fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$. Le problème se pose donc en 1. Or pour tout $0 < x < 1$ on a : $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [arcsin t]_0^x = \arcsin x$,
alors

$$\lim_{x\to1^-}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to1^-}\arcsin x = \frac{\pi}{2},$$
donc l'intégrale converge, de plus on a $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$.

4. La fonction $f(t) = \frac{1}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$. Le problème se pose donc en 0.
Or pour tout $0 < x1$ on a :
$$\lim_{x\to0^+}\int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \lim_{x\to0^+}\left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-1\right) = +\infty,$$
donc l'intégrale diverge.
5. La fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[1,+\infty$. Le problème se pose donc en $+\infty$.
Or pour tout $0 < x$ on a :
$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{x\to+\infty}[2\sqrt{t}]_1^x = +\infty,$$
donc l'intégrale diverge.
6. La fonction $f(t) = \sin t$ est continue sur $[0,+\infty$. Le problème se pose donc en $+\infty$.
Or pour tout $0 < x$ on a :
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \sin t dt = \lim_{x\to+\infty}[-\cos t]_0^x = 1 - \lim_{x\to+\infty}\cos x,$$
et comme la fonction cos n'a pas de limite à l'infini, alors l'intégrale diverge.

Exercice 2 :

Montrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes :

(1) $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}dt$

(2) $\int_0^1 \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)dt$

(3) $\int_0^1 \frac{\arctan t^2}{t^2}dt$

(4) $\int_1^{+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{t}}}{t}\right)dt$

WWW.TALEB24.COM

Solution de l'exercice 2 :

L'objectif de l'exercice est d'utiliser le prolongement par continuité des fonctions à intégrer pour montrer la convergence d'une intégrale généralisée.

1. La fonction $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,1]$. Le problème se pose donc en 0.
   Or la fonction f est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$, alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ converge.
2. La fonction $f(t) = \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)$ est continue sur $]0,1]$. Le problème se pose donc en 0.
   Or la fonction f est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) = 1$, alors l'intégrale $\int_0^1 \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) dt$ converge.
3. La fonction $f(t) = \frac{\arctan t^2}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$. Le problème se pose donc en 0.
   Or la fonction f est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan t^2}{t^2} = 1$, alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{\arctan t^2}{t^2} dt$ converge.
4. La fonction $t \mapsto \frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{t}}}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$.
   On pose le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, alors on a:
   $$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{t}}}{t}\right) dt = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-u}}{u} du.$$
   La fonction $f(u) = \frac{1-\sqrt{1-u}}{u}$ est continue sur $]0,1]$. Le problème se pose donc en 0.

Or la fonction f est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{1-u}}{u} = \frac{1}{2}$, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{t}}}{t}\right) dt$ converge.

Exercice 3 :

Utiliser le théorème de comparaison pour démontrer la convergence des intégrales impropres suivantes :

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t}$

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

(3) $\int_0^1 \frac{e^t dt}{t}$

(4) $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln t}$

Solution de l'exercice 3 :

L'objectif de l'exercice est d'utiliser le critère de comparaison pour montrer la convergence ou la divergence de l'intégrale généralisée d'une fonction positive.

1. La fonction $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$.
   Or $0 f(t) = \frac{1}{1+e^t} \frac{1}{e^t}$ pour tout $t \in 0,+\infty[$, et $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge$(= 1)$, alors par critère de comparaison, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t}$ converge.
2. La fonction $f(t) = e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$.
   Or $0 f(t) = e^{-t^2} e^{-t}$ pour tout $t \in 1,+\infty$, et $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge$(= 1)$, alors par critère de comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t}$ converge et par conséquent $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t}$ converge.

WWW.TALIB24.COM

3. La fonction $f(t)=\frac{e^t}{t}$ est continue sur $]0,1]$. Le problème se pose donc en 0.
   Or $0\frac{1}{t}f(t)=\frac{e^t}{t}$ pour tout $t\in]0,1]$, et $\int_0^1\frac{dt}{t}$ diverge, alors par critère de comparaison, $\int_0^1\frac{e^t}{t}dt$ diverge.
4. La fonction $f(t)=\frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[2,+\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$.
   Or $0\frac{1}{t}\frac{1}{\ln t}$ pour tout $t\in[2,+\infty[$, et $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t}$ diverge, alors par critère de comparaison, $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{\ln t}$ diverge.

Exercice 4 :

Utiliser le théorème d'équivalence pour démontrer la convergence des intégrales impropres suivantes :

(1) $\int_0^1\frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t}e^{-t}dt$

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{t^2\ln t}{t^2+4}dt$

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-t}{1+t^2}dt$

Solution de l'exercice 4

L'objectif de l'exercice est d'utiliser le critère d'équivalence pour montrer la convergence ou la divergence de l'intégrale généralisée d'une fonction positive.

1. La fonction $f(t)=\frac{\sin\sqrt{t}}{t}$ est continue sur $]0,1]$. Le problème se pose donc en 0.
   Or $0f(t)=\frac{\sin\sqrt{t}}{t}\underset{0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{t}}$, et $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ converge (Intégrale de Riemann), alors par critère d'équivalence, $\int_0^1\frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt$ converge.

2. La fonction $f(t)=\frac{t}{1+t}e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$.
   Or $0<f(t)=\frac{t}{1+t}e^{-t}\underset{+\infty}{\sim}e^{-t}$, et $\int_0^{+\infty}e^{-t}dt$ converge, alors par critère d'équivalence, $\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t}e^{-t}dt$ converge.
3. La fonction $f(t)=\frac{t^2\ln t}{t^2+4}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$.
   Or $0<f(t)=\frac{t^2\ln t}{t^2+4}\underset{+\infty}{\sim}\ln t$ et $\int_1^{+\infty}\ln t dt$ diverge, alors $\int_1^{+\infty}\frac{t^2\ln t}{t^2+4}dt$ diverge.
4. La fonction $f(t)=\frac{1-t}{1+t^2}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$. Le problème se pose donc en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Or $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-t}{1+t^2}dt=\int_{-\infty}^{-1}\frac{1-t}{1+t^2}dt+\int_{-1}^{+1}\frac{1-t}{1+t^2}dt+\int_1^{+\infty}\frac{1-t}{1+t^2}dt$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1-t}{1+t^2}dt$ diverge (car on a $0<\frac{1-t}{1+t^2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{-1}{t}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{-1}{t}dt$ diverge), alors $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-t}{1+t^2}dt$ diverge.

Exercice 5 :
Convergence absolue

Montrer la convergence absolue des deux intégrales généralisées suivantes:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\operatorname{ch} t}dt$.

(2) $\int_0^1\frac{\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+\sqrt{t})}dt$.

Solution de l'exercice 5 :

1. La fonction $f(t)=\frac{\cos t}{\operatorname{ch} t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$.

WWW.TALIB24.COM

Or on a : $\left|\frac{\cos t}{ch t}\right| \frac{1}{ch t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{e^t}$,

et comme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{ch t} dt$ est absolument convergente, et par conséquent, elle converge.

2. La fonction $f(t) = \frac{\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+\sqrt{t})}$ est continue sur $]0,1]$. Le problème se pose donc en 0.

   Or on a : $\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+\sqrt{t})}\right| \frac{1}{\ln(1+\sqrt{t})} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, et comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge, alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+\sqrt{t})} dt$ est absolument convergente, et par conséquent, elle converge.

Exercice 6 : Semi-convergence

Montrer que les deux intégrales généralisées suivantes sont semi-convergentes:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ (Intégrale de Dirichlet)

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$

Solution de l'exercice 6 :

1. La fonction $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Le problème se pose donc en 0 et en $+\infty$.
   i. **Problème en 0** : Puisque la fonction f est prolongeable par continuité en 0 par 1, alors elle est intégrable en 0.
   ii. **Problème en $+\infty$** : on considère l'intervalle $[1,+\infty[$. On fait une intégration par parties qui nous donne :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Il faut étudier l'existence ou non d'une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ de cette quantité. On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ et il est clair (par comparaison avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$) que l'intégrale $\int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$ est convergente, et par conséquent, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

(i) et (ii) nous montrent que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

Montrons maintenant que la convergence de l'intégrale n'est pas absolue.

Par la même méthode que plus haut, on peut montrer facilement que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ est convergente et on a déjà vu que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente. Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}(1-\cos 2t) dt$ est divergente. Or on a $\frac{1}{2t}(1-\cos 2t) = \sin^2 t|\sin t|$. Donc par principe de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ est divergente, et par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ est divergente.

2. La fonction $f(t) = \frac{\cos t}{t}$ est continue sur $]1,+\infty[$. Le problème se pose en $+\infty$.

   Problème en $+\infty$: on considère l'intervalle $[1,+\infty[$. On fait une intégration par parties qui nous donne $\int_1^x \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin x}{x} - \sin 1 + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt$.

WWW.TALIB24.COM

Il faut étudier l'existence ou non d'une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ de cette quantité. On a $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ et il est clair (par comparaison avec $t\mapsto\frac{1}{t^2}$) que l'intégrale $\int_1^x\frac{\sin t}{t^2}dt$ est convergente, et par conséquent, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$ est convergente.

Montrons maintenant que la convergence de l'intégrale n'est pas absolue. Par la même méthode que plus haut, on peut montrer facilement que $\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2t}{t}dt$ est convergente et on a déjà vu que $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}$ est divergente. Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2t}(1+\cos 2t)dt$ est divergente. Or on a : $\frac{1}{2t}(1+\cos 2t)=\cos^2 t|\cos t|$. Donc par principe de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{|\cos t|}{t}dt$ est divergente.

Exercice 7 :

En discutant éventuellement selon la valeur du paramètre réel α, étudier la nature de l'intégrale généralisée suivante :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$$

Solution de l'exercice 7 :

On peut écrire

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx=\int_0^1\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$$

a. **Existence de l'intégrale $\int_0^1\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$:**

La fonction $f(x)=\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}$ est continue et positive sur $]0,1]$. Le problème se pose donc en 0.

- ✓ Si $\alpha=1$: alors $f(x)=\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}\underset{0}{\sim}\frac{2x}{x}$ et $\int_0^1 2dx$ converge, et par conséquent l'intégrale $\int_0^1\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$ converge.
- ✓ Si $\alpha>1$: alors $f(x)=\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}\underset{0}{\sim}\frac{x}{x}$ et $\int_0^1 1dx$ converge, et par conséquent l'intégrale $\int_0^1\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$ converge.
- ✓ Si $\alpha<1$: alors $f(x)=\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}\underset{0}{\sim}\frac{x^\alpha}{x}$ et $\int_0^1\frac{1}{x^{1-\alpha}}dx$ converge si-si $1-\alpha<1$, et par conséquent l'intégrale $\int_0^1\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$ converge si-si $0<\alpha<1$.

Récapitulation : l'intégrale $\int_0^1\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$ converge si $0<\alpha$.

b. **Existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$:**

La fonction $f(x)=\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$.

- ✓ Si $\alpha=1$: alors $f(x)=\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}\underset{+\infty}{\sim}\frac{2x}{x^3}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^2}dx$ converge, et par conséquent l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$ converge.
- ✓ Si $\alpha>1$: alors $f(x)=\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}\underset{+\infty}{\sim}\frac{x^\alpha}{x^3}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3-\alpha}}dx$ converge si-si $3-\alpha>1$, et par conséquent l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$ converge si-si $1<\alpha<2$.
- ✓ Si $\alpha<1$: alors $f(x)=\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}\underset{+\infty}{\sim}\frac{x}{x^3}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge, et par conséquent l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$ converge.

Récapitulation :
l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$ converge si $\alpha<2$.

Finalement,

WWW.TALIB24.COM

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$ converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$.

Exercice 8

En discutant éventuellement selon la valeur des paramètres réels α et β, étudier la nature del'intégrale généralisée suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)}$$

Solution de l'exercice 8

Pour tout couple (α,β) de réels, la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$. Le problème se pose donc en 0 et en $+\infty$.

On a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)}dx$$

a. **Existence de l'intégrale** $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)}dx$:

- ✓ Si $\beta = 0$: on a $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)} = \frac{1}{2x^\alpha}$ et $\int_0^1 \frac{1}{2x^\alpha}dx$ converge si-si $\alpha < 1$, et par conséquent l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)}dx$ converge si-si $\alpha < 1$ et $\beta = 0$.
- ✓ Si $\beta > 0$: on a $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si-si $\alpha < 1$, et par conséquent l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)}dx$ converge si-si $\alpha < 1$ et $\beta > 0$.
- ✓ Si $\beta < 0$: on a $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)} = \frac{x^{-\beta}}{x^\alpha(1+x^{-\beta})} \underset{0}{\sim} \frac{x^{-\beta}}{x^\alpha}$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha+\beta}}dx$ converge si-si $\alpha+\beta < 1$, et par conséquent l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)}dx$ converge si-si $\alpha+\beta < 1$ et $\beta < 0$.

b. **Existence de l'intégrale** $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)}dx$:

- ✓ Si $\beta = 0$: on a $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)} = \frac{1}{2x^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha}dx$ converge si-si $\alpha > 1$, et par conséquent l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{1+x^{2\alpha}}dx$ converge si-si $\alpha > 1$ et $\beta = 0$.
- ✓ Si $\beta > 0$: on a $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+\beta}}dx$ converge si-si $\alpha+\beta > 1$, et par conséquent l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)}dx$ converge si-si $\alpha+\beta > 1$ et $\beta > 0$.
- ✓ Si $\beta < 0$: on a $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)} = \frac{x^{-\beta}}{x^\alpha(1+x^{-\beta})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^{-\beta}}{x^{\alpha-\beta}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si-si $\alpha > 1$, et par conséquent l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(x^\beta+1)}dx$ converge si-si $\alpha > 1$ et $\beta < 0$.

Récapitulation :

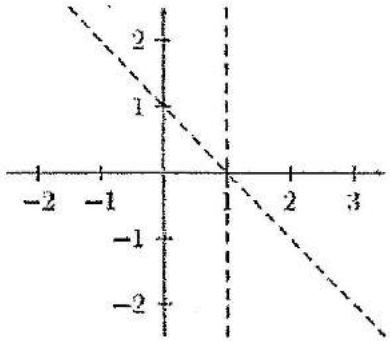
l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha+x}{x^3+x}dx$ converge pour

$$(\alpha,\beta) \in \{\beta > 0, \alpha < 1, \alpha+\beta > 1\}$$

ou

$$(\alpha,\beta) \in \{\beta < 0, \alpha > 1, \alpha+\beta < 1\}.$$

WWW.TALIB24.COM



Exercice 9 :

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

1. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$.
2. Soient $0 < x < y$.
   Démontrer que
   $$\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}dt.$$
3. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a :
   $$e^{-bx}\ln\frac{b}{a} \leq \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}dt \leq e^{-ax}\ln\frac{b}{a}.$$
4. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \ln\frac{b}{a}$.

Solution de l'exercice 9 :

1. La fonction $f(t) = \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   Le problème se pose donc en 0 et en $+\infty$.
   Problème en 0 :
   Comme la fonction f est prolongeable par continuité en 0 (par la valeur $b-a$), alors $\int_0^1 \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ existe.
   Problème en $+\infty$:
   On peut écrire

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t}dt,$
si on arrive à montrer que l'intégrale
$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}dt$ existe $\forall \alpha > 0$,
alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ existe ?
D'une part : Une intégration par parties nous donne
$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}dt = \frac{e^{-a}}{a} - \frac{1}{a}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t^2}dt,$$
d'autre part, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t^2}dt$ existe
(car $\frac{e^{-at}}{t^2}\ \frac{1}{t^2}\ \forall t > 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ existe),
ce qui implique que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}dt$ existe,
et par conséquent, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ existe.

2. Soient $0 < x < y$. On a :
$$\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \underbrace{\int_x^y \frac{e^{-at}}{t}dt}_{u=at} - \underbrace{\int_x^y \frac{e^{-bt}}{t}dt}_{u=bt}$$
$$= \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{u}du - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u}du$$
$$= \left(\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u}du + \int_{bx}^{ay} \frac{e^{-u}}{u}du\right) - \left(\int_{bx}^{ay} \frac{e^{-u}}{u}du + \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u}du\right)$$
$$= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

3. Soit $x > 0$. Puisque on a : $e^{-bx} \leq e^{-t} \leq e^{-ax}$,
   alors
   $$e^{-bx}\ln\frac{b}{a} = \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} \leq \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}dt \leq e^{-ax}\int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = e^{-ax}\ln\frac{b}{a}$$
4. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \ln\frac{b}{a}$:
   Comme
   $$e^{-bx}\ln\frac{b}{a}\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}dt e^{-ax}\ln\frac{b}{a}$$
   et
   $$e^{-by}\ln\frac{b}{a}\int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}dt e^{-ay}\ln\frac{b}{a},$$

WWW.TALIB24.COM

alors

$$\ln\frac{b}{a}(e^{-bx}-e^{-ay})\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt \ln\frac{b}{a}(e^{-ax}-e^{-by})$$

En déduire donc que : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \ln\frac{b}{a}$.

CHAPITRE N°4 :

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RAPPEL DE COURS

DEFINITION :

Si une fonction f et ses dérivées successives vérifient une équation différentielle, f est dite une solution (ou une intégrale) de l'équation différentielle.
Le graphe de f s'appelle une courbe intégrale de l'équation différentielle.
Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions qui vérifient cette équation.
Lorsque toutes les solutions d'une équation différentielle ont la même forme, et que l'on peut donner cette forme générale des solutions, on dit que l'on écrit la solution générale de l'équation.

DEFINITION : EQUATION DU PREMIER ORDRE

L'équation ay'+by=0 est dite 'Equation différentielle du premier ordre à coefficients constants' car a et b sont des réels donnés. On supposera $a \neq 0$. En posant $y' = \frac{dy}{dx}$, on peut écrire l'équation sous la forme $a\frac{dy}{dx} + b\,y = 0$.

PROPRIETE : LINEARITE

L'équation ay' + by = 0 possède la propriété suivante, et à cause de cette propriété on dit qu'elle est linéaire: si y_1 et y_2 sont deux fonctions solutions de l'équation, alors, pour tous nombres A et B, la fonction $Ay_1 + By_2$ est une solution.

WWW.TALIB24.COM

THEOREME :

Les solutions définies sur IR de l'équation différentielle ay'+by=0 sont les fonctions définies par $x \mapsto y = ke^{-\frac{b}{a}x}$ avec k réel quelconque.

SOLUTION PARTICULIERE :

Soit l'équation différentielle ay'+by=c(x).
Si c(x) est un polynôme de degré n, on cherche y sous la forme d'un polynôme de degré n.
Si c(x) est une combinaison linéaire en cos kx et (ou) sin kx, on cherche y sous la forme d'une combinaison linéaire en cos kx et sin kx.

THEOREME :

Pour tout couple de réels (x_0, y_0), l'équation ay'+by=0, admet une et une seule solution telle que $g(x_0) = y_0$.

DEFINITION : EQUATION DU SECOND ORDRE

L'équation ay"+by'+cy=0 est dite 'Equation différentielle du second ordre à coefficients constants' car a, b et c sont des réels donnés. On supposera $a \neq 0$ (sinon, l'équation est du premier ordre).

PROPRIETE : LINEARITE

L'équation ay" + by' + cy = 0 possède la propriété suivante : Si y_1 et y_2 sont deux fonctions solutions de l'équation ay"+by'+cy=0, alors, pour tous nombres A et B, la fonction Ay_1+By_2 est aussi une solution.

THEOREME :

Soit l'équation différentielle ay"+by'+cy=0. (E)
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, $ar^2+br+c=0$ admet deux racines réelles r_1 et r_2 : La solution générale de (E) est $f(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$ avec A et B réels.
- Si $\Delta < 0$, $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines complexes : $r = \alpha + i\omega$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$: La solution générale de (E) est $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$ avec A et B réels.
- Si $\Delta = 0$, $ar^2 + br + c = 0$ admet une racine r : La solution générale de l'équation différentielle est $f(x) = e^{rx}(A + Bx)$ avec A et B réels.

SOLUTION PARTICULIERE :

Soit l'équation différentielle ay"+by'+cy=d(x).
Si d(x) est un polynôme, on cherche Q(x) sous la forme d'un polynôme de degré égal au degré de d(x) (ou+1 si c=0, ou +2 si c=b=0).
Si d(x) est du type : $e^{kx}P(x)$, P polynôme : on cherche une solution sous la forme $e^{kx}Q(x)$, avec Q polynôme tel que :

d°Q=d°P si k n'est pas racine de (1)
d°Q=d°P+1 si k est racine simple de (1)
d°Q=d°P+2 si k est racine double de (1)

Si d(x) est du type $e^{kx}P(x)\cos(\alpha x)$: On cherche une solution sous la forme $e^{(k+i\alpha)x}Q(x)$.

THEOREME :

Pour tous x_0 ; y_0; z_0 réels, l'équation différentielle ay"+by'+cy=0 admet une solution g et une seule, définie sur IR et telle que $g(x_0) = y_0$, $g'(x_0) = z_0$.

WWW.TALIB24.COM

ÉNONCÉ DES EXERCICES

Exercice 1 :

Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 2xy = x.$$

1. Résoudre l'équation homogène asociée.
2. Calculer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Solution de l'exercice 1 :

Les primitives de la fonction $a(x) = 2x$ sont les fonctions $A(x) = x^2/2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante réelle quelconque. Donc les solutions de l'équation homogène associée à E sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ du type : $y(x) = ce^{-x^2}$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire. On cherche maintenant une solution particulière de E sous la forme $y_p(x) = c(x)e^{-x^2}$ (méthode de la variation de la constante). On a :

$y_p'(x) + 2xy_p(x) = c'(x)e^{-x^2}$. Donc y_p est solution de E si et seulement si : $c'(x) = xe^{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On choisit la fonction c parmi les primitives de la fonction xe^{x^2}, par exemple : $c(x) = 1/2e^{x^2}$. Donc la fonction y_p telle que $y_p(x) = 1/2e^{x^2}e^{-x^2} = 1/2$ est solution de E.

Par conséquent les solutions de E sont toutes les fonctions de la forme : $y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$ $c \in \mathbb{R}$.

Pour y solution de E_1, la condition $y(0) = 1$ équivaut à : $c = 1/2$.

Exercice 2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'quation différentielle suivante : $y' + 2y = x^2$ (E_1).

Solution de l'exercice 2 :

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

On commence par résoudre l'équation homogène associée $y' + 2y = 0$: les solutions sont les $y(x) = \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_1). Le second membre étant polynomial de degré 2, on cherche une solution particulière de la même forme:

$$y_0(x) = ax^2 + bx + c \text{ est solution de } (E_1)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + 2y_0(x) = x^2$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ convient.

Les solutions de (E_1) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène: $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x}$ $(x \in \mathbb{R})$

où λ est un paramètre réel.

WWW.TALIB24.COM

Exercice 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'quation différentielle suivante :

$$y' + y = 2\sin x \ (E_2).$$

Solution de l'exercice 3 :

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_2). Le second membre est cette fois une fonction trigonométrique, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de cos et sin:

$$y_0(x) = a\cos x + b\sin x \text{ est solution de } (E_2)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y_{0'}(x) + y_0(x) = 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad (a+b)\cos x + (-a+b)\sin x = 2\sin x$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = -\cos x + \sin x$ convient.

Les solutions de (E_2) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène:

$$y(x) = -\cos x + \sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Exercice 4 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'quation différentielle suivante :

$$y' - y = (x+1)e^x \ (E_3).$$

Solution de l'exercice 4 :

Les solutions de l'équation homogène associée $y' - y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre est le produit d'une fonction exponentielle par une fonction polynomiale de degré $d = 1$: or la fonction exponentielle du second membre est la même (e^x) que celle qui apparaît dans les solutions de l'équation homogène. On cherche donc une solution particulière sous la forme d'un produit de e^x par une fonction polynomiale de degré $d + 1 = 2$:

$$y_0(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \text{ est solution de } (E_3)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y_{0'}(x) - y_0(x) = (x+1)e^x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2ax + b)e^x = (x+1)e^x$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^x$ convient.

Les solutions de (E_3) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène:

$$y(x) = (\tfrac{1}{2}x^2 + x + \lambda)e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

WWW.TALIB24.COM

Exercice 5 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'quation différentielle suivante :

$$y' + y = x - e^x + \cos x \ (E_4).$$

Solution de l'exercice 5 :

Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre est la somme d'une fonction polynomiale de degré 1, d'une fonction exponentielle (différente de e^{-x}) et d'une fonction trigonométrique. D'après le principe de superposition, on cherche donc une solution particulière sous la forme d'une telle somme:

$y_0(x) = ax + b + \mu e^x + \alpha\cos x + \beta\sin x$ est solution de (E_4)

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y_{0'}(x) + y_0(x) = x - e^x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad ax + a + b + 2\mu e^x + (\alpha + \beta)\cos x + (-\alpha + \beta)\sin x = x - e^x + \cos x$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que

$$y_0(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

convient.

Les solutions de (E_4) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène:

$$y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Exercice 6 :

Résoudre sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$ l'équation différentielle suivante : $x\ln x y' + y = x$.

Solution de l'exercice 6 :

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur I. f est une solution de (E) sur I, si et seulement si,

$$\forall x \in I,\quad x\ln x f'(x) + f(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in I,\quad \ln x f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I,\quad (\ln x . f)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\quad f(x) = \frac{x + \lambda}{\ln x}$$

Exercice 7 :

Résoudre sur l'intervalle $I =]-\infty, 0[$ l'équation différentielle :

$$x(xy' + y - x) = 1.$$

Solution de l'exercice 7 :

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$

WWW.TALIB24.COM

où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur I. f est une solution de (E) sur I, si et seulement si,

$$\forall x \in I, \quad x(xf'(x) + f(x) - x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in I, \quad (xf)'(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in I,\ xf(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(-x) + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ \forall x \in I, \quad f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x) + \lambda}{x}.$$

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x)+\lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad (\ln x.f)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ \forall x \in I, \quad f(x) = \frac{x+\lambda}{\ln x}$$

Exercice 8 :

Résoudre sur l'intervalle $I =]-\infty, 0[$ l'équation différentielle :

$$2xy' + y = x^4.$$

Solution de l'exercice 8 :

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2x}$ et $x \mapsto \frac{x^3}{2}$ sont continues sur $I =]-\infty, 0[$ et on saitque les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur I. f est une solution de (E) sur I, si et seulement si,

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad f'(x) + \frac{1}{2x} f(x) = \frac{x^3}{2}$$

$$\forall x \in I,\ e^{\frac{\ln|x|}{2}} f'(x) + \frac{1}{2x} e^{\frac{\ln|x|}{2}} f(x) = \frac{x^3}{2} e^{\frac{\ln|x|}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad (\sqrt{-x} f)'(x) = -\frac{1}{2}(-x)^{7/2}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ \forall x \in I,\ \sqrt{-x} f(x) = \frac{1}{9}(-x)^{9/2} + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{1}{9}x^4 + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}}$$

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^4}{9} + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 :

Résoudre sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y' + 2y = x^2 - 3x.$$

Solution de l'exercice 9 :

Les fonctions $x \mapsto 2$ et $x \mapsto x^2 - 3x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + 2f(x) = x^2 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{2x} f'(x) + 2e^{2x} f(x) = (x^2 - 3x)e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^{2x} f)'(x) = (x^2 - 3x)e^{2x}$$

WWW.TALIB24.COM

Recherche d'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$x \mapsto (x^2 - 3x)e^{2x}.$$

Deux intégrations par parties fournissent :

$$\int (x^2-3x)e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(x^2-3x)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x-3)e^{2x}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}(x^2-3x)e^{2x} - \tfrac{1}{4}(2x-3)e^{2x} + \tfrac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}(2x^2-8x+3)e^{2x} + \tfrac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-4x+2)e^{2x} + C$$

Cherchons les primitives de $x \mapsto (x^2-3x)e^{2x}$ sous la forme $x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$.

$$\left((ax^2+bx+c)e^{2x}\right)' = \left(2(ax^2+bx+c) + (2ax+b)\right)e^{2x}$$

$$= (2ax^2 + 2(a+b)x + b + 2c)e^{2x}.$$

Donc,

$$((ax^2+bx+c)e^{2x})' = (x^2-3x)e^{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2(a+b) = -3 \\ b+2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Résolution de (E).

f *solution de* (E) *sur* $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$,

$$(e^{2x}f)'(x) = (x^2-3x)e^{2x} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},$$

$$e^{2x}f(x) = (\frac{x^2}{2} - 2x + 1)e^{2x} + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1 + \lambda e^{-2x}.$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^2}{2} - 2x + 1 + \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 :

Résoudre sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{1}{1+2e^x}$$

Solution de l'exercice 10 :

Les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \frac{1}{1+2e^x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

f *solution de* (E) *sur* $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) + f(x) = \dfrac{1}{1+2e^x}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x f'(x) + e^x f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+2e^x) + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (\frac{1}{2}\ln(1+2e^x) + \lambda)e^{-x}$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\frac{1}{2}\ln(1+2e^x) + \lambda)e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 :

Résoudre sur l'intervalle $I =]0, \pi[$ l'équation différentielle :

$$y' \sin x - y \cos x + 1 = 0.$$

WWW.TALIB24.COM

Solution de l'exercice 11 :

Les fonctions $x \mapsto -\frac{\cos x}{\sin x}$ et $x \mapsto -\frac{1}{\sin x}$ sont continues sur $I =]0, \pi[$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Mais $x \mapsto \sin x$ est une solution non nulle de (E_H) sur I et $x \mapsto \cos x$ est une solution de (E) sur $]0, \pi[$.

Les solutions de (E) sur $]0, \pi[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \sin x + \cos x, \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 :

On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0, +\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).

2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad z'(x) + (6x + \tfrac{1}{x})z(x) = 1.$$

3. Intégrer (E_1) sur $]0, +\infty[$.

4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0, +\infty[$.

Solution de l'exercice 12 :

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2. \qquad \text{(E)}$$

1. Trouvons $a \in]0, \infty[$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière. Puisque

$$y_0'(x) - \frac{y_0(x)}{x} - y_0(x)^2 = -a^2x^2,$$

y_0 est solution si et seulement si $a = \pm 3$. On choisit $a = 3$.

2. Si z est une fonction $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas, on pose $y(x) = 3x - 1/z(x)$. Alors y est solution si et seulement si

$$\frac{z'(x)}{z(x)^2} + \frac{1}{xz(x)} - \frac{1}{z(x)^2} + \frac{6x}{z(x)} = 0.$$

En multipliant par $z(x)^2$, on obtient que y est solution de (E) ssi z vérifie

$$z'(x) + \left(6x + \tfrac{1}{x}\right)z(x) = 1. \qquad \text{(E_1)}$$

3. On résout (E_1) sur $]0, \infty[$.

Une primitive de $x \mapsto 6x + 1/x$ est $x \mapsto 3x^2 + \ln(x)$, donc les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto A\exp(-3x^2 - \ln(x))$. On cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme

$z_p(x) = \alpha(x)\exp(-3x^2 - \ln(x))$;

alors z_p est solution si $\alpha'(x)\exp(-3x^2 - \ln(x)) = 1$, c'est-à-dire si $\alpha'(x) = x\exp(3x^2)$, par exemple si

$\alpha(x) = \exp(3x^2)/6$.

WWW.TALIB24.COM

Les solutions de (E_1) sont donc les

$$z(x) = \frac{1 + A\exp(-3x^2)}{6x}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

4. On va maintenant en déduire les solutions de (E) définies sur $]0, \infty[$.

Soit y une solution $\mathcal{C}^1$ définie sur $]0, \infty[$. On suppose dans un premier temps que $y(x) > 3x$ sur l'intervalle ouvert $I \subset]0, \infty[$, pris aussi grand que possible.

Alors $y(x) = 3x - 1/z_I(x)$ pour une certaine fonction $z_I < 0$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur I. D'après la question précédente, on a nécessairement $z_I(x) = [1 + A_I\exp(-3x^2)]/6x$ pour une certaine constante $A_I \in \mathbb{R}$. Puisque $z_I < 0$, cela impose $A_I < 0$, mais du coup $I \neq]0, +\infty[$ car $1 > A_I\exp(-3x^2)$ si x est assez grand.

Dans tous les cas, il existe donc un intervalle ouvert J tel que $y(x) < 3x$ sur J. On suppose encore que J est aussi grand que possible. Sur J, $y(x) = 3x - 1/z_J(x)$ pour une certaine fonction $z_J > 0$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur J. Encore d'après la question précédente, $z_J(x) = [1 + A_J\exp(-3x^2)]/6x$ pour une certaine constante A_J. Puisque l'intervalle ouvert $J =]a, b[$ a été supposé maximal, et puisque y est supposée définie sur $]0, +\infty[$, si $a > 0$ on a $y(a) = 3a$ et de même si $b < \infty$, $y(b) = 3b$, car sinon par continuité de y on aurait encore $y(x) < 3x$ sur $]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$ pour un petit $\varepsilon > 0$. Cela n'est possible respectivement que si $z_J(x) \to +\infty$ lorsque $x \to a$ ou $z_J(x) \to +\infty$ lorsque $x \to b$.

Or on a dit que $z_J = [1 + A_J\exp(-3x^2)]/6x$, cela n'est donc pas possible du tout (sauf précisément si respectivement $a = 0$ et $b = 0$).

Donc soit $y(x) = 3x$ sur $]0, +\infty[$, soit $y(x) < 3x$ sur $]0, +\infty[$. Dans ce dernier cas, $z(x) = 1/(3x - y(x))$ est définie sur $]0, +\infty[$ et s'écrit $z(x) = [1 + A\exp(-3x^2)]/6x$. Puisque $z > 0$, nécessairement $A - 1$. Donc si y est solution, alors

$$y(x) = 3x \quad \text{ou} \quad y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + A\exp(-3x^2)} \quad \text{avec } A - 1.$$

Réciproquement, si y est ainsi définie, alors y est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$, et on peut vérifier que c'est bien une solution.

Exercice 13 :

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases} \text{avec} \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 13 :

Si $z = x + \lambda y$, alors $\dot{z} = x(1 + 3\lambda) + y(1 - \lambda)$. Pour que $\dot{z}$ soit proportionnel à z, il suffit que $\lambda(1 + 3\lambda) = 1 - \lambda$, autrement dit $3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$.

Il y a deux solutions : $a = -1$ et $b = 1/3$. On pose $u = x - y$ et $v = x + \frac{1}{3}y$. On a alors : $\dot{u} = -2u$ et $\dot{v} = 2v$. On en déduit que les solutions u et v sont de la forme $u(t) = C_1e^{-2t}$ et $v(t) = C_2e^{2t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + \frac{1}{3}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}(u + 3v) \\ y = \frac{3}{4}(v - u) \end{cases}$$

Donc les solutions du système différentiel sont les couples de fonctions (x, y) de la forme

WWW.TALIB24.COM

$$x(t) = D_1e^{-2t} + 3D_2e^{2t}, \qquad y(t) = -3D_1e^{-2t} + 3D_2e^{2t}, D_1, D_2 \in \mathbb{R}.$$

On veut $x(0) = 2$ et $y(0) = -2$. Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} D_1 + 3D_2 = 2 \\ -3D_1 + 3D_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = 1 \\ D_2 = 1/3 \end{cases}$$

Conclusion : il y a une unique solution, donnée par

$$x(t) = e^{-2t} + e^{2t}, \qquad y(t) = -3e^{-2t} + e^{2t}.$$

Exercice 14 :

Déterminer toutes les fonctions $f: [0;1] \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x \in [0;1],\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Solution de l'exercice 14 :

Une fonction f: $[0;1] \to \mathbb{R}$ convient si et seulement si

- f est dérivable
- f est solution de $y' + y = c$
- f vérifie $f(0) + f(1) = c$ (où c est un réel quelconque)

Or les solutions de l'équation $y' + y = c$ sont exactement les $f: x \mapsto \lambda e^{-x} + c$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ (en effet, on voit facilement que la fonction constante égale à c est une solution particulière de $y' + y = c$). Évidemment ces fonctions sont dérivables, et $f(0) + f(1) = \lambda(1 + e^{-1}) + 2c$, donc la troisième condition est satisfaite si et seulement si $-\lambda(1 + e^{-1}) = c$.

Ainsi les solutions du problème sont exactement les

$$f(x) = \lambda(e^{-x} - 1 - e^{-1}),$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 :

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - (2x - \tfrac{1}{x})y = 1 \ sur\ ]0; +\infty[,$$

en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante.

Solution de l'exercice 15 :

(a) Résolution de l'équation homogène

$$y' - (2x - \tfrac{1}{x})y = 0.$$

Une primitive de $a(x) = 2x - \frac{1}{x}$ est $A(x) = x^2 - \ln x$,

donc les solutions de l'équation homogène sont les $y(x) = \lambda\exp(x^2 - \ln x) = \lambda\frac{1}{x}\exp(x^2)$, pour λ une constante réelle quelconque.

(b) Recherche d'une solution particulière.

Nous allons utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$. On cherche une telle solution sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.

On calcule d'abord

$$y_0'(x) = \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2)$$

WWW.TALIB24.COM

Maintenant :

$$y_0 \quad \text{est solutionde } y' - (2x + \tfrac{1}{x})y = 1$$

$$\Leftarrow y_{0'} - (2x - \tfrac{1}{x})y_0 = 1$$

$$\Leftarrow \lambda'(x)x\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2) - (2x - \frac{1}{x})\lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1$$

$$\Leftarrow \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1$$

$$\Leftarrow \lambda'(x) = x\exp(-x^2)$$

Ainsi on peut prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{2}\exp(x^2)$, ce qui fournit la solution particulière :

$$y_0(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2x}$$

Pour se rassurer, on n'oublie pas de vérifier que c'est bien une solution !

(c) **Solution générale.**

L'ensemble des solutions s'obtient par la somme de la solution particulière avec les solutions de l'équation homogène. Autrement dit, les solutions sont les :

$$y(x) = -\frac{1}{2x} + \lambda\frac{1}{x}\exp(x^2) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Exercice 16 :

Résoudre l'équation différentielle suivante :
$y' - y = x^k\exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$,
en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante.

Solution de l'exercice 16 :

(a) **Résolution de l'équation homogène $y' - y = 0$.**

Les solutions de l'équation homogène sont les

$y(x) = \lambda\exp(x), \lambda \in \mathbb{R}$.

(b) **Recherche d'une solution particulière.**

On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)\exp(x)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.

Comme $y_{0'}(x) = \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x)$ alors

$$y_0 \quad \text{estsolutionde} y' - y = x^k\exp(x)$$

$$\Leftarrow \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x) - \lambda(x)\exp(x) = x^k\exp(x)$$

$$\Leftarrow \lambda'(x)\exp(x) = x^k\exp(x)$$

$$\Leftarrow \lambda'(x) = x^k$$

On fixe $\lambda(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, ce qui conduit à la solution particulière :

$$y_0(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x)$$

(c) **Solution générale.**

L'ensemble des solutions est formé des

$$y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x) + \lambda\exp(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 17 :

Résoudre l'équation différentielle suivante :
$x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0;+\infty[$,
en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante.

Solution de l'exercice 17 :

Le coefficient de y' ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, l'équation peut donc se mettre sous la forme

$$y' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}y = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}$$

(a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de

$a(x) = -\frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut donc choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ avec $u(x) = 1+\ln^2(x)$. Les solutions de l'équation sont les $y(x) = \lambda e^{-\ln(1+\ln^2(x))} = \frac{\lambda}{1+\ln^2(x)}$.

(b) Utilisons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. On cherche $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{1+\ln^2(x)}$, avec λ une fonction dérivable. Or $z(x) = \frac{1}{1+\ln^2(x)}$ est solution de l'équation homogène et $y_0(x) = \lambda(x)z(x)$:

y_0 est solution

$$\Leftarrow y_{0'} + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}y_0 = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}$$

$$\Leftarrow \lambda'(x)z(x) + \lambda(x)\underbrace{\left[z'(x) + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}z(x)\right]}_{=0} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}$$

$$\Leftarrow \frac{\lambda'(x)}{1+\ln^2(x)} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}$$

$$\Leftarrow \lambda'(x) = \frac{1}{x}$$

On peut donc choisir $\lambda(x) = \ln x$, ce qui donne la solution particulière $y_0(x) = \frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}$.

(c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène: ce sont les

$$y(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1+\ln^2(x)} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Remarque : le choix d'une primitive de λ' se fait à constante additive près. Si on avait choisi par exemple $\lambda(x) = \ln x + 1$, la solution particulière aurait été différente, mais les solutions de l'équation avec second membre auraient été les

$$y(x) = \frac{\ln x + 1 + \lambda}{1+\ln^2(x)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Quitte à poser $\lambda_{0'} = 1 + \lambda$, ce sont évidemment les mêmes que celles trouvées précédemment!

Exercice 18 :

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

WWW.TALIB24.COM

Solution de l'exercice 18 :

Il s'agit d'une équation homogène du second ordre. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$, qui admet deux solutions: $r = 2$ et $r = 1$. Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{x}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Exercice 19 :

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Solution de l'exercice 19 :

L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$, qui admet deux solutions: $r = -1 + i$ et $r = -1 - i$. On sait alors que les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$ $(A, B \in \mathbb{R})$. Remarquons que, en utilisant l'expression des fonctions cos et sin à l'aide d'exponentielles, ces solutions peuvent aussi s'écrire sous la forme $\lambda e^{(-1+i)x} + \mu e^{(-1-i)x}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Exercice 20 :

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Solution de l'exercice 20 :

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $(\lambda x + \mu)e^{x}$.

Exercice 21 :

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + y = 2\cos^2.$$

Solution de l'exercice 21 :

Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda\cos x + \mu\sin x$. Le second membre peut en fait se réécrire $\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$: d'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme $a + b\cos(2x) + c\sin(2x)$. En remplaçant, on trouve qu'une telle fonction est solution si $a = 1$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = 0$. Les solutions générales sont donc les

$$\lambda\cos x + \mu\sin x - \frac{1}{3}\cos(2x) + 1.$$

Exercice 22 :

Résoudre sur $]0; \pi[$ l'équation différentielle :

$$y'' + y = \cot x.$$

Solution de l'exercice 22 :

Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda\cos x + \mu\sin x$. En posant $y_1(x) = \cos x$ et $y_2(x) = \sin x$, on va chercher les solutions sous la forme $\lambda y_1 + \mu y_2$, vérifiant

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y'_1 + \mu' y'_2 = \cot x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'\cos x + \mu'\sin x = 0 \\ \lambda'(-\sin x) + \mu'\cos x = \cot x \end{cases}$$

WWW.TALIB24.COM

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(x) = \dfrac{\begin{matrix} 0 & \sin x \\ \cot an\, x & \cos x \end{matrix}}{\begin{matrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{matrix}} \\ \mu'(x) = \dfrac{\begin{matrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \cot an\, x \end{matrix}}{\begin{matrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{matrix}} \end{cases}$$

d'après les formules de Cramer, où $\begin{matrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{matrix} = 1$. On obtient donc

$$\begin{cases} \lambda'(x) = -\cos x \\ \mu'(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x} \end{cases}$$

ce qui donne une primitive $\lambda(x) = -\sin x$.

Pour μ, on cherche à primitiver $\frac{\cos^2 x}{\sin x}$ à l'aide du changement de variable $t = \cos x$ (et donc $t = -\sin t\, x$), on calcule une primitive $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\, x = -\int \frac{t^2}{1-t^2}\, t = t - \int \frac{1}{1-t^2}\, t$

$= t + \frac{1}{2}\ln(1-t) - \frac{1}{2}\ln(1-t) = \cos x + \frac{1}{2}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1-\cos x)$

En remplaçant, les solutions générales sont les

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + (-\sin x)\cos x + \left(\cos x + \frac{1}{2}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1-\cos x)\right)\sin x$$

qui se simplifie

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}\sin x \ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 23 :

Résoudre l'équation différentielle suivante à l'aide du changement de variable suggéré :

$x^2y'' + xy' + y = 0$, sur $]0;+\infty[$, en posant $x = e^t$.

Solution de l'exercice 23 :

Puisqu'on cherche y fonction de $x \in]0;+\infty[$, et que l'application $t \mapsto e^t$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$, on peut poser $x = e^t$ et $z(t) = y(e^t)$. On a alors $t = \ln x$ et $y(x) = z(\ln x)$. Ce qui donne :

$$y(x) = z(\ln x) = z(t)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln x) = e^{-t}z'(t)$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x) = -e^{-2t}z'(t) + e^{-2t}z''(t)$$

En remplaçant, on obtient donc que

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ x^2y'' + xy' + y = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) + z(t) = 0$$

autrement dit, $z(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Finalement, les solutions de l'équation de départ sont de la forme

$$y(x) = z(\ln x) = \lambda\cos(\ln x) + \mu\sin(\ln x)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 24 :

Résoudre l'équation différentielle suivante à l'aide du changement de variable suggéré :

$(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$, sur $\mathbb{R}$, en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).

WWW.TALIB24.COM

Solution de l'exercice 24 :

L'application $t \mapsto \tan t$ étant bijective de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, on peut poser $x = \tan t$ et $z(t) = y(\tan t)$. On a alors $t = \arctan x$ et ainsi :

$$y(x) = z(\arctan x) = z(t)$$

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2} z'(\arctan x)$$

$$y''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}(z''(\arctan x) - 2xz'(\arctan x))$$

En remplaçant, on obtient que z est solution de l'équation différentielle $z'' + mz = 0$. Pour résoudre cette équation, on doit distinguer trois cas:

- $m < 0$: alors $z(t) = \lambda e^{\sqrt{-m}t} + \mu e^{-\sqrt{-m}t}$ et donc

$$y(x) = \lambda e^{\sqrt{-m}\arctan x} + \mu e^{-\sqrt{-m}\arctan x},$$

- $m = 0$: $z'' = 0$ et donc $z(t) = \lambda t + \mu$ et

$$y(x) = \lambda \arctan x + \mu,$$

- $m > 0$: alors $z(t) = \lambda\cos(\sqrt{m}t) + \mu\sin(\sqrt{m}t)$ et donc

$$y(x) = \lambda\cos(\sqrt{m}\arctan x) + \mu\sin(\sqrt{m}\arctan x)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 25 :

1. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle :

$$x^2y'' + y = 0$$

(utiliser le changement de variable $x = e^t$).

2. Trouver toutes les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x = 0,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Solution de l'exercice 25 :

1. En faisant le changement de variable $x = e^t$ (donc $t = \ln x$) et en posant $z(t) = y(e^t)$ (donc $y(x) = z(\ln x)$, l'équation $x^2y'' + y = 0$ devient $z'' - z' + z = 0$, dont les solutions sont les $z(t) = e^{t/2}\cdot\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$y(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)$$

2. Supposons que f convienne: par hypothèse, f est de classe C^1, donc $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et par conséquent f' aussi. Ainsi f est nécessairement de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$ (en fait, en itérant le raisonnement, on montrerait facilement que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$).

En dérivant l'équation $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, on obtient

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

et en réutilisant l'équation :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}f(x).$$

WWW.TALIB24.COM

Ainsi on obtient que f est solution de $x^2y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^*$. Nécessairement, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)$$

Par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, en particulier elle se prolonge en 0 de façon $\mathcal{C}^1$. Cherchons à quelle condition sur λ, μ cela est possible. Déjà, $f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ pour tous λ, μ ; donc $f(0) = 0$. Mais

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)$$

n'a pas de limite en 0 si $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$. En effet, pour $x_n = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi)}$, on a $x_n \to 0$ mais $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n - 0} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_n}}$ qui admet une limite finie seulement si $\lambda = 0$. De même avec $x_{n'} = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi + \frac{\pi}{2})}$ qui donne $\frac{f(x_{n'})-f(0)}{x_{n'} - 0} = \frac{\mu}{\sqrt{x_{n'}}}$ et implique donc $\mu = 0$.

Par conséquent, la seule possibilité est $\lambda = \mu = 0$. Ainsi f est la fonction nulle, sur $[0, +\infty[$. Le même raisonnement s'applique sur $]-\infty, 0]$. La fonction est donc nécessairement nulle sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, la fonction constante nulle est bien solution du problème initial.

Exercice 26 :

Résoudre l'équation suivante : $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Solution de l'exercice 26 :

Le polynôme caractéristique est $f(r) = (r-1)(r-2)$ et les solutions de l'équation homogène sont donc toutes les fonctions :

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} \quad avec \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^x$.

Or $k=1$ est une solution simple du polynôme caractéristique, alors le polynôme P est de la forme $P(x) = ax + b$, ce qui donne $P(x) = -x$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2e^{2x} \quad avec \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 27 :

Résoudre l'équation suivante : $y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x$.

Solution de l'exercice 27 :

ici $f(r) = (r-1)(r+1)$ et l'équation homogène a pour solutions :

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} \quad avec \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

WWW.TALIB24.COM

On remarque que la fonction $3\cos x$ vérifie l'équation : $y'' - y = -6\cos x$, il nous reste donc à chercher une solution y_1 de l'équation $y'' - y = 2x\sin x$, car $y_p(x) = 3\cos x + y_1(x)$ sera une solution de l'équation considérée. Pour cela, on remarque que $2x\sin x = \mathrm{Im}\ (2xe^{ix})$ et on utilise la méthode décrite plus haut pour trouver une solution z_1 de l'équation : $y'' - y = 2xe^{ix}$. On cherche z_1 sous la forme $P(x)e^{ix}$ où P est un polynôme de degré 1 car $f(i) = -2 = 0$. On a $f'(i) = 2i$, la condition $(*)$ sur P est donc : $2iP'(x) - 2P(x) = 2x$ ce qui donne après identification $P(x) = -x - i$. Alors $y_1(x) = \mathrm{Im}\ ((-x+i)e^{ix}) = -x\sin x - \cos x$. Les solutions sont par conséquent les fonctions :

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + 2\cos x - x\sin x \quad avec \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Autre méthode pour trouver une solution de $y'' - y = 2x\sin x$: On la cherche de la forme $y_1(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x$ où A, B sont des polynômes de degré 1 car i n'est pas racine de l'équation caractéristique (*danger* : pour un second membre du type $Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}$ la discussion porte sur $\alpha + i\beta$ et non sur α ou β...). On calcule y_1', y_1'' et on applique l'équation étudiée à y_1 ... on obtient la condition :

$$(A'' - A - 2B')\sin x + (B'' - B - 2A') = 2x\sin x$$

qui sera réalisée si : $\begin{cases} A'' - A - 2B' = 2x \\ B'' - B - 2A' = 0 \end{cases}$.

On écrit : $A(x) = ax + b$ et $B(x) = cx + d$, après identification on obtient : $a = d = -1$, $b = c = 0$, ce qui détermine y_1.

Exercice 28

Résoudre l'équation suivante : $4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}$.

Solution de l'exercice 28

L'équation caractéristique a 2 racines complexes $r_1 = -1/2 + i$ et $r_2 = \overline{r_1}$ et les solutions de l'équation homogène sont :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1\cos x + c_2\sin x) \quad \text{avec} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

On a $\sin x e^{-\frac{x}{2}} = \mathrm{Im}\ \left(e^{\left(-\frac{1}{2}+i\right)x}\right)$, on commence donc par chercher une solution z_p de l'équation avec le nouveau second membre $e^{(-1/2+i)x}$.Comme $-1/2 + i$ est racine de l'équation caractéristique, on cherchera

$z_p(x) = P(x)e^{(-1/2+i)x}$ avec P de degré 1. Par conséquent la condition $(*)$ sur P :

$$4P'' + f'(-1/2 + i)P' + f(-1/2 + i)P = 1$$

s'écrit ici : $8iP' = 1$ ($P'' = 0$, $f(-1/2 + i) = 0$ et $f'(-1/2 + i) = 8i$), on peut donc prendre $P(x) = -i/8x$ et $z_p(x) = -i/8xe^{(-1/2+i)x}$, par conséquent sa partie imaginaire $y_p(x) = \mathrm{Im}\ (-i/8xe^{(-1/2+i)x}) = 1/8x\sin x e^{-x/2}$ est une solution de notre équation. Les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1\cos x + (c_2 + 1/8x)\sin x) \quad \text{avec} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 2.94

On considère l'équation : $y'' + 2y' + 4y = xe^x$ (E)

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

2. Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).

3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.

4. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, \infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\log t.$$

(a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).

(b) En déduire une expression de f.

Solution de l'exercice 2.94

1. Le polynôme caractéristique associé à E est : $p(x) = x^2 + 2x + 4$; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions

$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x)$$

obtenues lorsque a, b décrivent $\mathbb{R}$.

2. Le second membre est de la forme $e^{\lambda x}Q(x)$ avec $\lambda = 1$ et $Q(x) = x$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(x) = R(x)e^x$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque $p(1) = 0$. On pose donc $R(x) = ax + b$.

On a

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$

Donc y_p est solution si et seulement si $7ax + 7a + 4b = x$. On trouve après identification des coefficients :

$$a = \frac{1}{7} \quad et \quad b = \frac{-4}{49}.$$

La fonction $y_p(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$ est donc solution de E et la forme générale des solutions de E est :

$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x) + \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x \ ; \ a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Soit h une solution de E. Les conditions $h(0) = 1$, $h(1) = 0$ sont réalisées ssi

$$a = \frac{53}{49} \quad et \quad b = -\frac{53\cos\sqrt{3} + 3e^2}{49\sin\sqrt{3}}.$$

4.

(a) On a : $g'(x) = e^x f'(e^x)$ et $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \log e^x = xe^x$$

donc g est solution de E.

(b) Réciproquement pour $f(t) = g(\log t)$ où g est une solution de E on montre que f est 2 fois dérivable et vérifie

WWW.TALIB24.COM

l'équation donnée en 4. Donc les fonctions f recherchées sont de la forme :

$$\frac{1}{t}(a\cos(\sqrt{3}\log t) + b\sin(\sqrt{3}\log t)) + \frac{t}{7}(\log t - \frac{4}{7}) \ ; \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 30 :

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(\text{E.D.}) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E.D.).

2. Trouver une solution particulière de (E.D.) lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.

3. Donner la forme générale des solutions de (E.D) lorsque $d(x) = \frac{e^{-2x}+e^{2x}}{4}$.

Solution de l'exercice 30 :

1. L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ a une racine (double) $r = 2$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y(x) = (c_1x + c_2)e^{2x} \quad o\grave{u} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Pour $d(x) = e^{-2x}$ on peut chercher une solution particulière de la forme : $y_1(x) = ae^{-2x}$ car -2 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $y_{1'}(x) = -2e^{-2x}$ et $y_{1''}(x) = 4ae^{-2x}$. Par conséquent y_1 est solution si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4a - 4(-2a) + 4a)e^{-2x} = e^{-2x}$$

donc si et seulement si $a = \frac{1}{16}$.

Pour $d(x) = e^{2x}$ on cherche une solution de la forme $y_2(x) = ax^2e^{2x}$, car 2 est racine double de l'équation caractéristique. On a $y_{2'}(x) = (2ax + 2ax^2)e^{2x}$ et $y_{2''}(x) = (2a + 4ax + 4ax + 4ax^2)e^{2x} = (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x}$. Alors y_2 est solution si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4ax^2 + 8ax + 2a - 4(2ax + 2ax^2) + 4ax^2)e^{2x} = e^{2x}$$

donc si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

3. On déduit du principe de superposition que la fonction

$$y_p(x) = \frac{1}{4}(y_1(x) + y_2(x)) = \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x}$$

est solution de l'équation pour le second membre donné dans cette question, et la forme générale des solutions est alors :

$$y(x) = (c_1x + c_2)e^{2x} + \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x} \quad o\grave{u} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 31 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' + 2y = x\cos x\, ch x.$$

Solution de l'exercice 31 :

WWW.TALIB24.COM

L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2y' + 2y = 0$ est $r^2 - 2r + 2 = 0$ dont les racines sont $1 - i$ et $1 + i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x(\lambda\cos x + \mu\sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. L'équation avec second membre s'écrit

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{x}{4}(e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1-i)x}).$$

On applique alors le principe de superposition des solutions.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(1+i)x}$.

$1 + i$ est racine simple de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto (ax^2 + bx)e^{(1+i)x}$. D'après la formule de Leibniz :

$$f'' - 2f' + 2f = (((1+i)^2(ax^2 + bx) + 2(1+i)(2ax + b) + 2a)$$

$$-2((1+i)(ax^2 + bx) + (2ax + b)) + 2(ax^2 + bx))e^{(1+i)x}$$

$$= (2(1+i)(2ax + b) + 2a - 2((2ax + b)))e^{(1+i)x}$$

$$= (2i(2ax + b) + 2a)e^{(1+i)x}$$

$$= (4iax + 2a + 2ib)e^{(1+i)x}$$

puis,

$$f'' - 2f' + 2f = xe^{(1+i)x} \Leftrightarrow 4ia = 1$$

$$et \;\; 2ib + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{i}{4} \;\; et \;\; b = \frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation :

$y'' - 2y' + 2y = xe^{(1+i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{4}(-ix^2 + x)e^{(1+i)x}$.

Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(1-i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{4}(ix^2 + x)e^{(1-i)x}$.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(-1+i)x}$.

$-1 + i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto (ax + b)e^{(-1+i)x}$.

D'après la formule de Leibniz :

$$f'' - 2f' + 2f = (((-1+i)^2(ax + b) + 2(-1+i)a) - 2((-1+i)(ax + b) + a) + 2(ax + b))e^{(-1+i)x}$$

$$= ((ax + b)(-2i - 2(-1+i) + 2) + 2(-1+i)a - 2a)e^{(-1+i)x}$$

$$= (4(1-i)(ax + b) - 2(2-i)a)e^{(1+i)x} = (4(1-i)ax - 2(2-i)a + 4(1-i)b)e^{(1+i)x}$$

puis,

$$f'' - 2f' + 2f = xe^{(-1+i)x} \Leftrightarrow 4(1-i)a = 1 \;\; et \;\; 4(1-i)b - 2(2-i)a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1+i}{8} \;\; et \;\; b = \frac{(2-i)(1+i)}{16(1-i)} = \frac{(3+i)(1+i)}{32} = \frac{1+2i}{16}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(-1+i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{16}(2(1+i)x + 1 + 2i)e^{(-1+i)x}$. Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(-1-i)x}$ est

WWW.TALIB24.COM

$$x \mapsto \frac{1}{16}(2(1-i)x+1-2i)e^{(-1-i)x}.$$

Une solution particulière de l'équation

$$y''-2y'+2y = x\cos x\,\mathrm{ch}\ x$$

est donc

$$\frac{1}{4}(2\,Re\,(\frac{1}{4}(-ix^2+x)e^{(1+i)x}+\frac{1}{16}(2(1+i)x+1+2i)e^{(-1+i)x})$$

$$=\frac{1}{32}\,Re\,(4(-ix^2+x)(\cos x+i\sin x)e^{x}+(2x+1+2(x+1)i)(\cos x + i\sin x)e^{-x}$$

$$=\frac{1}{32}(4(x\cos x+x^2\sin x)e^{x}+((2x+1)\cos x-2(x+1)\sin x)e^{-x})$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme

$x \mapsto (\frac{1}{8}(x\cos x+x^2\sin x)+\lambda\cos x+\mu\sin x)e^{x}+((2x+1)\cos x-2(x+1)\sin x)e^{-x}),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$

Exercice 32 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y''+6y'+9y = x^2e^{2x}.$$

Solution de l'exercice 32 :

L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''+6y'+9y=0$ est $r^2+6r+9=0$ qui admet la racine double $r=-3$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{-3x}(\lambda x+\mu),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Comme 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f: x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$. D'après la formule de Leibniz :

$$f''+6f'+9f = ((4(ax^2+bx+c)+4(2ax+b)+2a)+6(2(ax^2+bx+c)+(2ax+b))+9(ax^2+bx+c))e^{2x}$$

$$=(25(ax^2+bx+c)+10(2ax+b)+2a)e^{2x} = (25ax^2+(20a+25b)x+2a+10b+25c)e^{2x}$$

puis,

$$f''+6f'+9f = x^2e^{2x} \Leftrightarrow 25a=1 \ \ et\ \ 20a+25b = 0 \ \ et\ \ 2a+10b+25c=0$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{1}{25}\ \ et\ \ b=-\frac{4}{125}\ \ et\ \ c=\frac{6}{625}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''+6y'+9y = x^2e^{2x}$ est $x \mapsto \frac{1}{625}(25x^2-20x+6)e^{2x}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{625}(25x^2-20x+6)e^{2x}+(\lambda x+\mu)e^{-3x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

WWW.TALIB24.COM