

Résumés de cours
Exercices et contrôles corrigés

■ Optique
géométrique ■

■ Table des matières ■

OPTIQUE GEOMETRIQUE

Chapitre 11. Lois générales	247	<i>Énoncés des exercices 1 à 10</i>	298
Principe de Fermat et conséquences	247	<i>Contrôle 1</i>	312
Lois de Descartes	248	<i>Contrôle 2</i>	314
Stigmatisme et aplanétisme	249	<i>Corrigés des exercices</i>	317
Le prisme	250	<i>Corrigé du contrôle 1</i>	338
<i>Énoncés des exercices 1 à 9</i>	252	<i>Corrigé du contrôle 2</i>	342
<i>Corrigés des exercices</i>	260		
Chapitre 12. Formation des images. Miroir et dioptre plans.		Chapitre 14. Instruments d'optique	347
Miroir sphérique	275	L'œil	347
Formation des images	275	La loupe	348
Miroir et dioptre plans	276	Le microscope	349
Miroir sphérique	277	La lunette astronomique	351
<i>Énoncés des exercices 1 à 9</i>	279	<i>Énoncés des exercices 1 à 8</i>	352
<i>Contrôle</i>	281	<i>Contrôle 1</i>	364
<i>Corrigés des exercices</i>	283	<i>Contrôle 2</i>	366
<i>Corrigé du contrôle</i>	289	<i>Corrigés des exercices</i>	368
Chapitre 13. Dioptres sphériques. Lentilles minces	293	<i>Corrigé du contrôle 1</i>	386
Dioptre sphérique	293	<i>Corrigé du contrôle 2</i>	388
Lentilles minces	295		

Lois générales

PRINCIPE DE FERMAT ET CONSEQUENCES

► Généralités

La lumière est une onde lumineuse qui se propage dans le vide à la célérité $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. Chaque onde est caractérisée par une périodicité spatiale λ (la longueur d'onde, en mètre) et par une périodicité temporelle T , en seconde ; ces deux grandeurs sont reliées par la relation :

$$\lambda = cT$$

Dans un milieu transparent, homogène et isotrope (MTHI) la lumière se propage en ligne droite.

Lorsqu'un rayon lumineux rencontre une ouverture de faible dimension, la loi de propagation rectiligne n'est plus respectée à cause du phénomène de diffraction, les limites de l'optique géométrique sont atteintes.

En optique géométrique, on considère que :

- les rayons sont indépendants les uns des autres (pas d'interférences) ;
- dans un MTHI la lumière se propage en ligne droite ;
- le trajet suivi par la lumière est indépendant du sens de propagation (principe du retour inverse).

► Indice d'un milieu

L'indice d'un milieu (n) est défini par le rapport de la célérité de la lumière dans le vide sur la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu considéré :

$$n = \frac{c}{v} \quad (n \geq 1)$$

Si l'indice du milieu dépend de la longueur d'onde, on parle de milieu dispersif. L'indice peut alors s'exprimer à partir de la formule de Cauchy :

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

où a et b sont 2 constantes positives.

► Chemin optique

Pour une courbe (C) quelconque joignant 2 points A et B dans un milieu

d'indice n , on appelle chemin optique L la grandeur : $L = \int_A^B n dl$.

Or $n = \frac{c}{v}$, d'où :

$$L^i = \int_A^B c \frac{dt}{v} = \int_A^B c dt = c(t_B - t_A)$$

Le chemin optique représente la distance parcourue dans le vide pendant le temps mis dans le milieu pour aller de A à B.

► Principe de Fermat

Entre deux points A et B, le chemin optique le long du trajet effectivement suivi par la lumière est stationnaire par rapport aux chemins fictifs voisins menant de A à B.

$$\delta \left(\int_A^B n d\ell \right) = 0$$

Conséquences immédiates :

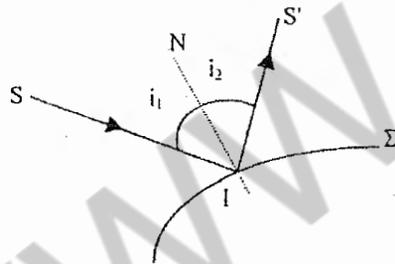
- dans un milieu transparent et homogène, la lumière se propage en ligne droite ;
- loi du retour inverse de la lumière : tout chemin effectivement parcouru dans un sens par la lumière peut être parcouru dans le sens opposé.

LOIS DE DESCARTES

► Loi de la réflexion

Un rayon lumineux SI arrive en I sur une surface Σ avec un angle d'incidence i_1 par rapport à la normale N. On constate que :

- le rayon réfléchi IS' est contenu dans le plan d'incidence (plan contenant le rayon incident SI et la normale IN au dioptre au point d'incidence) ;
- l'angle de réflexion (i_2) est tel que $i_1 = i_2$.

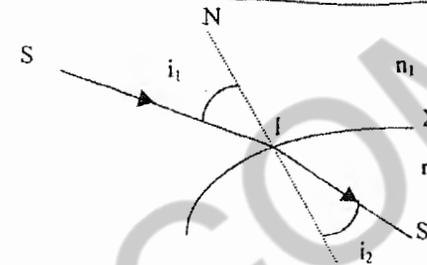


► Pour la réfraction

Lors de la traversée par un rayon lumineux SI d'une surface Σ séparant deux milieux d'indices différents n_1 et n_2 , on constate que :

- le rayon réfracté IS'' est contenu dans le plan d'incidence ;
- l'angle de réfraction est tel que :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$



► Réflexion totale

D'après la loi de la réfraction $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$:

- si $n_1 < n_2$ il y a toujours un rayon réfracté. Si $i_1 = \pi/2$ (incidence rasante), $i_2 = \arcsin \frac{n_1}{n_2}$.

- si $n_1 > n_2$, il existe une valeur limite λ pour i_1 telle que :

$$\frac{n_1}{n_2} \sin \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

λ est l'angle de réfraction limite.

Si $i_1 \leq \lambda$, le rayon réfracté existe ; si $i_1 > \lambda$, la lumière incidente est réfléchie. C'est le phénomène de réflexion totale (propriété utilisée dans certains prismes, dans les guides de lumière, les fibres optiques, les endoscopes).

STIGMATISME ET APLANETISME

► Stigmatisme rigoureux

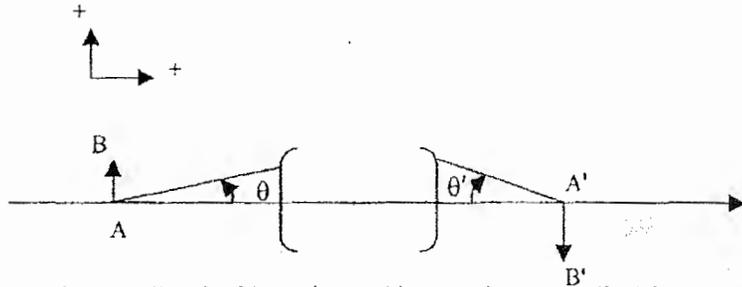
Un système optique est stigmatique lorsque tout rayon passant par un point objet A passe par le point A', image de A (c'est à dire que l'image d'un point est ponctuelle). Il y a stigmatisme rigoureux lorsque le chemin optique de A à A' est constant pour tous les rayons menant de A à A'. On dit que A et A' sont deux points conjugués. Remarquons que le stigmatisme est difficile à réaliser et que seul le miroir plan est stigmatique pour tous les points de l'espace.

► Stigmatisme approché

On a stigmatisme approché si tous les rayons issus d'un point A convergent approximativement (forment une petite tache) au point A' après avoir traversé le système optique.

Dans la pratique, le stigmatisme approché sera suffisant car du fait de la structure granulaire du récepteur (œil ou émulsion photographique) la tache image sera vue comme ponctuelle.

▶ **Aplanétisme**



Un système est dit aplanétique si tout objet AB plan perpendiculaire à l'axe optique a une image plane A'B' perpendiculaire à l'axe. La condition d'aplanétisme est donnée par la condition des sinus d'Abbe :

$$nA B \sin \theta = n' A' B' \sin \theta'$$

▶ **Conditions de Gauss**

Considérons un système "centré" c'est à dire possédant un axe de symétrie de révolution définissant l'axe optique du système. Dans les conditions de Gauss, on obtient un stigmatisme et un aplanétisme approchés. Ces conditions sont réalisées lorsque les rayons incidents issus d'un point objet sont :

- faiblement inclinés par rapport à l'axe optique ;
- voisins de cet axe optique.

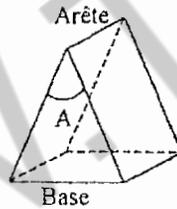
De tels rayons sont dits paraxiaux.

LE PRISME

▶ **Description**

Un prisme est un milieu homogène transparent et isotrope limité par deux faces planes non parallèles.

On note A l'angle du prisme et tout plan perpendiculaire à l'arête est un plan de section principale.



▶ **Relations du prisme**

SI est le rayon incident, le rayon émergent (si $r' < \lambda$) du prisme est toujours dévié vers la base du prisme.

Lois de la réfraction en I et I' :

$$\sin i = n \sin r$$

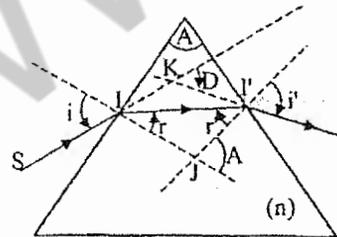
$$n \sin r' = \sin i'$$

Dans le triangle II'J :

$$A = r + r'$$

Dans le triangle II'K :

$$D = i + i' - A$$



Ces quatre relations sont valables dans tous les cas de figure, en comptant positivement les angles i, r dans le sens trigonométrique et en sens inverse les angles i', r' et D.

Dans le cas des petits angles, on pourra écrire :

$$i = nr ; nr' = i' ; D = (n - 1)A$$

▶ **Etude de la déviation**

L'angle de déviation D du prisme dépend de trois paramètres : l'angle A, l'angle d'incidence i et l'indice n.

Si on fait varier A à n et i constants, on constate que la déviation augmente lorsque A augmente.

Si on fait varier n (polyprisme) à A et i constants, on constate que la déviation augmente lorsque n augmente.

Si on fait varier i à A et n constants, on constate que la déviation est minimale (D_{min}) pour :

$$r = r' = \frac{A}{2} \text{ et } i = i' = \text{Arcsin}(n \sin \frac{A}{2})$$

Le rayon incident et le rayon émergent sont symétriques par rapport au plan de symétrie du prisme passant par l'arête.

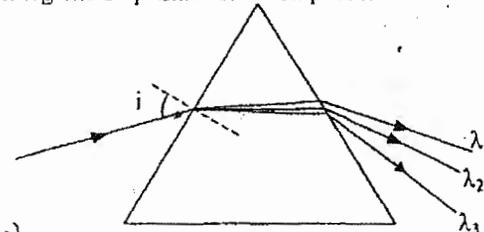
Le rayon II' est parallèle à la base du prisme.

L'indice du prisme est donné par la relation :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_{min} + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

▶ **Etude de la dispersion**

Lorsque que le prisme est éclairé par une lumière blanche (polychromatique) la lumière émergente du prisme est décomposée.



($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$)

L'écart entre les deux rayons à l'intérieur du prisme est exagéré pour mettre en évidence le fait que les deux rayons ne se superposent pas.

L'indice est fonction de la longueur d'onde suivant la loi de Cauchy, si $\lambda \nearrow$ alors $n \searrow$ et par conséquent la déviation diminue.

En lumière blanche la radiation la moins déviée est donc le rouge et la plus déviée le violet.

► **Énoncés des exercices** ◄

■ **Exercice 1 : lois de Descartes**.....

- Un rayon lumineux se propage rectilignement dans un milieu homogène et isotrope d'indice absolu n . Ce rayon parcourt le chemin géométrique $AA' = d$.
Exprimer le chemin optique (AA') en fonction de n et de d .
- Un rayon lumineux, issu d'un point A , atteint le point A' après réflexion en I , sur un miroir plan (figure 1).
Les trajets AI et IA' sont rectilignes dans le plan xOy et sont parcourus dans un milieu d'indice absolu n . Dans le repère (Ox, Oy) , les points A , I et A' ont respectivement pour coordonnées $(0, b)$, $(x, 0)$ et (a', b') .
a) Exprimer le chemin optique (AIA') en fonction de x .
b) Montrer que le chemin optique (AIA') possède une valeur minimale correspondant à une relation simple entre i et i' .

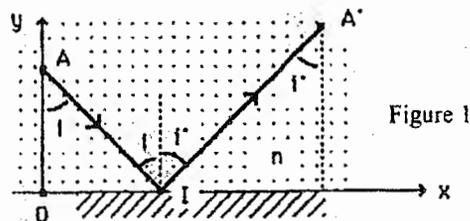


Figure 1

- Le rayon lumineux subit maintenant une réfraction à la traversée d'un dioptre plan, séparant deux milieux d'indices n et n' . Les trajets AI et IA' sont parcourus respectivement dans les milieux d'indices n et n' , et sont contenus dans le plan xOy . Dans le repère (Ox, Oy) , les points A , I et A' ont respectivement pour coordonnées $(0, b)$, $(x, 0)$ et (a', b') (figure 2).
a) Exprimer le chemin optique (AIA') en fonction de x .
b) Montrer que le chemin optique (AIA') possède une valeur minimale correspondant à une relation simple entre les angles i et i' .

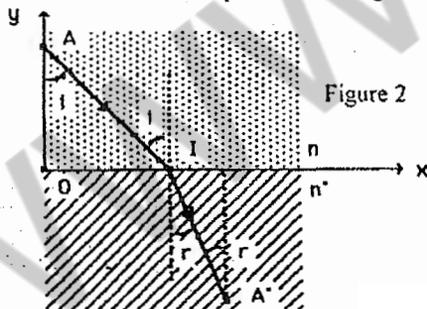


Figure 2

■ **Exercice 2**.....

Une surface Σ sépare deux milieux d'indices n_1 et n_2 . Un rayon lumineux arrive sur la surface Σ avec un angle d'incidence i_1 .
Tracer le rayon réfracté en utilisant la méthode géométrique de Huyghens. Montrer que cette construction permet de retrouver une des lois de Descartes.

■ **Exercice 3**.....

Un rayon lumineux SI arrive sur la face AB d'un prisme d'indice n avec un angle d'incidence i (figure 1).
1. Quelle est la condition liant i , n et l'angle β au point B pour qu'il y ait réflexion totale sur la face BC ?
2. Calculer l'angle que fait le rayon émergent par la face AC avec la normale à cette face.
Application numérique : $i = 30^\circ$, $n = 1,5$ et $\beta = 60^\circ$.

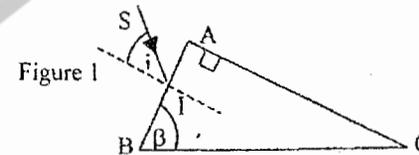


Figure 1

■ **Exercice 4 : Étude de l'arc-en-ciel**.....

L'étude de l'arc-en-ciel commence par le calcul de la déviation de la lumière supposée ici monochromatique dans une goutte d'eau sphérique.

1. **Calcul de la déviation**

- On trace, à la surface du dioptre sphérique, pour le rayon incident S , le rayon réfracté R_1 dans la goutte d'eau.
Compléter la figure 1 (le rayon réfléchi en M ne sera pas tracé).
- Le rayon R_1 arrive en N à la surface interne du dioptre. Compléter la figure 1 et commenter brièvement.
- Déterminer la déviation D pour le rayon sorti de la goutte après avoir subi une réflexion interne. On exprimera D en fonction de i et de n .
- Montrer que la déviation D passe par un extremum D_m pour une valeur i_m de i . Montrer que D_m est un minimum dans le cas où $n = 4/3$.
Calculer D_m pour $n = 4/3$.

La hauteur d'incidence est la distance qui sépare le rayon incident d'un axe parallèle passant par le centre de la goutte (on pourrait l'appeler également par analogie paramètre d'impact). Calculer la hauteur d'incidence en fonction du rayon de la goutte au minimum de déviation.

Le modèle de l'arc-en-ciel est introduit à partir du concept de goutte d'eau sphérique de rayon R et d'indice n , recevant des rayons lumineux provenant

du Soleil supposé ponctuel et à l'infini. Le rayon lumineux pénètre dans la goutte, y subit une réflexion interne et en ressort.

5. Etude qualitative

- Pourquoi observe-t-on toujours un cercle ou un arc de cercle ? On s'aidera de la figure 2 pour se rendre compte de la symétrie du phénomène.
- Pourquoi l'observation du phénomène est-elle difficile ou impossible à midi ?
- Deux observateurs distants de quelques mètres voient-ils la même image du phénomène ?

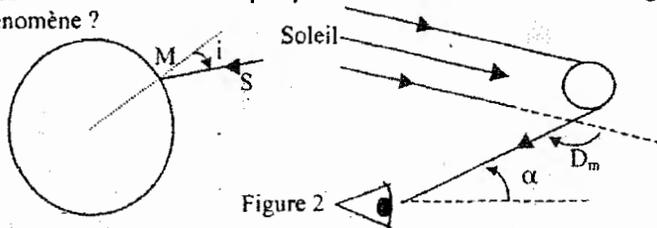


Figure 1

Figure 2

II. Etude de la dispersion

On travaille en lumière blanche.

- Quelle est l'étendue du spectre visible dans le domaine des longueurs d'onde ?
- Pourquoi observe-t-on des couleurs dans l'arc-en-ciel ?
- Montrer que la déviation minimale croît avec l'indice n de la goutte et estimer la variation de la déviation ΔD pour une variation d'indice $\Delta n = 0,01$. On peut considérer que l'incidence i correspondant à la déviation minimale est sensiblement constante pour l'ensemble du spectre visible.
- En posant $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$, A et B étant positifs, indiquer, du violet ou du rouge, la couleur qui est la plus déviée. Pour cela, on calculera les variations de α , où α est l'inclinaison des rayons issus du sommet de l'arc pour l'observateur terrestre.

■ ■ Exercice 5

Soit un prisme d'angle A et d'indice n .

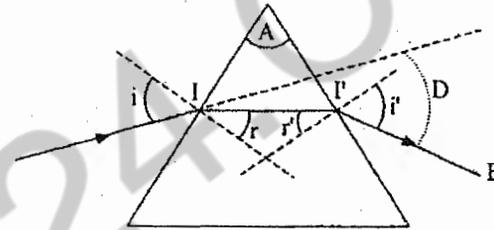
- Un rayon incident pénètre-t-il toujours dans le prisme ?
- Etablir la condition sur l'angle d'incidence i pour qu'il y ait toujours un rayon émergent.
- Etablir une seconde condition qui met en jeu l'angle A .

■ ■ Exercice 6

Soit un prisme en verre d'indice n , ayant comme angle au sommet $A = 60^\circ$. Les relations vérifiées par les différents angles sont les suivantes :

- $\sin i = n \sin r$; (2) $n \sin r' = \sin i'$; (3) $D = i + i' - A$; (4) $A = r + r'$
- $\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right)$, avec D_m angle de déviation minimale.

D est l'angle de déviation, il dépend à la fois de i et de la longueur d'onde λ pénétrant dans le prisme.



On éclaire le prisme avec un faisceau lumineux composé de plusieurs radiations. Pour chaque radiation on relève le minimum de déviation D_m , les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

λ (nm)	405	434	486	589	656	768
D_m	51,58	50,77	49,67	48,49	48,00	47,51

- Rappeler la définition de l'indice d'un milieu. En vous aidant de la relation (5), déterminer la valeur de l'indice correspondant à chaque radiation. A chaque valeur de l'indice n correspond une longueur d'onde bien déterminée. Quelle est la grandeur qui se conserve à la traversée d'un prisme ?
- On dit que le verre est un milieu dispersif, que cela signifie-t-il ?
- Les radiations lumineuses font-elles parties du domaine visible ?
- On place un écran au point E, qu'observe-t-on ? Quelle est la radiation la plus déviée et la moins déviée ? Quel est le rôle joué par le prisme ?
- Tracer le graphe $n = f\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, en déduire la relation liant n et λ .

■ ■ Exercice 7

Les radiations seront caractérisées par leur longueur d'onde dans le vide. On considère un prisme constitué par une substance supposée non absorbante, homogène et isotrope, d'indice n ($n > 1$) pour une radiation de longueur d'onde λ . Le milieu extérieur, dans lequel est plongé ce prisme, est l'air dont l'indice sera pris égal à 1.

Le plan de la figure 1 est un plan de section principale.
 Les différents angles qui y interviennent sont comptés positivement dans le sens indiqué sur la figure et sont définis comme suit :

$A = (\overline{AB}, \overline{AC})$: angle du prisme ; on peut également l'exprimer par

$$A = (\overline{IN}, \overline{I'N'}) ;$$

$$i = (\overline{IN}, \overline{SI}) ; r = (\overline{IN}, \overline{I'N'}) ; r' = (\overline{I'N'}, \overline{I'S'}) ; i' = (\overline{I'S'}, \overline{I'N'}) ;$$

$D = (\overline{I'S'}, \overline{SI})$: angle de déviation.

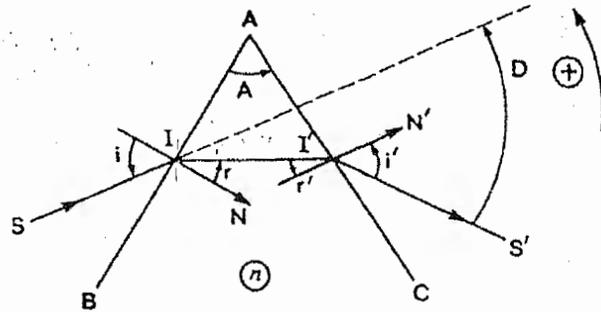


Figure 1

1. Rappeler la définition d'un plan de section principale.
2. Formules du prisme
 - a) Quelle est la relation qui lie l'angle i , l'angle r et l'indice n ? [relation (1)].
Même question avec les angles i' , r' et l'indice n [relation (2)].
 - b) Montrer qu'une relation très simple lie la somme $r + r'$ et l'angle A [relation (3)].
 - c) Montrer qu'une relation très simple lie D (angle de déviation) à la somme $i + i'$ et à A [relation (4)].
3. Influence de l'angle d'incidence sur la déviation
 On considère une radiation de longueur d'onde λ donnée ; on se propose d'étudier l'influence de l'angle d'incidence sur la déviation.
 - a) En différenciant les relations (1), (2), (3), (4) établies au 2. montrer que :

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r}$$
 - b) Quelles relations existe-t-il entre r et r' d'une part, entre i et i' d'autre part, quand la déviation est extrémale ? On admettra que cet extremum est un minimum que l'on notera D_m . Tracer l'allure de la courbe $D = f(i)$.
 - c) Montrer alors que les mesures de l'angle de déviation minimale D_m et de A (angle du prisme) permettent d'accéder à l'indice n du prisme pour la radiation considérée.
 - d) Application numérique : on a $A = 60,00^\circ$.
 Pour la radiation considérée $D_m = 58,20^\circ$.
 Déterminer n pour cette radiation.
4. Influence de la valeur de l'indice sur la déviation

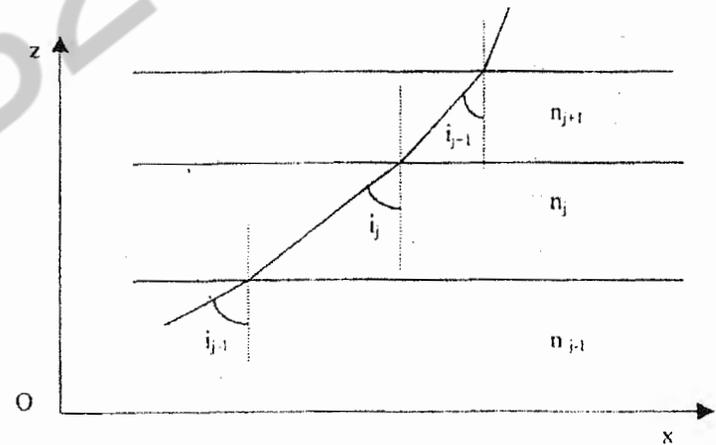
L'angle d'incidence est maintenant fixé. On veut étudier la variation de D avec l'indice du prisme. En procédant comme à la question 3, montrer que :

$$\frac{dD}{dn} = \frac{\sin A}{\cos i' \cos r}$$

■ ■ ■ Exercice 8

Au voisinage d'un plan horizontal du sol terrestre fortement chauffé par le rayonnement solaire, l'indice de l'air varie et la propagation des rayons lumineux n'est plus rectiligne. Il en résulte un phénomène d'illusion d'optique appelé mirage. On supposera que le phénomène a lieu sur une distance suffisamment faible pour pouvoir négliger la rotondité de la Terre.

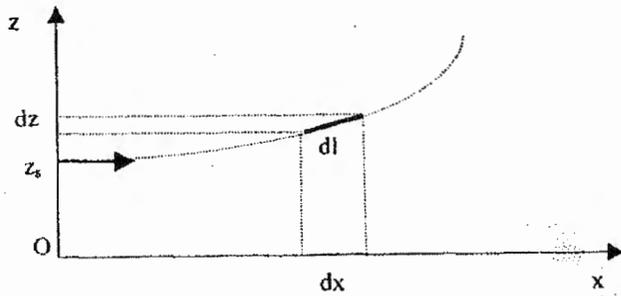
1. On considère un rayon lumineux traversant un milieu stratifié formé de milieux d'indices $n_1, n_2, \dots, n_j, \dots$ limités par des dioptries plans parallèles, d'équation $z = \text{constante}$.



Quelles relations lient $n_{j-1}, n_j, n_{j+1}, i_{j-1}, i_j, i_{j+1}$? En déduire une grandeur invariante au cours de la propagation d'un rayon lumineux si le milieu est à gradient d'indice $n = f(z)$.

Soit une surface plane à la surface de la Terre fortement chauffée par le rayonnement solaire. On suppose que l'indice de l'air dépend uniquement de l'altitude z selon une loi $n(z)$. Une source lumineuse S située à l'altitude z_s émet un rayon lumineux vers les x positifs perpendiculairement au plan yOz et admet une trajectoire $z = f(x)$.

2. Soit une portion élémentaire dl du rayon lumineux, de composantes dx sur Ox et dz sur Oz . Quelle relation lie les rapports $\frac{n(z_s)}{n(z)}$ et $\frac{dz}{dx}$?



Au voisinage du sol, l'indice de l'air varie suivant la loi $n(z) = n_0 + \alpha z$ où n_0 est l'indice au niveau du sol et α une constante positive. Dans la suite du problème, on s'intéressera aux faibles altitudes z , inférieures à 10 cm, et on prendra pour valeurs numériques : $n_0 = 1,000250$; $\alpha = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$.

3. Au vu des valeurs numériques données dans l'énoncé, justifier tout d'abord que la valeur numérique du rapport $\frac{dz}{dx}$ est très inférieure à 1.
4. En déduire que l'équation de la trajectoire du rayon lumineux dans la zone à gradient d'indice est assimilable à un arc de parabole d'équation :

$$z = z_s + \frac{\alpha}{2n_0} x^2$$

5. La source émet désormais des rayons dans toutes les directions et pas seulement perpendiculairement au plan yOz . On étudiera spécifiquement les rayons contenus dans le plan xOz . On ne considère dans cette question que la zone où les trajectoires des rayons lumineux sont toutes assimilables à des arcs de parabole tels que ceux décrits dans la question précédente. L'œil d'un observateur est placé à la même altitude z_s que la source.

Exprimer la distance maximale d entre source et observateur, au delà de laquelle l'observateur ne pourra plus voir la source.

L'espace est maintenant séparé en deux zones distinctes :

- la zone proche du sol (altitude inférieure à 0,1 m) où les trajectoires lumineuses sont des arcs de parabole ;
- la zone supérieure où les trajectoires lumineuses sont rectilignes.

6. Expliquer, à l'aide d'un schéma, ce que voit l'observateur lorsque son œil et la source sont placés à la même altitude, au dessus de la zone à gradient d'indice, et que la distance qui les sépare est grande.
7. Dans quelles circonstances le phénomène abordé dans ce problème est-il couramment observable ?

■ ■ ■ Exercice 9

1. Principe du guidage optique

La fibre optique est assimilable à un cylindre de révolution d'axe Oz . (figure 1). Elle est constituée d'un cœur, cylindre de rayon a , et d'une gaine, couronne cylindrique dont le rayon varie entre a et b .

On supposera que le cœur et la gaine sont constitués de deux milieux transparents isotropes d'indices respectifs n_1 et n_2 uniformes, tels que $n_1 > n_2$.

Un rayon incident SI venant de l'air (indice $n = 1$) tombe sur le cœur de la fibre sous un angle d'incidence θ_0 (figure 2). Il est coplanaire avec l'axe Oz .

Montrer que si θ_0 reste inférieur à une certaine valeur θ_l , ce rayon sera guidé dans le cœur de la fibre.

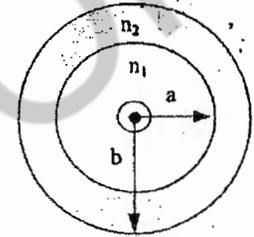


Figure 1

Exprimer $\sin \theta_l$, ouverture numérique de la fibre, en fonction de n_1 et n_2 .

2. L'impulsion lumineuse à guider est transportée par un faisceau lumineux conique convergent, d'axe de symétrie Oz , de demi-angle au sommet θ_0 ($\theta_0 < \theta_l$) (figure 2).

La fibre utilisée a une longueur ℓ .

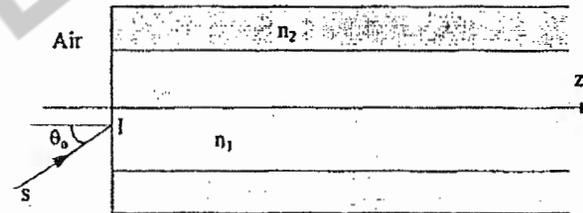


Figure 2

- a) Montrer que tous les rayons lumineux guidés dans la fibre n'y parcourent pas le même chemin géométrique.

Evaluer le chemin optique parcouru, L_θ , par le rayon incident sous l'angle θ .

- b) En déduire que l'ensemble des rayons incidents du cône précédent, pénétrant dans la fibre au même instant, n'en ressortent pas simultanément.

Déterminer l'élargissement temporel Δt de l'impulsion lumineuse incidente, intervalle de temps séparant la sortie des différents rayons.

Exprimer Δt en fonction de n_1 , ℓ , θ_0 et c (célérité de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide).

Application numérique : Calculer Δt pour $n_1 = 1,5$, $\ell = 1 \text{ m}$, $\theta_0 = 10^\circ$.

- c) Quel inconvénient cet élargissement présente-t-il pour la propagation des informations en télécommunications, sachant que le nombre d'informations véhiculées par unité de temps doit être très important ?

3. Amélioration du guidage : fibre à gradient d'indice

On considère maintenant que l'indice varie continûment du cœur de la fibre ($r = 0, n = n_1$) à la gaine ($r = a, n = n_2$) selon la loi :

$$n^2(r) = n_1^2 - (n_1^2 - n_2^2) \frac{r^2}{a^2} \quad \text{avec } n_1 > n_2$$

- a) En assimilant le cœur de la fibre à une succession de couches dans lesquelles l'indice est constant, montrer qualitativement qu'un rayon lumineux incident appartenant à un plan méridien de la fibre s'y incurve.
- b) Etablir l'équation différentielle permettant d'obtenir la trajectoire $r(z)$ des rayons à l'intérieur de la gaine.
- c) On suppose que le rayon entre dans la fibre en O, sur l'axe, sous une incidence θ_0 (figure 3).

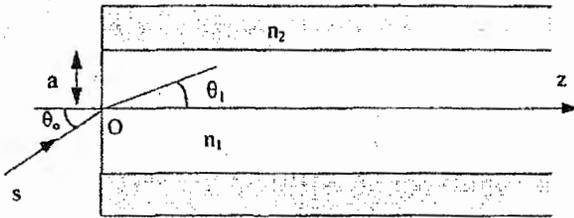


Figure 3

Déterminer l'équation de la trajectoire suivie par les rayons lumineux.

A quelle condition y a-t-il effectivement guidage ?

► Corrigés des exercices ▼

Corrigé 1.....

1. Par définition :

$$(AA') = nd$$

2. a) On exprime les coordonnées respectives de chaque point puis le chemin optique (AIA') :

A(0, b) ; I(x, 0) ; A'(a', b')

$$(AIA') = n(AI + IA')$$

$$AI = (x^2 + b^2)^{1/2} ; IA' = ((a' - x)^2 + b^2)^{1/2} \text{ d'où :}$$

$$(AIA') = n(x^2 + b^2)^{1/2} + n((a' - x)^2 + b^2)^{1/2}$$

b) Le chemin optique est minimal si $\frac{d(AIA')}{dx} = 0$ et si $\frac{d^2(AIA')}{dx^2} > 0$.

$$\frac{d(AIA')}{dx} = 0 = \frac{nx}{(x^2 + b^2)^{1/2}} - \frac{n(a' - x)}{((a' - x)^2 + b^2)^{1/2}}$$

On peut faire apparaître le sinus des angles i et i' :

$$\sin i = \frac{x}{(x^2 + b^2)^{1/2}} \text{ et } \sin i' = \frac{(a' - x)}{((a' - x)^2 + b^2)^{1/2}}$$

D'où :

$$\sin i = \sin i' \text{ soit } i = i'$$

La dérivée seconde ne contient que des termes positifs, l'extremum est donc un minimum.

3. a) On procède de la même façon que pour la question précédente :

$$(AIA') = nAI + n'IA'$$

$$(AIA') = n(b^2 + x^2)^{1/2} + n'(b'^2 + (a' - x)^2)^{1/2}$$

b) On dérive l'expression de chemin optique par rapport à x :

$$0 = \frac{nx}{(b^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{n'(a' - x)}{(b'^2 + (a' - x)^2)^{1/2}}$$

On fait apparaître le sinus des angles i et r :

$$\sin i = \frac{x}{(b^2 + x^2)^{1/2}} \text{ et } \sin r = \frac{(a' - x)}{(b'^2 + (a' - x)^2)^{1/2}}$$

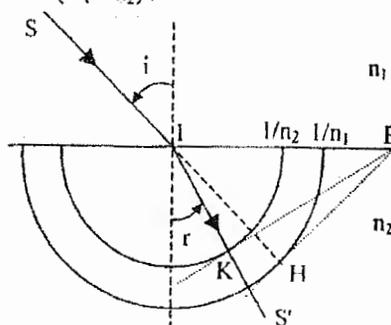
D'où :

$$n \sin i = n' \sin r$$

La dérivée seconde est strictement positive, l'extremum est donc un minimum.

Corrigé 2.....

Construction géométrique du rayon réfracté par la méthode dite de Huyghens ($n_1 < n_2$) :



On trace deux cercles de rayons respectifs $1/n_2$ et $1/n_1$ et de centre I.

Le rayon incident SI rencontre le cercle de rayon $1/n_1$ au point H. On mène la tangente en H qui coupe le dioptre au point P. A partir du point P on trace la tangente au cercle de rayon $1/n_2$, ce qui nous donne le point K. Le

rayon réfracté IS' passe par ce point.

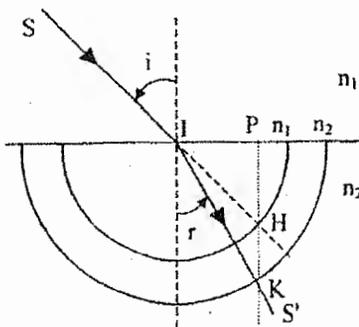
Au point P, l'angle $\widehat{IPH} = i_1$ et l'angle $\widehat{IPK} = i_2$ d'où :

$$\sin i_2 = \frac{IK}{IP} \text{ et } \sin i_1 = \frac{IH}{IP}, \text{ comme } IK = 1/n_2 \text{ et } IH = 1/n_1 \text{ on en déduit :}$$

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

On retrouve la seconde loi de Descartes.

Autre construction possible.



On trace deux cercles de rayons respectifs n_2 et n_1 et de centre I.

Le rayon incident SI rencontre le cercle de rayon n_1 au point H. On mène la parallèle à la normale qui coupe le dioptre au point P et le cercle de rayon n_2 au point K. Le rayon réfracté IS' passe par ce point.

Corrigé 3......

1. L'angle de réfraction limite au point I vaut ($i = \pi/2$), en appliquant la seconde loi de Descartes :

$$1 = n \sin \lambda \Rightarrow \lambda = \arcsin \frac{1}{n}$$

Au point J il y a réflexion totale si :

$$n \sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{n}, \text{ donc il}$$

faut que $\alpha > \lambda$.

Dans le triangle BIJ la relation entre les angles donne :

$$\beta + \frac{\pi}{2} - r + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi \Rightarrow \beta = r + \alpha.$$

On en déduit, comme $\alpha > \lambda$, que $\beta - r > \lambda \Rightarrow r < \beta - \lambda$.

Soit en appliquant la seconde loi de Descartes au point I :

$$\sin i = n \sin r \Rightarrow i = \arcsin(n \sin r)$$

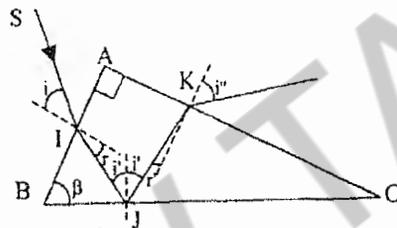
$$i = \arcsin(n \sin(\beta - \lambda))$$

Application numérique : $\lambda = 41,8^\circ$

$$i = \arcsin(1,5 \times \sin(60 - 41,8))$$

$$i = 27,9^\circ$$

2. Dans le triangle JKC, on écrit :



$$\frac{\pi}{2} + i' + r' + \frac{\pi}{2} + \hat{C} = \pi \Rightarrow r' = i' - \hat{C}$$

$$\text{Or } n \sin r' = \sin i'' \Rightarrow i'' = \arcsin(n \sin r')$$

$$i'' = \arcsin(n \sin(i' - \hat{C}))$$

Application numérique : $i'' = \arcsin(1,5 \times \sin(41,8 - 30))$

$$i'' = 17,8^\circ$$

Corrigé 4......

1. Calcul de la déviation

1. Voir figure 1.

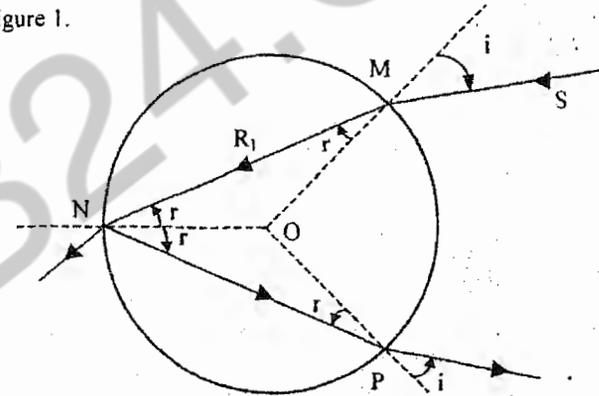


Figure 1

2. Le triangle OMN est isocèle, l'angle d'incidence en N est donc r ainsi que l'angle de réflexion en N et l'angle d'incidence en P. Le rayon ressort donc en faisant un angle i avec la normale.

3. La déviation totale est la somme des trois déviations :

$$D = (i - r) + (\pi - 2r) + (i - r) = \pi + 2i - 4r$$

$$D = \pi + 2i - 4 \text{Arcsin} \left(\frac{\sin i}{n} \right)$$

4. On calcule la dérivée de D par rapport à i :

$$\frac{dD}{di} = 2 - \frac{4 \cos i}{n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}}$$

La déviation passe par un extremum pour :

$$\cos^2 i_m = \frac{n^2 - 1}{3}$$

Cette solution existe si $n < 2$.

Dans le cas où $n = 4/3$, on calcule :

- pour $i = 0$, $\frac{dD}{di} = -1$;

- pour $i = \frac{\pi}{2}$, $\frac{dD}{di} = 2$.

On en déduit que D passe par un minimum pour $i = i_m$.

Pour $n = 4/3$, on trouve :

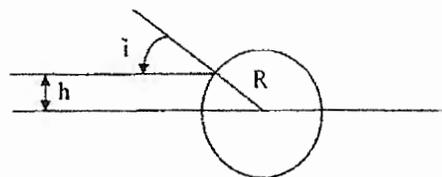
$$D_m = \pi + 2 \operatorname{Arcsin} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} \right) - 4 \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} \right)$$

Soit :

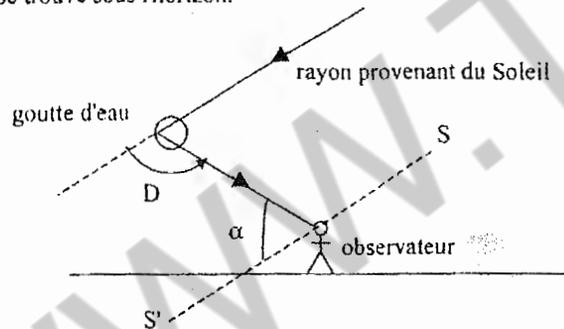
$$D_m = 138^\circ$$

La hauteur d'incidence est donnée par (voir figure ci-dessous) :

$$h = R \sin i_m = 0,86R$$



5. a) Il y a accumulation de lumière dans la direction D_m . Le phénomène étant de révolution autour d'un axe passant par le Soleil et l'observateur, les gouttes "brillantes" se répartissent sur un cône dont le sommet est l'observateur et de demi-angle au sommet $\pi - D_m = 42^\circ$. L'arc-en-ciel apparaît donc comme un arc de cercle lumineux (au maximum un demi-cercle) dont le centre S' se trouve sous l'horizon.



b) L'arc-en-ciel ne peut être observé que si la hauteur du Soleil est inférieure à 42° . A midi, il est impossible d'observer un arc-en-ciel car le Soleil est trop haut sur l'horizon.

c) D'après ce qui a été dit en 4.a, l'arc en ciel est un phénomène "subjectif", puisque le sommet du cône a pour sommet l'observateur : deux observateurs ne verront pas la même image du phénomène.

II. Etude de la dispersion

1. La longueur d'onde des radiations visibles s'étend de 400 nm à 800 nm.

2. Il y a dispersion de la lumière dans les gouttes d'eau ; D_m dépend de l'indice et l'indice dépend de la longueur d'onde : on doit observer plusieurs arcs de cercle concentriques.

3. Comme $\sin i = n \sin r$, lorsque n croît à i fixé, r décroît.

Donc $D = \pi + 2i - 4r$ croît, ainsi que D_m .

On peut écrire :

$$dD = -4 dr$$

$$0 = \sin r \, dn + n \cos r \, dr$$

d'où : $dr = -\tan r \frac{dn}{n}$, et $dD = 4 \tan r \frac{dn}{n} = 4 \sqrt{\frac{5}{7}} \frac{dn}{n} = 3 \sqrt{\frac{5}{7}} dn$ (pour $i = i_m$).

Soit :

$$\Delta D = 2,54 \Delta n$$

Application numérique :

$$\Delta n = 0,01 ; \Delta D = 0,0254 \text{ rd} = 1,46^\circ$$

4. Lorsque la longueur d'onde augmente, l'indice décroît, et donc D diminue. Comme $\alpha = \pi - D$, α augmente du violet au rouge. Le rouge est donc à l'extérieur, le violet à l'intérieur.

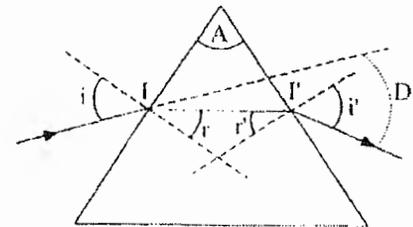
Corrigé 5.....

1. On applique la loi de Descartes au point I :

$$\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n}$$

l'indice $n \geq 1$ et $\sin i \leq 1$, donc l'angle r est toujours défini quel que soit l'angle d'incidence i .

Le rayon incident pénètre toujours dans le prisme.



2. On applique la loi de Descartes au point I' :

$$n \sin r' = \sin i' \Rightarrow \sin r' = \frac{\sin i'}{n}$$

La valeur maximale de i' est de 90° d'où :

$$\sin r' = \frac{1}{n}$$

On pose l'angle de réfraction limite $\theta = \operatorname{arcsin} \left(\frac{1}{n} \right)$, $r' \leq \theta$.

La relation entre l'angle du prisme A et les angles r et r' s'écrit : $A = r + r'$, d'où :

$$r \geq A - \theta$$

Comme $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin i \geq n \sin(A - \theta)$; il faut que l'angle d'incidence respecte la condition :

$$i = i_0 \geq \arcsin(n \sin(A - \theta))$$

3. $r' \leq \theta$. Du fait du principe du retour inverse de la lumière, on en déduit que $r \leq \theta$ et comme : $A = r + r'$, la seconde condition s'écrit :

$$A \leq 2\theta ; A \leq 2 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Corrigé 6.....

1. L'indice d'un milieu est défini par la relation :

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\text{célérité de la lumière dans le vide}}{\text{célérité de la lumière dans le milieu considéré}}$$

$$\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right) \Rightarrow n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

On complète le tableau :

λ (nm)	405	434	486	589	656	768
D_m	51,58	50,77	49,67	48,49	48,00	47,5
n	1,654	1,646	1,635	1,623	1,618	1,613

La longueur d'onde change à la traversée du prisme, par contre la fréquence reste la même que l'on soit dans le vide ou dans le prisme.

2. Le verre est un milieu dispersif car l'indice du milieu dépend de la longueur d'onde.

3. Le domaine du visible est compris entre :

$$\lambda_{\text{violet}} = 400 \text{ nm et } \lambda_{\text{rouge}} = 800 \text{ nm}$$

les radiations appartiennent à ce domaine, elles sont toutes visibles.

4. On observera sur l'écran un spectre discontinu, la raie la plus déviée étant la raie de longueur d'onde $\lambda = 405 \text{ nm}$ (violette) et la moins déviée la raie de longueur d'onde $\lambda = 768 \text{ nm}$ (rouge).

Un prisme permet de décomposer la lumière.

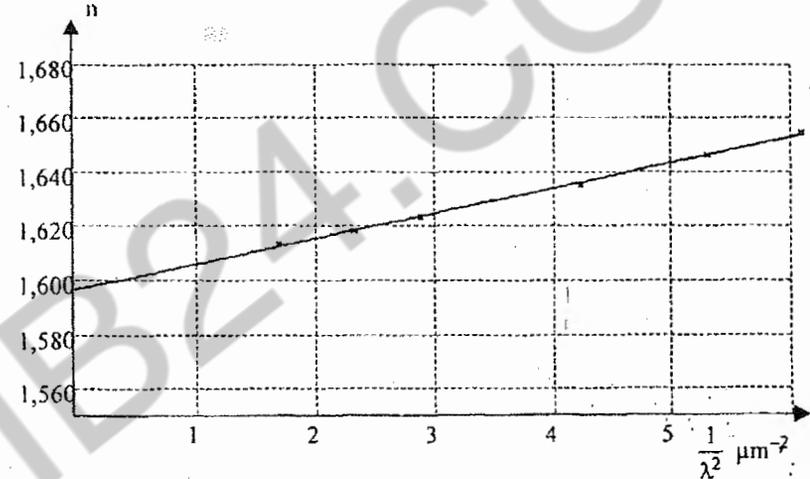
5. Courbe $n = f(1/\lambda^2)$

C'est une courbe de la forme $n = a + b \frac{1}{\lambda^2}$.

Ordonnée à l'origine : $a = 1,596$.

Coefficient directeur : $b = 9,37 \cdot 10^{-9} \mu\text{m}^2 = 9,37 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$.

$$n = 1,596 + 9,37 \cdot 10^{-15} \frac{1}{\lambda^2}$$



Corrigé 7.....

1. On appelle plan de section principale tout plan perpendiculaire à l'arête du prisme.

2. a) Les lois de la réfraction nous permettent de donner les relations suivantes :

$$\sin i = n \sin r \quad (1)$$

$$n \sin r' = \sin i' \quad (2)$$

b) On peut écrire :

$$(\overline{IN}, \overline{II'}) + (\overline{II'}, \overline{I'N'}) = (\overline{IN}, \overline{I'N'})$$

ce qui se traduit par :

$$r + r' = A \quad (3)$$

c) De même, on peut écrire :

$$(\overline{I'S'}, \overline{SI}) = (\overline{I'S'}, \overline{I'N'}) + (\overline{I'N'}, \overline{IN}) + (\overline{IN}, \overline{SI})$$

d'où :

$$D = i' - A + i \quad (4)$$

3. a) La différentiation des 4 relations établies précédemment donne :

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr \quad (1')$$

$$\cos i' \, di' = n \cos r' \, dr' \quad (2')$$

$$dr + dr' = 0 \quad (3')$$

$$dD = di + di' \quad (4')$$

On multiplie (1') par $\cos r'$ et (2') par $\cos r$:

$$\cos i \cos r' \, di = n \cos r \cos r' \, dr \quad (1'')$$

$$\cos i' \cos r \, di' = n \cos r' \cos r \, dr' \quad (2'')$$

En comparant (1'') et (2'') il vient : $\cos i \cos r' \, di = \cos i' \cos r \, di'$

Or
$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

d'où :

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r}$$

b) La déviation est extrême si $\frac{dD}{di} = 0$, c'est-à-dire quand :

$\cos i \cos r' = \cos i' \cos r$, ce qui donne :

$$\cos^2 i \cos^2 r' = \cos^2 i' \cos^2 r$$

$$(1 - \sin^2 i)(1 - \sin^2 r') = (1 - \sin^2 i')(1 - \sin^2 r)$$

$$(1 - n^2 \sin^2 r)(1 - \sin^2 r') = (1 - n^2 \sin^2 r')(1 - \sin^2 r)$$

$$\sin^2 r = \sin^2 r'$$

Soit : $r = \pm r'$.

La solution $r = -r'$ est impossible car $r + r' = A \neq 0$.

On en tire :

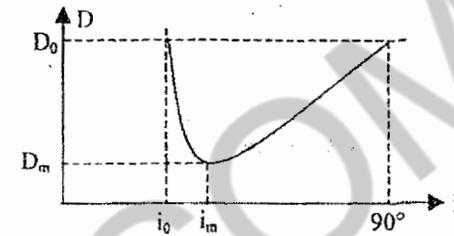
$$r = r' = \frac{A}{2}$$

$$i = i' = \frac{D_m + A}{2}$$

Allure de la courbe

On relierche au préalable le tableau de variation :

i	0	i_0	i_m	$\pi/2$
$\frac{dD}{di}$		-	0	+
D	pas d'émergent			



c) La relation $\sin i = n \sin r$ s'écrit, au minimum de déviation :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

d) L'application numérique donne $n = 1,72$.

4. Lorsque i est fixé, la différentiation des relations (1) à (4) donne :

$$0 = \sin r \, dn + n \cos r \, dr$$

$$\cos i' \, di' = \sin r' \, dn + n \cos r' \, dr'$$

$$dr + dr' = 0$$

$$dD = di'$$

En éliminant dr' et di' , on obtient :

$$\frac{dD}{dn} = \frac{\sin A}{\cos i' \cos r}$$

Tous les termes du second membre sont positifs : la déviation croît avec l'indice et donc décroît avec la longueur d'onde (n décroît lorsque λ croît, d'après la relation de Cauchy).

Corrigé 8.....

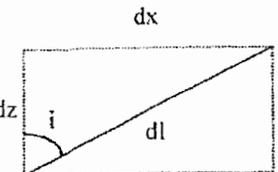
1. En appliquant la loi de Descartes pour la réfraction, on obtient :

$$n_{j-1} \sin i_{j-1} = n_j \sin i_j = n_{j+1} \sin i_{j+1}$$

Si l'épaisseur des couches tend vers zéro, la quantité $n \sin i$ est une grandeur invariante.

2. A l'aide de la figure ci-contre, on peut écrire :

$$\sin i = \frac{dx}{dl} = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dz)^2}} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$



En S, nous avons $i = \frac{\pi}{2}$ et d'après la question la précédente, nous pouvons écrire :

$$n(z_S) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = n(z_S) = n(z) \sin i = \frac{n(z)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

3. La relation précédente s'écrit : $1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \left(\frac{n(z)}{n(z_S)}\right)^2$. Or z et z_S sont inférieurs à 0,1 m ; le rapport précédent sera au plus égal à :

$$\left(\frac{n(0,1)}{n(0)}\right)^2$$

L'application numérique donne : $1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 < 1 + 8.10^{-5}$.

Soit $\frac{dz}{dx} < 9.10^{-3}$, ce qui est très inférieur à 1.

4. Ce qui précède nous permet d'effectuer un développement limité au premier ordre en $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$:

$$\frac{n(z_S)}{n(z)} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

soit :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 2 \frac{\alpha(z - z_S)}{n_0 \left(1 + \frac{\alpha z}{n_0}\right)}$$

Le terme $\frac{\alpha z}{n_0}$ reste très inférieur à 1 et on peut écrire :

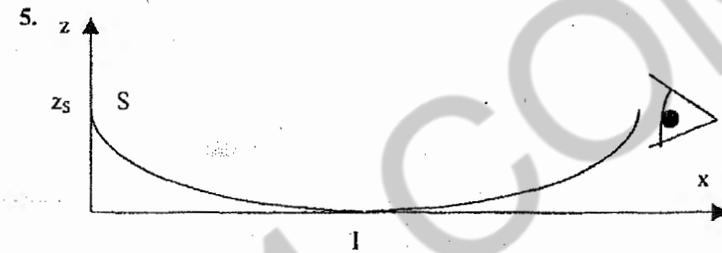
$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 2 \frac{\alpha(z - z_S)}{n_0}$$

On peut intégrer directement ou dériver les deux membres de l'équation par rapport à x . Il vient :

$$2 \left(\frac{dz}{dx}\right) \frac{d^2z}{dx^2} = 2 \frac{\alpha}{n_0} \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\alpha}{n_0}$$

Cette équation différentielle s'intègre facilement et compte tenu des conditions initiales ($x = 0, z = z_S, \frac{dz}{dx} = 0$), on obtient :

$$z = z_S + \frac{\alpha}{2n_0} x^2$$



5. Nous avons représenté ci-dessus le rayon limite, c'est-à-dire le rayon tel que le sommet de sa trajectoire parabolique soit juste au niveau du sol, au point I tel que $x(I) = d/2$. L'équation de la trajectoire est de la forme :

$$z = \frac{\alpha}{2n_0} x^2 + Ax + z_S$$

En écrivant que pour $x = d/2, z = 0$ et $z = z_S$ pour $x = d$, nous obtenons :

$$A = -\frac{4z_S}{d} \quad \text{et} \quad d = \sqrt{\frac{8z_S n_0}{\alpha}}$$

L'application numérique donne $d = 44,8$ m.

6. L'observateur verra une image de la source, symétrique par rapport au sol.

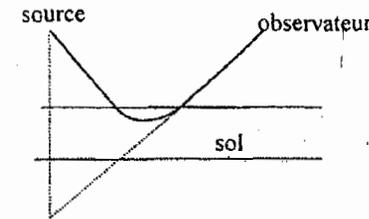


image de la source

7. Le phénomène est observé sur les routes chauffées par le Soleil qui se comportent comme un miroir, le ciel s'y réfléchit et donne l'impression de flaques d'eau sur la route.

Corrigé 9.....

1. Principe du guidage optique

Il y a guidage du rayon SI si en J il y a réflexion totale :

$$\text{soit } \alpha > \alpha_c = \text{Arc sin } \frac{n_2}{n_1}$$

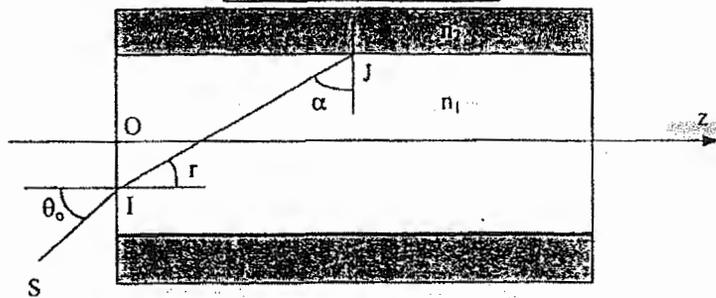
ou $\frac{\pi}{2} - r > \text{Arc sin } \frac{n_2}{n_1}$

et $\sin \theta_0 = n_1 \sin r$

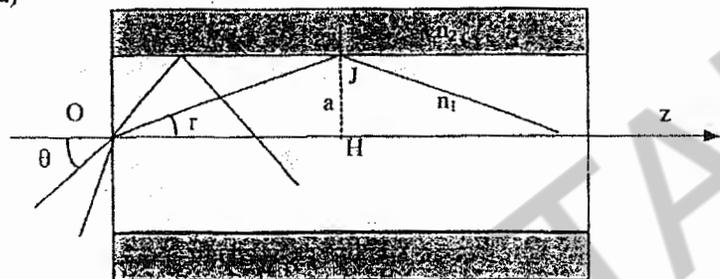
on obtient : $\theta_0 < \theta_c = \text{Arcsin } \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

L'ouverture numérique ON de la fibre s'écrit :

$$\text{ON} = \sin \theta_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$



2. a)



Le chemin géométrique parcouru dépend de l'angle θ , comme on le voit ci-dessus. Le chemin OJ correspond à $\frac{OH}{\cos r}$. Pour toute la fibre, le chemin

géométrique sera donc : $\frac{l}{\cos r}$. Le chemin optique est égal au chemin géométrique multiplié par l'indice du milieu, soit :

$$L_0 = \frac{n_1 l}{\cos r} = \frac{n_1 l}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n_1^2}}}$$

b) Le chemin optique dépendant de θ , le temps de parcours ne sera pas uniforme.

Le parcours le plus court est obtenu pour $\theta = 0$ et le plus long pour θ_0 . L'intervalle de temps séparant ces deux rayons est donc :

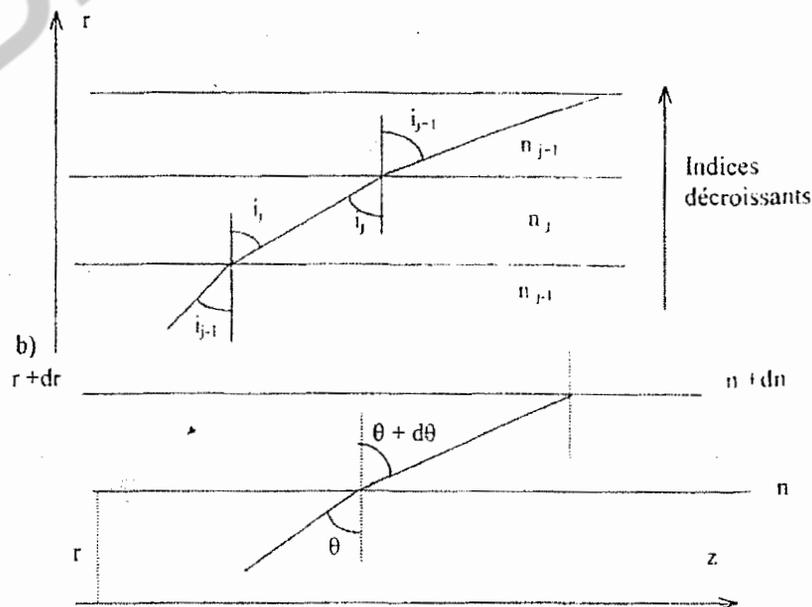
$$\Delta t = \ell \frac{n_1}{c} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_0}{n_1}\right)^2}} - 1 \right]$$

Application numérique : $\Delta t = 3,38 \cdot 10^{-11} \text{ s}$.

c) On ne peut envoyer des informations de durée trop importante, car il y aurait recouvrement à la sortie, on ne pourrait les distinguer. Ce phénomène de dispersion limite le débit de ce type de fibre.

3. Amélioration du guidage : fibre à gradient d'indice.

a) Dans la fibre, l'indice décroît quand le rayon augmente. Nous avons représenté ci-dessous 3 couches successives d'épaisseurs faibles de telle sorte que l'on puisse considérer l'indice constant à l'intérieur d'une couche. En appliquant la loi de la réfraction, nous obtenons le schéma ci-dessous : le rayon s'incurve vers le centre de la fibre.



On peut écrire la loi de Descartes sous la forme :

$$n \sin \theta = (n + dn) \sin (\theta + d\theta) = \dots = \text{cste} = A$$

$\tan \theta = \frac{dz}{dr}$, on peut donc écrire :

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 = \left(\frac{n}{A}\right)^2 - 1$$

Dans cette équation, n dépend de r .

c) En $r = 0$, $n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = A = n_1 \cos \theta_1$

En dérivant par rapport à z l'équation différentielle précédente, il vient :

$$2\left(\frac{dr}{dz}\right)\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{1}{A^2} 2n \frac{dn}{dz} = \frac{1}{A^2} 2n \frac{dn}{dr} \frac{dr}{dz}$$

Après calculs, nous obtenons :

$$\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{1}{A^2} \frac{(n_1^2 - n_2^2)}{a^2} r = 0$$

La solution est de la forme : $r = B \sin\left(\frac{1}{A} \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{a} z + \varphi\right)$

Pour déterminer B et φ , nous utilisons les conditions aux limites :

en $z = 0$, $r = 0$ et $\frac{dz}{dr} = \frac{1}{\tan \theta_1}$. Il vient alors :

$$r = \frac{n_1 a \sin \theta_1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \sin\left(\frac{1}{n_1 \cos \theta_1} \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{a} z\right) = \frac{a \sin \theta_0}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 - \sin^2 \theta_0}} \frac{z}{a}\right)$$

La trajectoire est sinusoïdale. Il y a guidage si r reste inférieur à a , soit si :

$$\sin \theta_0 < \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

■ 12 ■

Formation des images. Miroir et dioptre plans. Miroir sphérique

FORMATION DES IMAGES

► Système optique

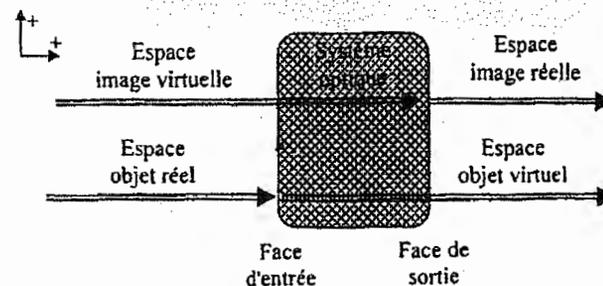
Une suite de milieux transparents homogènes limités par des dioptres (surfaces séparant deux milieux d'indices différents) ou par des miroirs est appelée système optique. Il existe des systèmes :

- dioptriques : constitués uniquement par des dioptres ;
- catadioptriques : constitués par des dioptres et des miroirs ;
- catoptriques : constitués uniquement par des miroirs.

► Objet - Image

A partir d'un système optique, on définit le caractère virtuel et réel des objets et images.

- Objet réel : placé avant le système optique.
- Objet virtuel : placé après la face d'entrée du système optique.
- Image réelle : placée après la face de sortie du système optique.
- Image virtuelle : placée avant la face de sortie du système optique.



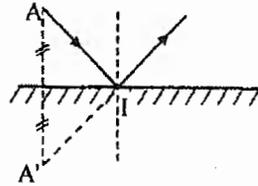
Virtuel : qui ne peut être matérialisé sur un écran.

Sur les schémas en optique il ne faut jamais oublier d'indiquer le sens de propagation de la lumière à l'aide d'une flèche indiquant le sens positif.

MIROIR ET DIOPTRE PLANS

► Miroir plan

Un miroir plan est une surface réfléchissante plane. L'image A' d'un objet A est symétrique de A par rapport au plan du miroir.



Le miroir plan est le seul système optique réalisant le stigmatisme rigoureux (tous les rayons issus de A passent par A').

A un objet réel correspondra toujours une image virtuelle.

Autres caractéristiques :

- le miroir est un plan afocal (un objet à l'infini a son image rejetée à l'infini) ;
- son grandissement transversal vaut $+1$ et son grandissement axial vaut -1 .

► Dioptre plan

On considère un dioptre plan séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 .

A_1 est le point objet ; par prolongement du rayon réfracté, on obtient le point A_2 . On déduit de la figure :

$$\overline{A_2H} \tan i_2 = \overline{A_1H} \tan i_1$$

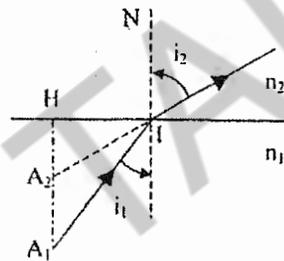
La position de A_2 dépend de i_1 ; en conséquence les rayons réfractés ne rencontrent pas tous la droite A_1H au même point, il n'y a pas de stigmatisme rigoureux.

Si les rayons sont faiblement inclinés par rapport à la normale il vient :

$$\tan i_1 \approx \sin i_1 \approx i_1 \text{ et } \tan i_2 \approx \sin i_2 \approx i_2 \Rightarrow n_1 i_1 \approx n_2 i_2 \text{ et } \frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\overline{A_2H} i_2 = \overline{A_1H} i_1 \Rightarrow \frac{\overline{A_2H}}{\overline{A_1H}} = \frac{n_2}{n_1}$$

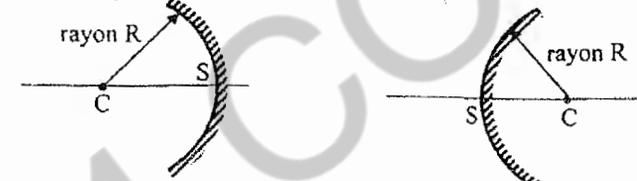
Pour le cas des petits angles il y a stigmatisme approché. Les points A_1 et A_2 sont conjugués. La relation obtenue est la relation de conjugaison, elle montre que $\overline{A_2H}$ et $\overline{A_1H}$ sont toujours de même signe, donc si A_1 est réel A_2 est virtuel et vice versa.



MIROIR SPHERIQUE

► Définition

Un miroir sphérique est une portion de calotte sphérique dont l'intérieur ou l'extérieur a été recouvert d'un matériau réfléchissant. Un miroir sphérique est caractérisé par son centre C et son sommet S .



Miroir concave (convergent)

Miroir convexe (divergent)

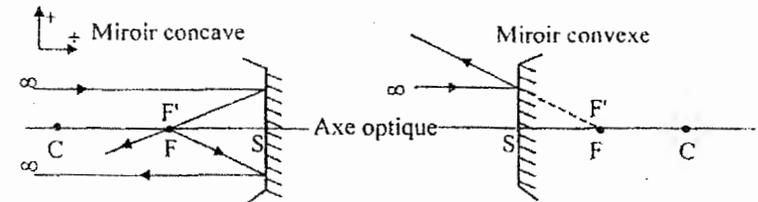
Les points S et C sont des points rigoureusement stigmatiques.

Il y a stigmatisme et aplanétisme approchés si on se place dans les conditions de Gauss.

• Foyers

Dans les conditions de Gauss on utilise les miroirs sphériques dans une partie presque plane.

Un point objet A à l'infini a son image au foyer image F' . Du fait du principe du retour inverse de la lumière, tout rayon issu de F' aura une image à l'infini. Les foyers objet F et image F' sont confondus.



Les foyers sont réels.

Les foyers sont virtuels.

$$\overline{CF} = \overline{CF'} = \frac{\overline{CS}}{2}$$

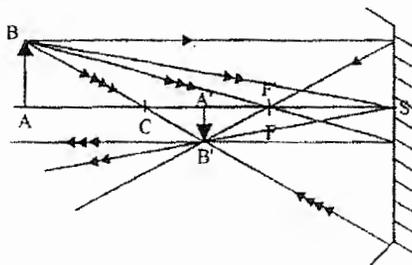
La distance focale du miroir vaut : $f = SF$.

► Constructions

Le but en général recherché est de construire l'image d'un objet AB à travers le miroir. On dispose pour cela de quatre rayons fondamentaux :

- tout rayon issu de B et passant par S repart symétriquement par rapport à l'axe optique ;
- tout rayon issu de B et passant par C frappe le miroir et revient sur lui-même ;
- tout rayon issu de B parallèle à l'axe optique passe par le foyer image ;

– tout rayon issu de B et passant par le foyer objet repart parallèlement à l'axe optique après réflexion sur le miroir.



► Relations algébriques

• Relations de conjugaison avec origine au sommet

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC} = \frac{1}{SF}$$

Grandissement :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = -\frac{SA'}{SA}$$

• Relations de conjugaison avec origine au centre

$$\frac{1}{CA} + \frac{1}{CA'} = \frac{2}{CS} = \frac{1}{CF}$$

Grandissement :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{CA'}{CA}$$

• Relations de conjugaison avec origine au foyer (formule de Newton)

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{SF}^2 = f^2$$

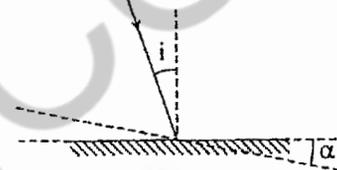
Grandissement :

$$\gamma = -\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{FA'}}{\overline{SF}}$$

► Enoncés des exercices ◀

■ Exercice 1

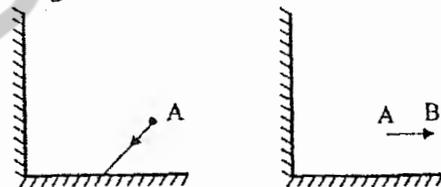
1. Soit un point A_1 fixe et un miroir plan. On écarte le miroir plan d'une distance x . De quelle distance s'est alors déplacée l'image A_2 ?
2. Un rayon lumineux frappe le miroir sous une incidence i .
 - a) Représenter le rayon réfléchi.
 - b) Le miroir tourne d'un angle α . Dans quel sens et de quel angle tourne le rayon réfléchi ?



■ Exercice 2

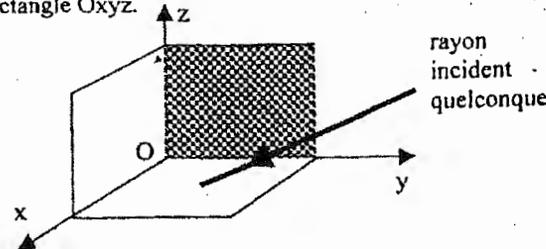
On considère deux miroirs plans positionnés à 90° .

1. Représenter les rayons issus du point A.
2. Représenter l'image de AB à travers les miroirs.



■ Exercice 3

Un réflecteur posé sur la Lune est constitué d'une certaine de « coins de cube », c'est-à-dire de trois miroirs plans identiques formant les trois faces d'un trièdre trirectangle Oxyz.

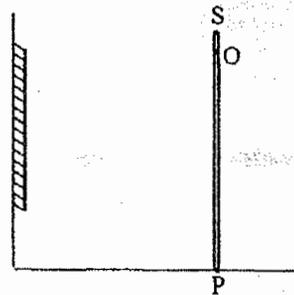


Montrer qu'un rayon lumineux arrivant sur un coin de cube est renvoyé après trois réflexions dans la direction exactement opposée, quelle que soit l'orientation du trièdre. Les déplacements lunaires ont-ils une quelconque influence ?

■ Exercice 4

Une personne se regarde dans un miroir.

1. Quelle doit être la hauteur minimale du miroir et à quelle distance du sol doit-il se trouver pour qu'elle puisse se voir entièrement ? Cette personne mesure 1,80m, ses yeux (O) sont à 10 cm du point le plus haut de sa tête (on admettra que S, O et P sont sur la même verticale).
2. La dimension et la place du miroir dépend-elles de la distance qui sépare cette personne du miroir ?



■ Exercice 5

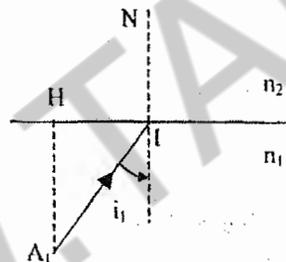
Une pièce de monnaie A se trouve au fond d'une piscine.

Quelle est la position de l'image observée par un observateur au bord de la piscine ? La profondeur est de 1,5 m et l'indice de l'eau vaut $n = 1,33$.

■ Exercice 6

Un dioptré plan sépare deux milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 avec $n_1 > n_2$.

1. Représenter l'image A_2 du point A_1 à travers ce dioptré.
2. Rappeler les conditions du stigmatisme rigoureux et approché. Montrer que les conditions du stigmatisme rigoureux ne sont pas satisfaites et donner les conditions pour que l'on réalise un stigmatisme approché ; pour cela on exprimera HA_2 en fonction de i_1 .



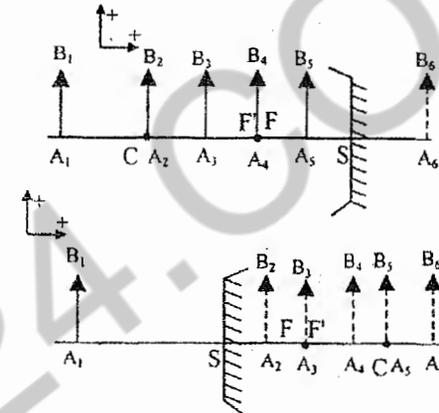
■ Exercice 7

Soit une lame à faces parallèles constituée par un milieu homogène d'indice n limité par deux faces planes séparées de e . Les milieux extrêmes sont l'air. Un rayon SI arrive sur une face avec un angle d'incidence i par rapport à la normale.

1. Représenter la marche du rayon SI à travers le système et exprimer l'angle i' du rayon émergent en fonction de i .
2. Quel est le déplacement latéral subi par le rayon SI lors de la traversée de cette lame ? Conclure.

■ Exercice 8

Tracer les images des objets $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5$ et A_6B_6 (deux rayons suffisent par construction) dans les deux cas suivants, puis faire un bilan.



■ Exercice 9

On considère un miroir sphérique concave de centre C et de sommet S. On note $R = SC = -5$ cm.

1. Calculer la distance focale de ce miroir.
2. On place sur l'axe optique devant le miroir un objet A_1 à une distance $d = 20$ cm. Déterminer la position de son image A_2 .
3. On place au point A_1 perpendiculairement par rapport à l'axe optique un objet A_1B_1 . On donne $A_1B_1 = 1,5$ cm.
 - a) Calculer le grandissement.
 - b) Calculer la dimension de l'image A_2B_2 et donner sa nature.
4. D'un objet virtuel, un miroir sphérique donne une image renversée et deux fois plus grande que l'objet. En justifiant la réponse, dire si le miroir est convexe ou concave.

■ CONTROLE (30 min ; 10 pts) ■

1. On considère un miroir sphérique (voir figure 1) de centre C et de rayon R. Le point A_2 est l'image du point objet A_1 .
 - a) Préciser, sur la figure 1, les angles d'incidence i_1 et de réflexion i_2 correspondant respectivement aux rayons A_1I et IA_2 .
 - b) Énoncer les lois de la réflexion de Snell-Descartes.
 - c) Exprimer les angles i_1 et i_2 en fonction des angles :

$$\alpha_1 = \widehat{SA_1I}, \alpha_2 = \widehat{SA_2I} \text{ et } \theta = \widehat{SCI}.$$

- d) On utilise le système optique dans les conditions de Gauss. Préciser ces conditions.
- e) En se plaçant dans les conditions de Gauss, démontrer la relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au sommet S.
- f) En déduire la position des foyers objet et image.

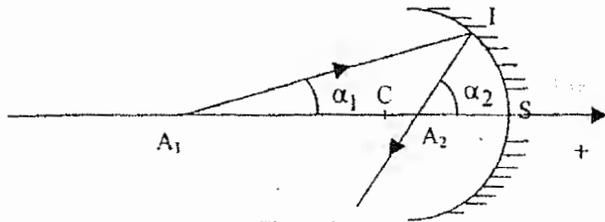


Figure 1

- 2. Les aberrations géométriques d'une image sont liées au stigmatisme et à l'aplanétisme du système optique utilisé.
 - a) Montrer que le miroir plan est un système optique rigoureusement stigmatique.
 - b) Pour quel couple de points un miroir parabolique est-il rigoureusement stigmatique ? Justifier leur emploi dans les télescopes.
 - c) Pourquoi dit-on que le miroir sphérique est un système optique possédant un stigmatisme approché ? Préciser les conditions qui permettent de le réaliser.
 - d) Définir la notion d'aplanétisme d'un système optique. Est-ce que le miroir sphérique est un système aplanétique ?
 - e) Déterminer, sur la figure 2, l'image A_2B_2 , d'un objet réel A_1B_1 , obtenue par le miroir convexe et par le miroir concave. Préciser les hypothèses sur les propriétés du miroir que vous supposez réalisées pour cette construction. Justifier le choix et la marche des rayons utilisés. Qualifier l'image obtenue dans chaque cas.

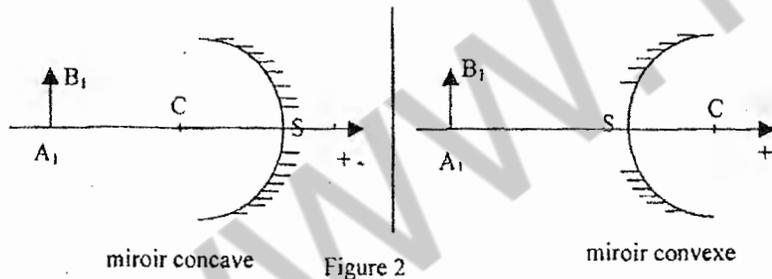


Figure 2

▼ Corrigés des exercices ▼

Corrigé 1.....

1. On représente la situation par un schéma :



A_2 est l'image de A_1 à travers le miroir, $A_1H_1 = H_1A_2$.

A_2' est l'image de A_1 après le déplacement de x du miroir :

$$A_1H_2 = H_2A_2' \Rightarrow A_1H_1 + H_1H_2 = H_2A_2'$$

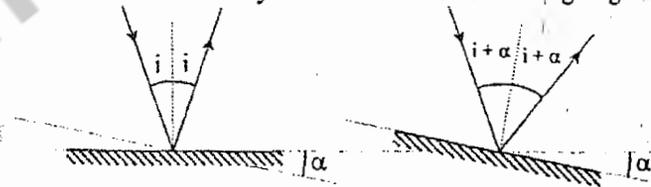
$$\text{et } A_1H_1 + H_1H_2 = H_2A_2.$$

On en déduit :

$$A_2A_2' = 2x$$

Le déplacement de l'image est double de celui du miroir.

2. a) Le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident par rapport à la normale au miroir. Les deux rayons font donc entre eux un angle égal à $2i$.



b) Quand le miroir tourne d'un angle α , la normale tourne du même angle. Le rayon incident arrive maintenant sous un angle $i + \alpha$ et repart sous le même angle (loi de la réflexion). Les deux rayons font entre eux un angle $2i + 2\alpha$. Le rayon réfléchi a donc tourné dans le même sens que le miroir mais d'un angle double.

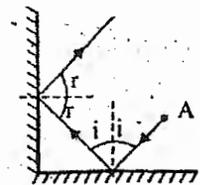
Corrigé 2.....

1. Représentation des rayons.

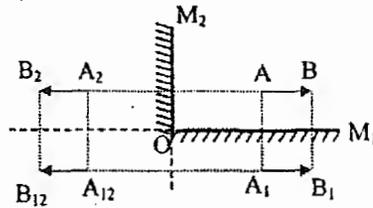
$$r = \pi/2 - i.$$

Le rayon repart parallèlement au rayon incident.

Si l'angle entre les deux miroirs vaut 45° , les rayons incident et réfléchi seront orthogonaux ; c'est le cas pour les équerres optiques.



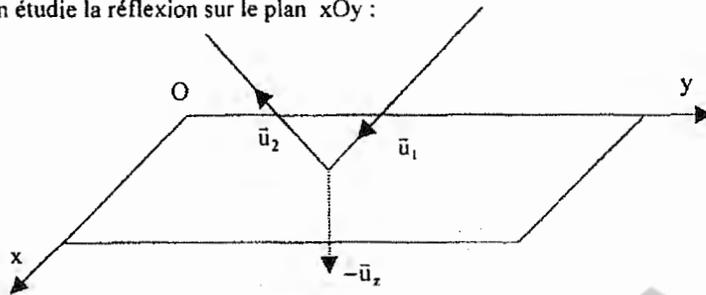
2.



La position des miroirs permet d'obtenir trois images distinctes. L'image $B_{12}A_{12}$ est symétrique de AB par rapport à O .

Corrigé 3.....

On étudie la réflexion sur le plan xOy :



Le vecteur unitaire porté par le rayon incident $\vec{u}_1(\alpha, \beta, \gamma)$ se transforme après réflexion en $\vec{u}_2(\alpha, \beta, -\gamma)$: la composante suivant la normale au plan change de signe. Lorsque le rayon se réfléchit sur le plan xOz , le vecteur \vec{u}_2 se transforme en $\vec{u}_3(\alpha, -\beta, -\gamma)$. Lors de la troisième réflexion (sur le plan yOz), le vecteur \vec{u}_3 se transforme en $\vec{u}_4(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ et $\vec{u}_4 = -\vec{u}_1$: le rayon réfléchi par le "coin de cube" est parallèle au rayon incident. Les déplacements lunaires n'ont pas d'influence compte tenu de la faible durée de l'interaction faisceau-miroirs.

Corrigé 4.....

1. Les points S, O et P étant sur la même verticale, et d'après les lois de la réflexion, les triangles SIO et OJP sont isocèles. Dans un triangle isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet est aussi médiatrice de la base. Le point J est sur la médiatrice de OP . On en déduit :

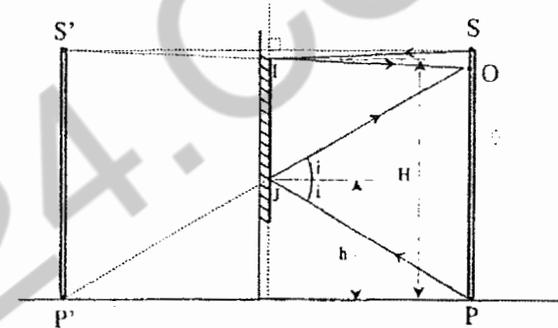
$$h = \frac{OP}{2} = 85 \text{ cm.}$$

De même, I est sur la médiatrice de SO . Le point I est donc 5 cm en dessous du point S , c'est-à-dire à une hauteur $H = 1,75$ m du sol.

Pour que la personne se voit entièrement, il suffit que le haut du miroir soit en I et le bas en J .

Le miroir doit donc avoir une hauteur $H - h = 90$ cm et il doit être placé à 85 cm du sol.

2. Les calculs faits précédemment ne font pas intervenir la distance qui sépare la personne du miroir. Ils restent vrais quelle que soit la position de celle-ci.



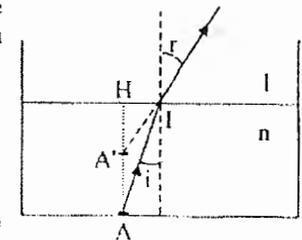
Corrigé 5.....

On construit l'image A' de la pièce A (supposée ponctuelle). La relation de conjugaison du dioptre plan donne :

$$\frac{n}{HA} = \frac{1}{HA'} \Rightarrow \boxed{HA' = \frac{HA}{n}}$$

Application numérique : $HA' = 1,13$ m.

L'observateur voit la pièce plus proche de la surface qu'elle n'est réellement.

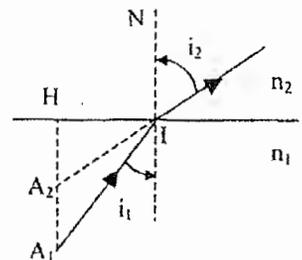


Corrigé 6.....

1. Voir figure ci-contre.

On trace le rayon réfracté en utilisant les lois de Descartes. Le prolongement de ce rayon donne après intersection avec la droite A_1H le point image A_2 .

2. Pour un couple de point A_1 et A_2 , un système est rigoureusement stigmatique si tous les rayons issus de A_1 passent par A_2 après la traversée du système optique.



On parlera de stigmatisme approché si tous les rayons issus de A_1 passent par une tâche centrée sur A_2 après la traversée du système optique, les dimensions de la tâche devant rester inférieures à la capacité de résolution du capteur (œil, plaque photographique...).

Expression de $\overline{HA_2}$

On peut écrire : $\tan i_1 = \frac{\overline{HI}}{\overline{HA_1}}$ et $\tan i_2 = \frac{\overline{HI}}{\overline{HA_2}} \Rightarrow \overline{HA_1} \tan i_1 = \overline{HA_2} \tan i_2$

Loi de Descartes : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

$$\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{\tan i_1}{\tan i_2} \Rightarrow \overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1}$$

Or $\cos i_1 = \sqrt{1 - \sin^2 i_1}$ et $\cos i_2 = \sqrt{1 - \sin^2 i_2}$, soit en appliquant une nouvelle fois la loi de Descartes :

$$\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1}}{n_1 \sqrt{1 - \sin^2 i_1}}$$

La position de A_2 dépend de i_1 , donc pour chaque valeur de i_1 on aura une position de A_2 différente, ce qui est contraire à la définition du stigmatisme rigoureux.

Pour être dans les conditions du stigmatisme approché, il faut que les angles i_1 et i_2 soient petits. On peut alors écrire :

$$1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1 \approx 1 \text{ et } \sqrt{1 - \sin^2 i_1} \approx 1$$

D'où :

$$\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{n_2}{n_1}$$

C'est l'équation de conjugaison des dioptries plans.

Corrigé 7

1. Marche du rayon SI.

A chaque traversée de dioptre, on peut écrire :

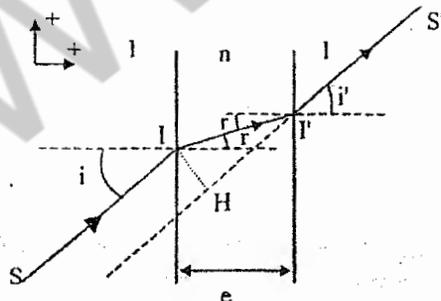
$\sin i = n \sin r$ (1^{er} dioptre)

$n \sin r = \sin i'$ (2^{ème} dioptre)

d'où :

$$i = i'$$

Le rayon ressort dans une direction parallèle au rayon incident.



2. Le rayon subit un déplacement latéral de valeur IH.

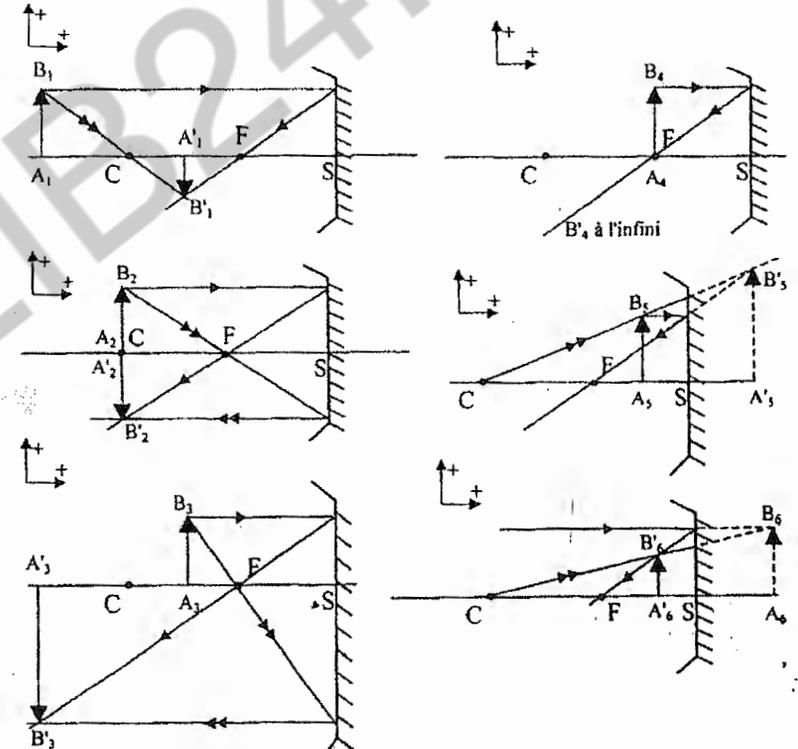
$IH = II' \sin(i - r)$ et $II' = \frac{e}{\cos r}$ d'où :

$$IH = \frac{e \sin(i - r)}{\cos r}$$

En incidence normale ($i = 0$) $IH = 0$, en incidence rasante $i = 90^\circ$, $r = \lambda$ (angle de réfraction limite) et $IH = e$. Donc IH varie de 0 à e pour i variant de 0 à 90° .

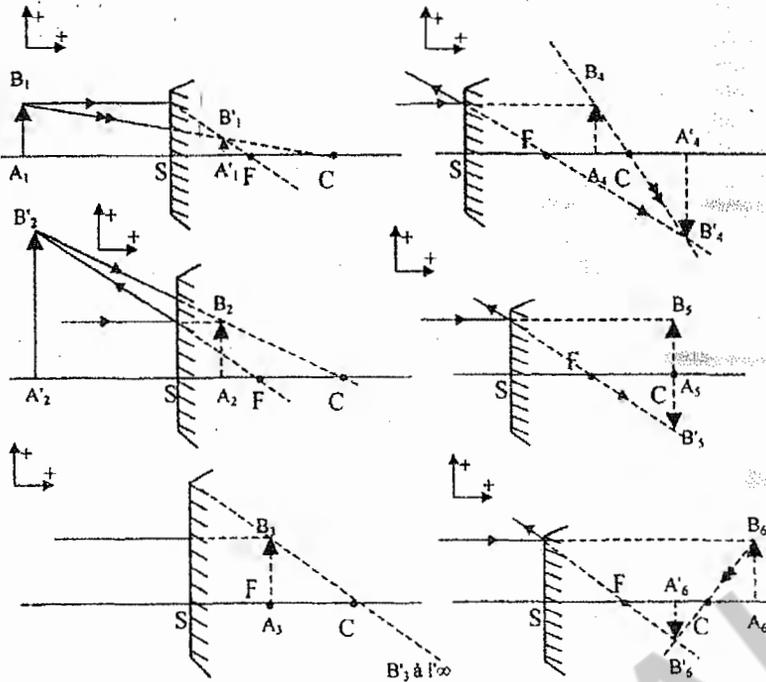
Corrigé 8

Constructions avec un miroir concave.



$-\infty$	objet réel	C	objet réel	F	objet réel	S	objet réel	$+\infty$
	image réelle et renversée		image réelle et renversée		image virtuelle		image réelle	
	$-1 < \gamma < 0$		$\gamma < -1$		$\gamma > 1$		$0 < \gamma < 1$	
			image réelle $\gamma = -1$		image à l'infini $\gamma = 1$		image réelle $\gamma = 1$	

Constructions avec un miroir convexe.



$-\infty$ objet réel	S	objet virtuel	F	objet virtuel	C	objet virtuel	$+\infty$
image virtuelle		image réelle		image virtuelle		image virtuelle	
$0 < \gamma < -1$		$\gamma > 1$		$\gamma < -1$		$-1 < \gamma < 0$	
	image en S	image à l'infini		image virtuelle			
	$\gamma = 1$			$\gamma = -1$			

Corrigé 9.....

1. La distance focale est donnée par $f' = \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$.

$$f' = \frac{-5}{2} = -2,5 \text{ cm}$$

2. On applique la relation de conjugaison avec origine au sommet :

$$\frac{1}{\overline{SA_1}} + \frac{1}{\overline{SA_2}} = \frac{2}{\overline{SC}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA_2}} = \frac{2}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA_1}}$$

Application numérique : $\frac{1}{\overline{SA_2}} = \frac{2}{-5} - \frac{1}{-20} = \frac{7}{20}$

$$\overline{SA_2} = -\frac{20}{7}$$

3. a) Relation du grandissement : $\gamma = \frac{-\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}}$

Application numérique : $\gamma = \frac{20/7}{-20}$

$$\gamma = -\frac{1}{7}$$

b) La relation du grandissement s'exprime aussi par le rapport $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}$ d'où :

$$\overline{A_2B_2} = \gamma \times \overline{A_1B_1}$$

Application numérique : $\overline{A_2B_2} = -\frac{1}{7} \times 1,5$

$$\overline{A_2B_2} = -0,21 \text{ cm}$$

L'image est réelle et renversée.

4. On analyse la phrase :

-- objet virtuel implique que $\overline{SA} > 0$;

-- image renversée et deux fois plus grande implique que $\gamma = -2$.

Comme $\gamma = \frac{-\overline{SA'}}{\overline{SA}} \Rightarrow \overline{SA'} > 0$.

En appliquant la relation de conjugaison avec origine au sommet :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \Rightarrow \overline{SC} > 0$$

Si \overline{SC} est positif, le miroir est convexe.

..... ■ CORRIGE DU CONTROLE ■

1. a) La normale au miroir sphérique en I est suivant IC. D'où les angles d'incidence et de réflexion représentés sur la figure ci-après.

b) Lois de la réflexion

-- le rayon réfléchi est contenu dans le plan d'incidence ;

-- l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

c) Dans le triangle A_1CI , on peut écrire :

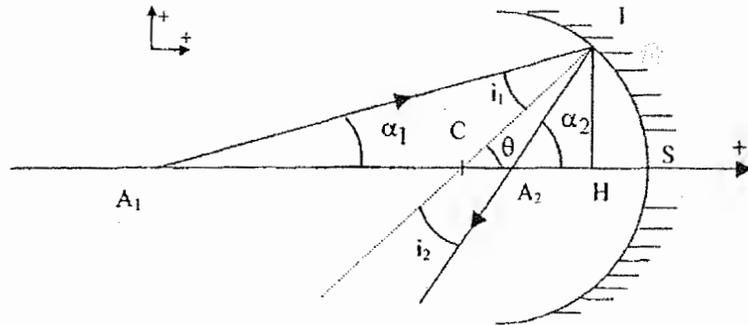
$$\alpha_1 + i_1 + \pi - \theta = \pi$$

soit :

$$\alpha_1 + i_1 = \theta$$

De même, dans le triangle A_2CI , on peut écrire :

$$\alpha_2 - i_2 = \theta$$



d) Les conditions de Gauss sont les suivantes : les rayons lumineux sont peu inclinés sur l'axe optique et voisins de cet axe.

e) On peut écrire :

$$\tan \alpha_1 \approx \alpha_1 = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SA_1}}, \quad \tan \alpha_2 \approx \alpha_2 = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SA_2}}, \quad \tan \theta \approx \theta = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SC}}$$

Or d'après 1.c) $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\theta$, soit :

$$\frac{1}{\overline{SA_1}} + \frac{1}{\overline{SA_2}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

f) Le foyer objet F est tel que son conjugué se trouve à l'infini. On a donc :

$$\overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

Le foyer image F' correspond à un point objet sur l'axe à l'infini, soit :

$$\overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

Les deux foyers sont confondus et se trouvent au milieu du segment CS.

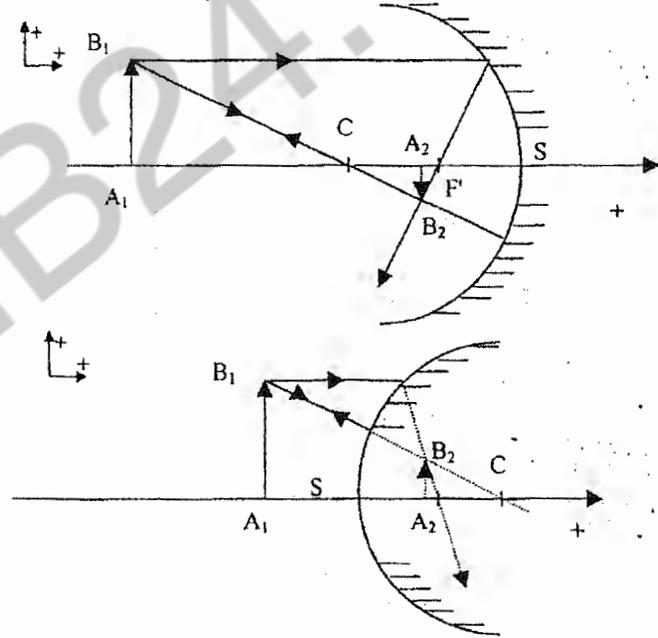
2. a) Pour un miroir plan, $\overline{CS} \rightarrow \infty$, et donc $\overline{SA_1} + \overline{SA_2} = 0$ (même en dehors des conditions de Gauss). Cette relation est générale. Il y a donc stigmatisme rigoureux.

b) D'après les propriétés géométriques de la parabole, tous les rayons parallèles à l'axe optique vont converger au foyer image, qui est le foyer géométrique de la parabole. Le miroir parabolique est donc stigmatique pour le couple de points : foyer et point à l'infini sur l'axe. C'est la raison pour laquelle le miroir parabolique est utilisé dans le télescope.

c) Pour tout point de l'axe optique d'un miroir sphérique, il y a stigmatisme approché, car dans les conditions de Gauss, il y a une relation de conjugaison entre A_1 et A_2 (relation établie en 1.e).

d) Considérons un système optique stigmatique. Il y a aplanétisme si pour tout objet AB perpendiculaire à l'axe optique, son image A'B' est plane et perpendiculaire à l'axe optique. Dans les conditions de Gauss, le miroir sphérique réalise un aplanétisme approché.

e) Deux rayons suffisent pour construire l'image d'un objet : un rayon parallèle à l'axe optique passe par le foyer situé au milieu de SC, un rayon passant par C revient sur lui-même. Dans le cas du miroir concave, l'image est réelle, renversée et plus petite que l'objet. Dans le cas du miroir convexe, l'image est virtuelle, de même sens, plus petite.

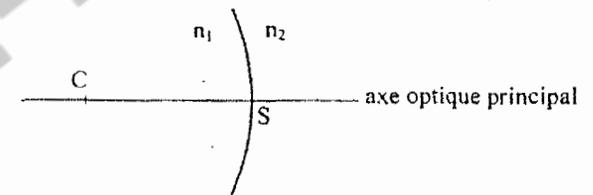


Dioptre sphérique. Lentilles minces

DIOPTRE SPHERIQUE

► **Définition**

Une surface sphérique de centre C et de sommet S qui sépare deux milieux transparents homogènes et isotropes est appelée dioptre sphérique.

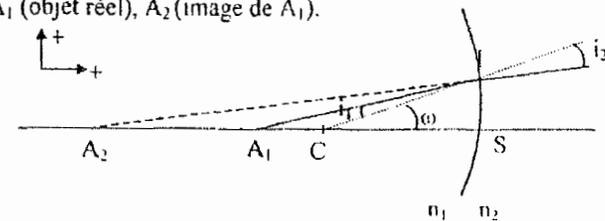


► **Relations**

On utilise le dioptre sphérique dans les conditions de Gauss.

- Invariant fondamental

A_1 (objet réel), A_2 (image de A_1).



Relation entre C, A_1 et A_2

$$\boxed{n_1 \frac{\overline{CA_1}}{IA_1} = n_2 \frac{\overline{CA_2}}{IA_2}}$$

$n \frac{\overline{CA}}{IA}$ se conserve à la traversée du dioptre, c'est un invariant fondamental.

$$\overline{CA_1} = -CS \frac{n_2}{n_1} \text{ et } \overline{CA_2} = -CS \frac{n_1}{n_2} \text{ avec } \overline{CA_1} \cdot \overline{CA_2} = CS^2$$

Les points A_1 et A_2 qui vérifient ces relations sont appelés points de Weierstrass. Pour ces points le stigmatisme rigoureux est réalisé, ils sont toujours de natures opposées.

• Relations de conjugaison

Origine au sommet : $\frac{n_1}{SA_1} - \frac{n_2}{SA_2} = \frac{n_1 - n_2}{SC}$

Origine au centre : $\frac{n_1}{CA_2} - \frac{n_2}{CA_1} = \frac{n_1 - n_2}{CS}$

Formule de Newton : $\overline{FA_1} \cdot \overline{F'A_2} = ff'$

• Foyers

Foyer principal objet F : A₂ est à l'infini si A₁ est au foyer objet.

$$\overline{SF} = -\frac{n_1}{n_1 - n_2} R = f$$

f est la distance focale objet.

Foyer principal image F' : A₁ est à l'infini si A₂ est au foyer image.

$$\overline{SF'} = -\frac{n_2}{n_1 - n_2} R = f'$$

f' est la distance focale image.

Relation entre les distances focales :

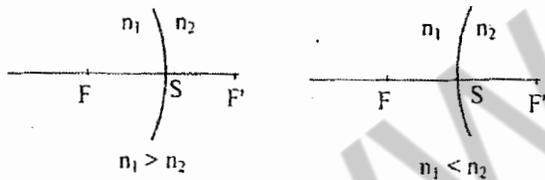
$$f + f' = R$$

Les foyers sont toujours de part et d'autre de S.

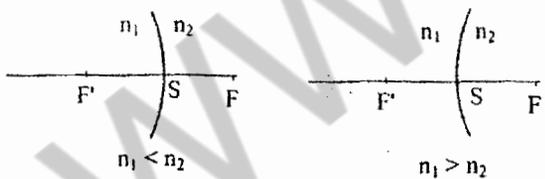
• Vergence (notée V pour éviter la confusion avec C)

Par définition $V = \frac{n_2}{f'} = -\frac{n_1}{f}$

Dioptre convergent (V > 0) ⇒ f < 0 et f' > 0.



Dioptre divergent (V < 0) ⇒ f > 0 et f' < 0.



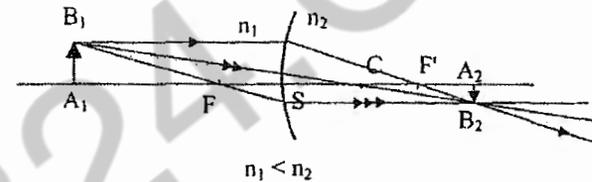
• Grandissement

$$\gamma = \frac{A_2 B_2}{A_1 B_1} = \frac{n_1 \overline{SA_2}}{n_2 \overline{SA_1}} = \frac{\overline{CA_2}}{\overline{CA_1}}$$

► Construction d'une image

On utilise deux des trois rayons suivants :

- le rayon passant par C n'est pas dévié ;
- le rayon incident qui passe par F ressort parallèlement à l'axe optique principal ;
- un rayon parallèle à l'axe optique passe par F'.



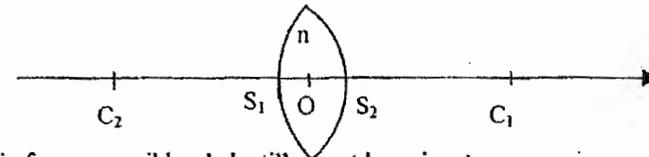
LENTILLES MINCES

► Définitions

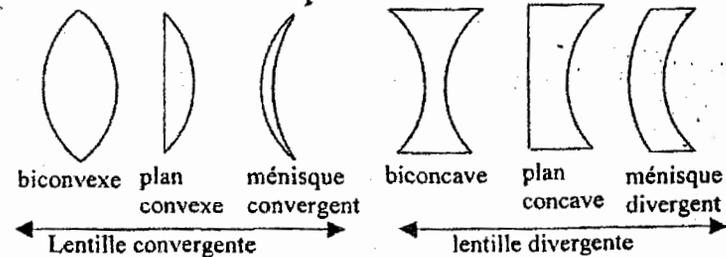
On appelle lentille sphérique le système optique constitué par deux dioptres dont l'un au moins est sphérique, de même axe, limitant un milieu d'indice n que nous supposons baigné par l'air d'indice 1.

Une lentille sphérique est dite mince si $S_1 S_2 \ll S_1 C_1, S_2 C_2$ et $|\overline{S_1 C_1} - \overline{S_2 C_2}|$.

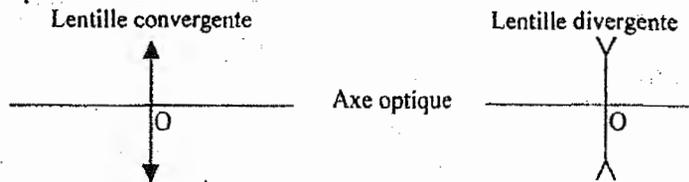
Dans ces conditions, S₁ est confondu avec S₂ et O.



Les six formes possibles de lentilles sont les suivantes :



• Représentation



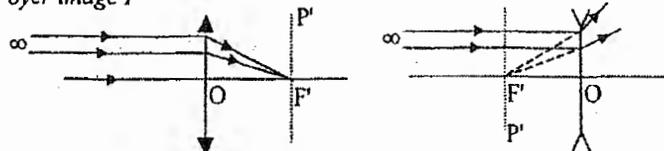
O : centre optique tel que tout rayon dont le trajet intérieur passe par O ressort parallèlement à la direction d'incidence ou tout rayon passant par O n'est pas dévié.

▶ Caractéristiques

On se place dans les conditions de Gauss, stigmatisme et aplanétisme approchés sont réalisés.

• Foyers et plans

Foyer image F'



Lentille convergente : un faisceau de rayons parallèles à l'axe optique converge vers le point F' de l'axe appelé foyer principal image F' après la traversée de la lentille ; ce foyer est réel. Le plan P' transverse passant par F' est le plan focal image.

Lentille divergente : un faisceau de rayons parallèles à l'axe optique diverge après la traversée de la lentille, les rayons semblent alors issus du point F' de l'axe appelé foyer principal image F' ; ce foyer est virtuel. Le plan P' transverse passant par F' est le plan focal image.

Foyer objet F



Lentille convergente : tout faisceau issu du foyer objet F (réel) ressort parallèlement à l'axe optique après la traversée de la lentille. Le plan transverse contenant le foyer F est le plan principal objet.

Lentille divergente : tout faisceau arrivant au foyer objet F (virtuel) ressort parallèlement à l'axe optique après la traversée de la lentille. Le plan transverse contenant le foyer F est le plan principal objet.

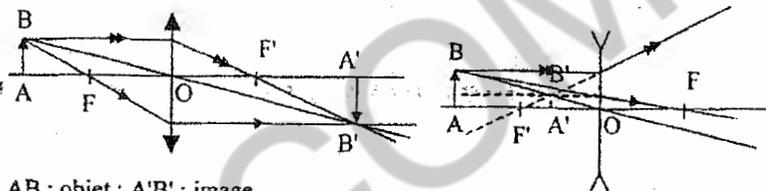
On note la distance focale image $f' = \overline{OF'}$ et objet $f = \overline{OF}$.

$f' > 0$ pour une lentille convergente et $f' < 0$ pour une lentille divergente.

Les foyers F et F' sont symétriques par rapport au centre optique O , d'où :

$$f = -f'$$

▶ Construction des images



AB : objet ; A'B' : image.

Les rayons réels sont en trait plein, les rayons virtuels en trait pointillé.

Rayon (\rightarrow) : on trace un rayon passant par F issu de B ; après la traversée de la lentille le rayon ressort parallèle à l'axe.

Rayon (sans flèche) : tout rayon passant par le centre optique n'est pas dévié.

Rayon (\rightarrow) : on trace un rayon parallèle à l'axe optique passant par B ; après la traversée de la lentille il ressort en passant par F' .

▶ Formule de conjugaison. Vergence

• Formule de conjugaison

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

• Vergence

La vergence d'une lentille mince est définie par :

$$C = \frac{1}{\overline{OF'}} = (n-1) \left(\frac{1}{\overline{OC_1}} - \frac{1}{\overline{OC_2}} \right)$$

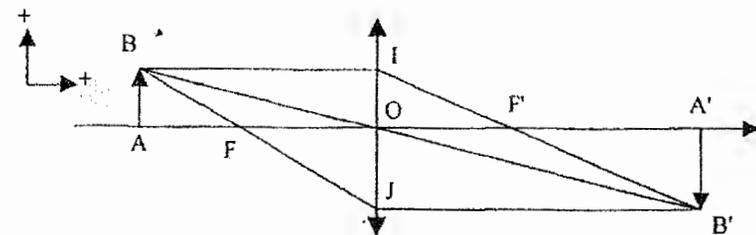
Elle s'exprime en dioptries (δ), les longueurs étant exprimées en m.

$C > 0$ pour une lentille convergente.

$C < 0$ pour une lentille divergente.

▶ Grandissement. Formule de Newton

En comparant les triangles homothétiques OAB et $OA'B'$, on montre que le grandissement γ est égal à :



$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{\overline{FA'}}{\overline{OF'}} = -\frac{\overline{OF}}{\overline{FA}}$$

On en tire la relation de conjugaison de Newton, avec origines aux foyers :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = +\overline{OF} \cdot \overline{OF'} = -(\overline{OF})^2$$

► Association de lentilles minces

Lorsque le même milieu baigne les faces de 2 lentilles, la formule de Gullstrand donne la vergence de l'ensemble :

$$C = C_1 + C_2 - e \cdot C_1 C_2$$

où $e = \overline{O_1 O_2}$ (O_1 et O_2 centres optiques des deux lentilles).

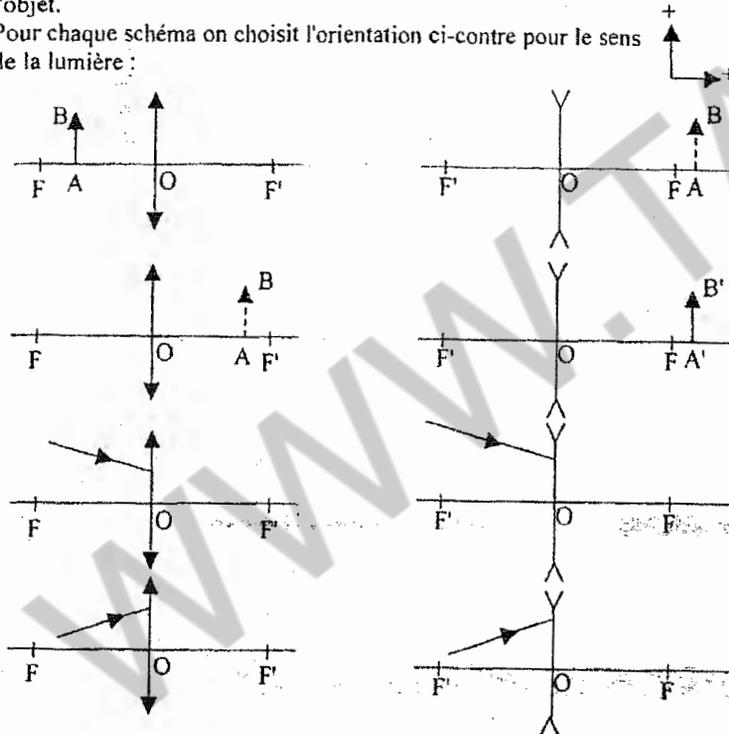
On remarque que, pour des lentilles accolées ($e = 0$), les vergences s'ajoutent.

▲ Énoncés des exercices ▲

■ Exercice 1

Compléter les constructions suivantes, préciser la nature de l'image ou de l'objet.

Pour chaque schéma on choisit l'orientation ci-contre pour le sens de la lumière :



■ Exercice 2

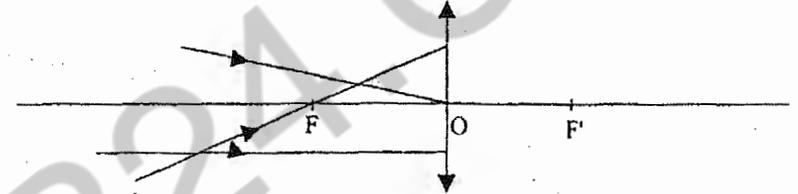
Le but de cet exercice est de déterminer, expérimentalement, la distance focale d'une lentille convergente L_1 puis celle d'une lentille divergente L_2 .

1. On constate qu'une des deux lentilles est plus épaisse au centre que sur les bords.

a) De quelle lentille s'agit-il ?

La représenter schématiquement en faisant apparaître ses caractéristiques principales (centre optique, foyers et axe optique).

b) Recopier le schéma ci-dessous, et compléter le tracé des trois rayons lumineux émergeant de cette deuxième lentille :



L'une de ces deux lentilles est utilisée pour obtenir, expérimentalement, une image réelle $A'B'$ d'un objet réel plan AB perpendiculaire à l'axe optique, le point A appartenant à cet axe.

2.

a) Laquelle doit-on utiliser ? justifier.

b) Choisir le matériel complémentaire à employer dans la liste suivante : banc d'optique, source de lumière, écran, diaphragme, objet plan transparent, miroir, microscope, lunette astronomique.

c) Représenter schématiquement l'expérience précédente en faisant apparaître l'objet AB , le centre optique et les foyers de la lentille utilisée ainsi que les rayons lumineux particuliers permettant la construction de $A'B'$. (Cette construction géométrique sera réalisée sans souci d'échelle)

d) Quel intérêt a-t-on à utiliser un banc d'optique ?

e) Rappeler les conditions d'obtention de bonnes images, appelées conditions de Gauss. On supposera, par la suite, que ces conditions sont toujours réalisées.

3. L'objet AB étant fixe, on déplace la lentille L_1 parallèlement à elle-même et on recueille par déplacement de l'écran, l'image réelle $A'B'$. Les positions de A et de A' par rapport à O , sont reportées dans le tableau suivant :

\overline{OA} (m)	-0,300	-0,350	-0,400	-0,450	-0,500	-0,550	-0,600	-0,650
$\overline{OA'}$ (m)	0,200	0,180	0,170	0,164	0,158	0,153	0,150	0,147

La figure 1 représente les variations de $\frac{1}{\overline{OA'}}$ en fonction de $\frac{1}{\overline{OA}}$ (échelle : $0,2 \text{ m}^{-1}$ représenté par 1 cm sur l'axe horizontal et $0,5 \text{ m}^{-1}$ représenté par 1 cm sur l'axe vertical).

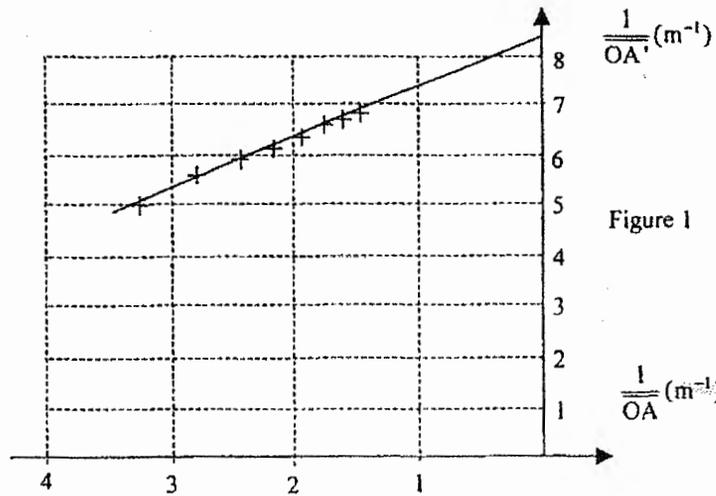


Figure 1

3.
 - a) Déduire la valeur de la distance focale de L_1 à partir de la formule de conjugaison et de la représentation graphique précédente.
 - b) Que se passe-t-il lorsque l'on place L_1 à une distance de l'objet inférieure à sa distance focale ?
 Quelles sont les caractéristiques de l'image dans ce cas ?
 (On pourra s'aider de schémas de construction appropriés). Donner une application pratique correspondante.
4. On veut ensuite déterminer la distance focale de l'autre lentille L_2 . Pour cela, on l'accrole à L_1 : on forme alors un nouveau système optique équivalent à une lentille mince de centre optique O. On recueille sur l'écran l'image $A'B'$ de AB donnée par ce système optique.
 - a) Donner l'expression littérale de la vergence C des deux lentilles accolées de vergences respectives C_1 et C_2 .
 - b) Donner la condition générale sur les vergences C_1 et C_2 de L_1 et de L_2 pour que l'on puisse effectivement obtenir une image réelle $A'B'$ d'un objet AB à travers le système.
 - c) La condition précédente étant réalisée, calculer la distance focale du système, ainsi que sa vergence.
 On mesure $\overline{OA} = -0,3$ m et $\overline{OA'} = 0,500$ m.
 - d) En déduire la distance focale de L_2 .

■ Exercice 3

Un photocopieur permet la reproduction d'un document original de surface S. Le système optique comporte entre autres un objectif constitué de plusieurs lentilles. L'image de l'original est recueillie sur un tambour photosen-

sible. Si γ est le grandissement du système optique, la surface S' de la photocopie est $S' = \gamma^2 S$.

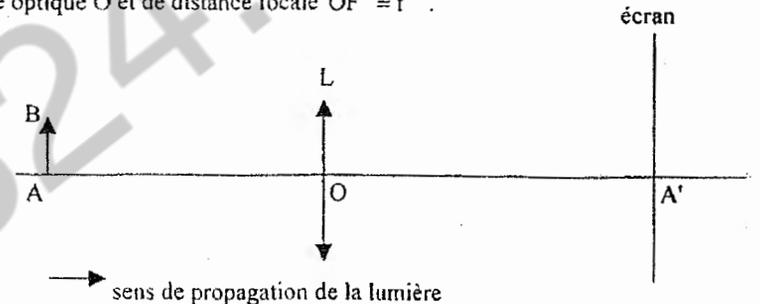
L'objectif du système optique est modélisé à l'aide du matériel d'optique d'un lycée. On place sur un banc optique :

- à une extrémité, un objet lumineux AB représentant le document original ;
- à une distance fixe (128,6 cm) de AB, un écran qui représente le tambour photosensible, et sur lequel doit se former l'image définitive $A'B'$.

- l'axe optique principal est orienté dans le sens de propagation de la lumière ;

I. Reproduction grandeur nature d'un document

Dans ce cas l'objectif est assimilé à une lentille mince convergente L de centre optique O et de distance focale $\overline{OF'} = f'$.



On souhaite obtenir une photocopie de même surface que l'original.

1. Parmi les qualificatifs suivants, choisir celui (ou ceux) qui caractérise(nt) l'image formée sur l'écran ; réelle, virtuelle, droite, renversée.
2. Montrer que le centre optique O de la lentille est au milieu du segment AA' .
3. En déduire l'expression de la distance focale f en fonction de AA' .

II. Agrandissement ou réduction d'un document

1. Agrandissement d'un document

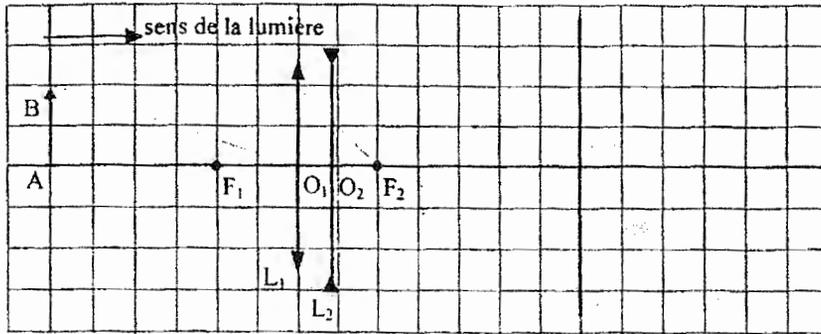
Dans ce cas l'objectif du système optique est modélisé en utilisant deux lentilles :

- une lentille convergente L_1 de vergence $C_1 = 5,0 \delta$;
- une lentille divergente L_2 de vergence $C_2 = -3,0 \delta$.

Le centre optique O_1 de la lentille L_1 est placé à 60,0 cm de A ; la lentille L_1 donne de AB l'image A_1B_1 . La lentille L_2 est placée à droite de L_1 .

Son centre optique O_2 est tel que $\overline{O_1O_2} = 8,6$ cm. L_2 donne de A_1B_1 , l'image définitive $A'B'$ sur l'écran.

- a) Construire l'image A_1B_1 sur la figure ci-après. Aucun calcul n'est demandé.
- b) Représenter sur cette même figure l'image définitive $A'B'$ sachant qu'elle se forme sur l'écran.



Une division représente 10 cm.

- En déduire le grandissement γ_{12} de l'association (L_1, L_2) .
 - Vérifier que dans ce cas, la surface du document est sensiblement doublée.
2. Réduction d'un document
- Dans ce cas, pour modéliser l'objectif, on permute les deux lentilles précédentes L_1 et L_2 .
- La lentille L_2 donne de AB l'image A_2B_2 . La lentille L_1 donne de A_2B_2 l'image définitive $A'B'$ sur l'écran.
- $O_2A = -60,0$ cm ; $O_2O_1 = 8,6$ cm.
- Déterminer la position de l'image A_2B_2 en calculant $\overline{O_2A_2}$.
 - En déduire que le grandissement γ_2 de la lentille L_2 vaut 0,36 et que le grandissement γ_1 de la lentille L_1 vaut $-2,0$.
 - Déterminer le grandissement γ_{21} de l'association (L_2, L_1) .
 - En déduire que dans ce cas la surface du document est sensiblement divisée par deux.

■ Exercice 4

I. Détermination de la distance focale d'une lentille

Au cours d'une séance de travaux pratiques, deux lentilles notées L_1 et L_2 sont mises à la disposition de chaque groupe d'élèves.

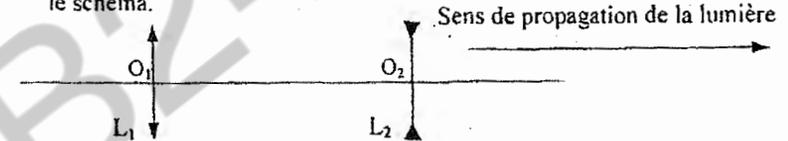
- Comment reconnaître rapidement et simplement, que la lentille L_1 est convergente et la lentille L_2 divergente ?
- La bague de la lentille L_1 porte l'inscription + 8.
Quelle est la signification de cette inscription ? En déduire la valeur de la distance focale de L_1 , d'après le constructeur.
- Les rideaux de la salle étant tirés "pour faire l'obscurité", un élève écarte un coin du rideau et applique la lentille L_1 contre la vitre pour obtenir l'image d'un bâtiment situé à environ 200 mètres. A quelle distance ap-

proximative de la lentille un autre élève doit-il placer une feuille de papier pour obtenir l'image cherchée ? L'image est-elle droite ou renversée ?

- Pour une détermination plus précise de la distance focale de la lentille L_1 , chaque groupe d'élèves dispose d'un banc d'optique avec écran mobile et support de lentille mobile, et d'un objet lumineux que l'on désignera par AB, plan, perpendiculaire à l'axe principal, A étant sur l'axe.
La distance entre l'objet et l'écran étant de 1,10 m, on obtient une image nette de l'objet sur l'écran pour une distance objet-lentille de 14,5 cm. Calculer la valeur de la distance focale f_1 de la lentille L_1 . Comparer avec la donnée du constructeur.

II. Association de lentilles

- La lentille L_1 (+8) est placée à 1,00 m de l'objet AB de hauteur 1,0 cm. Déterminer par le calcul la position et la taille de l'image A_1B_1 de AB.
- On place une lentille L_2 marquée - 10, à 8 cm de L_1 , comme indiqué sur le schéma.



Déterminer par le calcul la position de l'image définitive $A'B'$ par rapport au centre optique O_2 de L_2 , ainsi que la nature et la taille de cette image.

- Sur une feuille de papier millimétré, construire l'image définitive $A'B'$ à partir de l'image intermédiaire A_1B_1 .
Echelles : pour les hauteurs des images : 1 cm est représenté par 10 cm ;
pour les distances aux lentilles : 1 cm est représenté par 0,5 cm.
- Parmi les appareils suivants : lunette de Galilée, lunette astronomique, téléobjectif, microscope, loupe, projecteur de diapositives, quel est celui qui correspondrait au dispositif décrit précédemment ?

■ Exercice 5

Le but de l'exercice est de montrer que la correction à apporter à la vision est différente suivant le dispositif utilisé, verre correcteur ou lentille de contact. Du point de vue optique, l'œil sera assimilé pour tout l'exercice, à une lentille mince convergente L , dont le centre optique O se trouve à une distance constante, 17 mm, de la rétine, surface où doit se former l'image pour une vision nette. Ce modèle sera appelé œil réduit. L'axe optique est orienté positivement dans le sens de propagation de la lumière.

I. Œil normal

- Vision à l'infini sans accommodation. L'objet AB est à l'infini, le point A étant sur l'axe optique, le rayon passant par B et le centre optique O fait un angle α avec l'axe optique. Avec l'échelle 2 (2 cm représentant 1 cm

réel), placer les foyers de l'œil réduit sur la figure 1. Représenter, en justifiant, l'image de l'objet AB.

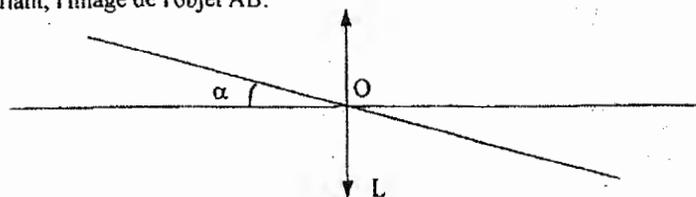


figure 1

2. L'objet est rapproché à la distance minimale de vision distincte, $d_m = 25$ cm. Pour garder une vision nette, l'œil doit accommoder en modifiant un peu sa distance focale sans que la distance centre optique-rétine soit modifiée.

- Calculer la nouvelle distance focale.
- Sur la figure 2, construire qualitativement la nouvelle image A'B' et indiquer les positions des foyers F, F' et de la rétine.

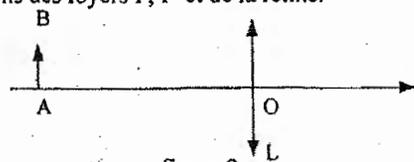


figure 2

3. L'œil présente une analogie fonctionnelle avec le "zoom" de certains objectifs d'appareils photo ou de caméscope. Quelle est la propriété commune à l'œil et au "zoom" ?

II. Œil hypermétrope et sa correction

Un œil hypermétrope donne d'un objet à l'infini une image située derrière la rétine. La distance focale de l'œil hypermétrope envisagé est de 18,5 mm. On la considérera constante dans la suite du problème, l'œil n'accommodant pas.

- L'œil est-il trop ou pas assez convergent ? Corrige-t-on ce défaut en ajoutant une lentille convergente ou divergente ?
- Correction avec un verre de lunette. Celui-ci est assimilé à une lentille mince L_1 de centre optique O_1 , placée à une distance $d = 12$ mm du centre optique de l'œil réduit. On veut une vision nette d'un objet situé à l'infini.

- Rappeler l'endroit où doit se trouver l'image définitive.
- Calculer OA_1 définissant la position de l'image intermédiaire A_1B_1 donnée par la lentille L_1 de l'objet AB.
- En déduire O_1A_1 ainsi que la distance focale et la vergence C_1 de L_1 .

3. Correction avec une lentille de contact.

La lentille correctrice L_2 étant appliquée contre l'œil hypermétrope précédent, on admettra que la distance d est nulle. En déduire la distance focale

de la lentille L_2 (on pourra éventuellement s'aider du résultat de la question II.2b).

■ Exercice 6

- Qu'appelle-t-on foyers d'un système optique centré ?
 - Définir une lentille mince.
 - Une lentille est caractérisée par sa distance focale image et sa vergence. Que représentent ces deux grandeurs pour une lentille mince ?
 - Rappeler les formules de conjugaison et de grandissement pour une lentille mince.
- Une lentille mince L , de centre optique O , donne d'un objet réel AB, perpendiculaire à l'axe optique de L , une image réelle A'B'.
 - Quelles sont les conditions d'obtention d'une bonne image avec une lentille ?
 - Déterminer la nature de la lentille ci-dessus en considérant les renseignements donnés précédemment. Justifier votre réponse en quelques lignes et l'illustrer de schémas.
 - La hauteur de h de l'objet AB vaut 15 mm. L'image réelle A'B' de l'objet AB a une hauteur $h' = 5$ mm ; elle est située à une distance de 40 cm du centre optique (le point A se trouve sur l'axe optique). Trouver la position de l'objet par rapport à la lentille, la distance focale et la vergence de la lentille et donc la nature de la lentille L .
- On considère un objet lumineux ST perpendiculaire à l'axe optique. S est situé sur cet axe à 60 cm d'une lentille convergente de distance focale $f' = 30$ cm et de diamètre d'ouverture D .
 - Construire le faisceau lumineux issu de S s'appuyant sur les bords de la lentille. Expliquer votre construction. Sur le même schéma, faire de même pour le faisceau issu de T. Hachurer les deux faisceaux différemment pour permettre de bien les distinguer.
 - Où doit-on placer un écran pour observer l'image nette de ST ?
 - On déplace l'écran autour de cette position. Qu'observe-t-on sur l'écran ? Justifier votre réponse à partir du schéma précédent.
 - On accole sur la lentille un diaphragme de diamètre $D/2$ et de même axe que la lentille.
 - Comparer les positions, taille et luminosité de cette image à celle obtenue en l'absence de diaphragme. Justifier votre réponse à l'aide d'un schéma.
 - On déplace à nouveau l'écran autour de cette position. Comparer l'observation faite ici à celle faite lors de la même expérience sans diaphragme. Justifier votre réponse en vous aidant des schémas effectués en 3.a et 4.a.
 - Pourquoi est-il intéressant d'utiliser un diaphragme dans le cas d'un appareil photographique ?

- d) On replace l'écran dans sa position initiale. On enlève le diaphragme et on place au centre de la lentille une pastille opaque de diamètre de $D/2$.
Même question que 4.a.
5. On remplace la lentille précédente par une lentille divergente de distance focale $f' = -40$ cm.
- a) A l'aide d'un schéma, déterminer graphiquement la nature, la position et la taille de l'image du même objet réel AB situé à une distance de 100 cm de la lentille.
- b) De même trouver graphiquement le conjugué image d'un point objet M situé sur l'axe optique et tel que $\overline{OM} = -80$ cm.

■ ■ ■ Exercice 7

Une surface sphérique de centre C sépare deux milieux d'indices n_0 et n_1 . Soit S_0C l'axe de révolution de ce dioptre (fig. 1).

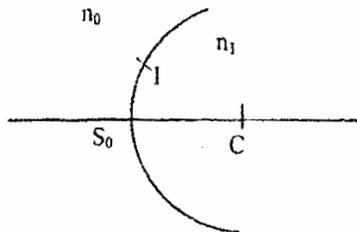


Figure 1

1. Montrer que la quantité $n \frac{CA}{IA}$ est un invariant pour le dioptre lorsque la lumière passe d'un point A sur l'axe CS_0 dans l'espace objet à un point A' de l'espace image, I désignant un point de la surface dioptrique.
2. En déduire la relation de conjugaison du dioptre sphérique en prenant les origines au centre C :

$$\frac{n_0}{CA_1} - \frac{n_1}{CA_0} = \frac{n_0 - n_1}{CS_0}$$

3. Une boule homogène, transparente et isotrope d'indice de réfraction n_1 sépare deux milieux d'indice n_0 et n_2 , (fig. 2) ; la lumière incidente est dans le milieu d'indice n_0 .

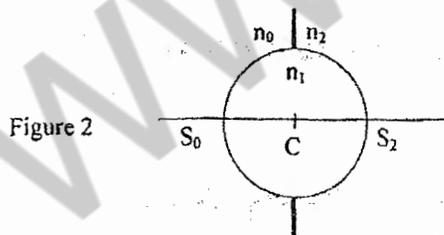


Figure 2

- a) Définir le foyer optique image d'un système optique quelconque.
- b) Déterminer la position F' du foyer image de ce système (fig. 2).
Application numérique : Calculer CF'.
 $R = S_0C = 3$ mm ; $n_0 = n_2 = 1,00$; $n_1 = 1,50$.
- c) Une lentille boule en arsénure de gallium et aluminium ($n_1 = 3,00$) assure le couplage lumineux entre une jonction émettrice considérée comme ponctuelle, placée en S_0 , et le milieu d'indice $n_2 = 1,50$ (fig. 3). Etudier la nature du faisceau transmis dans ce milieu.

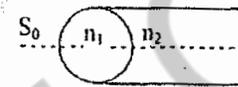


Figure 3

■ ■ ■ Exercice 8

On considère un dioptre sphérique de centre C, de sommet S, de révolution autour de l'axe optique CS, séparant deux milieux linéaires, homogènes, isotropes et non absorbants, caractérisés respectivement par les indices n et n' ($n > n'$). Un petit objet lumineux réel est placé au point A, appartenant à l'axe optique, dans le milieu d'indice n . On considère un rayon lumineux issu du point objet A, peu incliné sur l'axe, arrivant sur le dioptre au point I avec l'angle d'incidence i . Ce rayon émergent est réfracté avec l'angle de réfraction i' . Cet émergent coupe l'axe optique au point A', image approximativement stigmatique du point objet A par rapport au dioptre (figure 1).

On désire obtenir la relation de conjugaison entre les points objet A et image A' dans l'approximation de Gauss. On définit les angles :

$$\theta = (\overline{CS}, \overline{CI}) ; u = (\overline{AS}, \overline{AI}) ; u' = (\overline{A'S}, \overline{A'I})$$

1. Ecrire deux relations géométriques simples entre u , i et θ d'une part, puis entre u' , i' et θ d'autre part. Ecrire les lois de Descartes dans l'approximation de Gauss. En remarquant que tous ces angles sont petits, et que les points H et S sont pratiquement confondus, on introduira, en ayant orienté au préalable l'axe optique, les grandeurs algébriques :

$$p = \overline{SA} \quad p' = \overline{SA'}$$

On se place par ailleurs dans le cas où $n > n'$ et $\overline{SC} = -R$, avec $R > 0$.

Etablir la relation de conjugaison (formule de Descartes) :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{SC} = \frac{n - n'}{R} = C$$

Quelle est la propriété d'un rayon passant par le centre C du dioptre sphérique ? Définir les foyers objet F et image F' de ce dioptre sphérique.

En déduire les valeurs des distances focales objet : $f = \overline{SF}$, et image : $f' = \overline{SF'}$, en fonction de R , n et n' . Que représente la grandeur C introduite dans la formule précédente ?

Application numérique : le premier milieu est constitué d'une résine transparente d'indice de réfraction $n = 1,87$. Le second milieu est de l'air d'indice de réfraction pris égal à l'unité ($n' = 1$) et l'on a $\overline{SC} = -R$ (avec $R = 0,50$ cm).

Préciser la position du foyer objet F et du foyer image F' . Le dioptrique est-il convergent ?

L'objet A est réel, et l'on se place toujours dans le cas où $n > n'$ et $\overline{SC} = -R$, avec $R > 0$. A l'aide d'un schéma, préciser la position de A par rapport à F pour que l'image A' soit virtuelle.

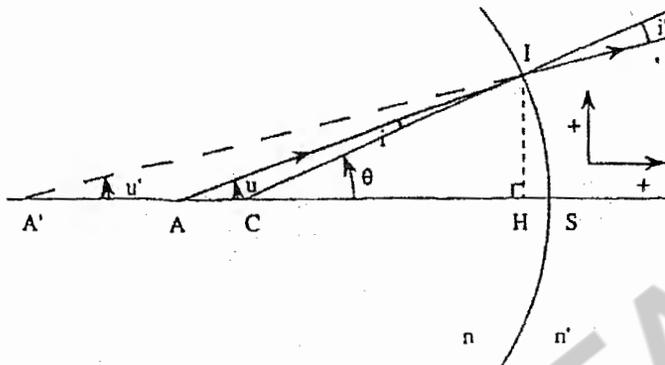


Figure 1

2. On se propose de retrouver, dans le cas du dioptrique sphérique, la formule donnant le grandissement angulaire G . On considère à nouveau le rayon lumineux issu du point objet A , situé sur l'axe, arrivant sur le dioptrique au point I , et dont l'émergent coupe l'axe optique au point A' , image approximativement stigmatique du point objet A par rapport au dioptrique. Exprimer, en fonction de p et p' et dans le cadre de l'approximation de Gauss, la formule donnant le grandissement angulaire $G = u'/u$, avec :

$$u = (\overline{AS}, \overline{AI}) ; u' = (\overline{A'S}, \overline{A'I})$$

3. On se propose de retrouver les formules de grandissement transversal pour ce dioptrique sphérique. On considère pour cela un petit objet lumineux \overline{AB} , perpendiculaire à l'axe optique, le point A appartenant à l'axe. On note $\overline{A'B'}$ son image à travers le dioptrique sphérique. Dans le cadre de l'approximation de Gauss cette image est également perpendiculaire à l'axe optique. Comment qualifie-t-on cette propriété ? Définir le grandissement transversal γ .

On considère alors un rayon lumineux particulier, celui issu du point objet B et arrivant sur le dioptrique au point S , sommet du dioptrique. Soit i l'angle d'incidence de ce rayon et i' l'angle de réfraction (figure 2).

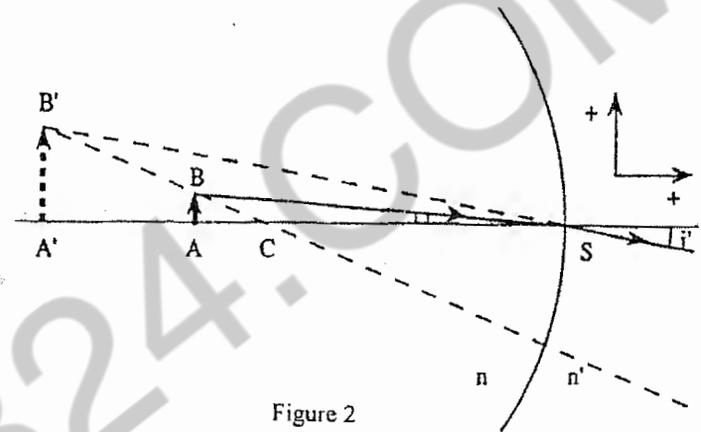


Figure 2

Appliquer à ce rayon les lois de Descartes dans l'approximation de Gauss. Etablir la formule donnant le grandissement transversal γ en fonction de p , p' , n et n' .

A partir des formules donnant le grandissement angulaire $G = u'/u$ et le grandissement transversal γ (en fonction de p , p' , n et n') vérifier la relation de Lagrange-Helmholtz :

$$n \cdot \overline{AB} \cdot u = n' \cdot \overline{A'B'} \cdot u'$$

■ Exercice 9.....

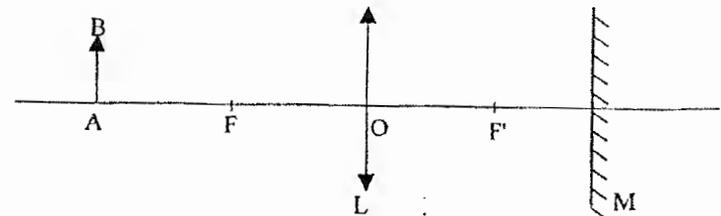
Exercice en relation avec les travaux pratiques.

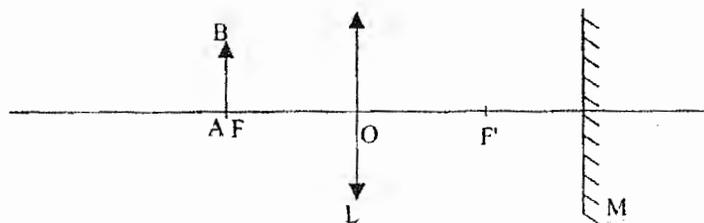
On désire mesurer la distance focale d'une lentille mince convergente.

1. Méthode d'autocollimation.

Sur un banc optique on positionne un objet AB (plus la source lumineuse), une lentille mince convergente (L) et un miroir plan (M).

Construire l'image obtenue dans les deux cas suivants et conclure comment expérimentalement on détermine la distance focale de cette lentille.

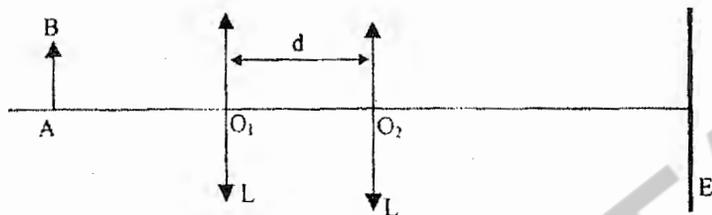




2. Méthode de Bessel et Silbermann

Sur un banc optique on place un objet AB (plus la source lumineuse), une lentille mince convergente (L) et un écran (E). On note D la distance entre l'objet AB et l'écran.

- a) En déplaçant la lentille sur le banc optique on constate, que pour deux positions O_1 et O_2 du centre optique de la lentille on obtient deux images nettes sur l'écran. On note $d = O_1O_2$. On pose $\overline{AO} = x$ où O représente la position du centre optique de la lentille en un point quelconque. Exprimer la distance focale de la lentille en fonction de D et d. On exprimera aussi la condition sur D.

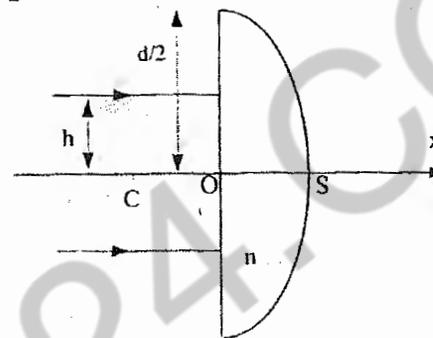


- b) On déplace maintenant l'écran et la lentille simultanément de façon à obtenir un grandissement $\gamma = -1$. Exprimer dans ce cas f en fonction de D.
3. On désire mesurer la distance focale d'une lentille divergente.
- a) Montrer qu'il est nécessaire d'utiliser un objet virtuel pour avoir une image réelle. Vous disposez du matériel nécessaire, comment réalisez vous la mesure de cette distance focale ?
- b) Vous disposez d'une lentille convergente de $+8 \delta$ et d'une lentille divergente de vergence $C < -8 \delta$. Comment mesurer la vergence de cette lentille ?

■ Exercice 10.....

La lentille étudiée est plan convexe (figure 1)
 Le verre qui la constitue a un indice absolu n.
 Elle est située dans le vide. La face plane, de diamètre d, est perpendiculaire à l'axe Ox de la lentille.

On note : e = OS son épaisseur maximum ; R = CS le rayon de courbure de sa face sphérique. On suppose $R > e$.
 La lentille est éclairée par un faisceau cylindrique d'axe Ox, de rayon h ($h > 0$ et $h < \frac{d}{2}$).



1. Montrer que si h est supérieur à une valeur limite h_0 , les rayons lumineux subissent la réflexion totale sur la face convexe. Exprimer h_0 en fonction de n et de R.
2. Dans le cas où $h < h_0$, montrer que l'abscisse x de l'intersection F_h des rayons émergents avec l'axe de la lentille, correspondant aux rayons incidents extrêmes du faisceau, peut s'exprimer sous la forme :

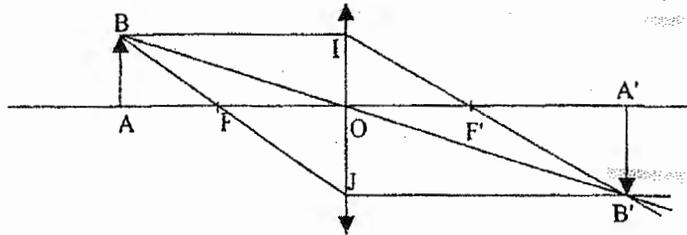
$$x = e - R + \frac{\sqrt{R^2 - h^2} + \sqrt{\frac{R^2}{n^2} - h^2}}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

Montrer que, si $h \ll \frac{R}{n}$ et $e \ll R$, on retrouve l'expression de la distance focale d'une lentille mince dans les conditions d'approximation de Gauss.

.....■ CONTROLE 1 (90 min ; 20 pts) ■.....

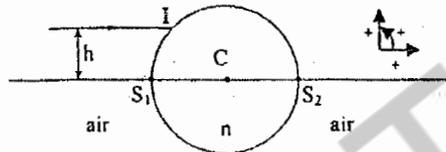
Exercice 1 (4/20 pts)

A partir du schéma ci-dessous et en ne prenant en compte que des considérations géométriques, retrouver la formule de conjugaison avec origine au centre.



Exercice 2 (11/20 pts)

On considère une sphère, de centre C et de rayon R, constituée d'un matériau d'indice de réfraction n et placée dans l'air (indice de réfraction égal à 1). Dans un plan méridien, un rayon lumineux, parallèle à l'axe optique et à une distance h de cet axe, est incident sur la sphère en I (voir figure ci-dessous) et on note i l'angle d'incidence.



1. A l'aide d'un schéma, où l'on figurera l'angle i, établir la relation liant $\sin i$, h et R. Faire apparaître sur ce schéma l'angle de réfraction en I noté r, puis écrire la loi de Snell-Descartes en I.
2. Réfaire la figure pour construire la marche du rayon incident à travers la sphère, les valeurs de h et de R sont respectivement 50 et 75 mm et l'on suppose $n = 1,40$. Pour ces valeurs, qui n'interviennent que lors de la construction, calculer les valeurs numériques de i et r.
- a) Après réfraction en I, le rayon rencontre la surface de la sphère en J et on note K le point d'intersection de son prolongement avec l'axe. Construire soigneusement (à l'aide d'un rapporteur) le rayon réfracté en I et figurer les points J et K. A partir de cette figure, donner l'expression de l'angle d'incidence i' en J. En utilisant la "relation des sinus" appliquée au triangle CJK, montrer que l'expression de CK s'écrit :

$$CK = R \frac{\sin r}{\sin(i-r)}$$

- Exprimer alors \overline{CK} en fonction de $\overline{CS_1}$, i et r.
- b) Donner l'expression de l'angle de réfraction r' en J. A l'aide des valeurs numériques des angles nécessaires, construire soigneusement la marche du rayon qui émerge en J et faire apparaître son point d'intersection avec l'axe que l'on note L. En utilisant la "relation des sinus" appliquée au triangle CJL, établir l'expression de \overline{CL} , en fonction de $\overline{CS_1}$, i et r.
 - 3) On se place maintenant dans le cas où $h \ll R$. Du point de vue optique, à quoi correspond cette situation ?
 - a) Que représente alors K ? A partir de l'expression de \overline{CK} obtenue en 2-a établir la nouvelle expression de \overline{CK} . Retrouver cette nouvelle expression de \overline{CK} en utilisant la relation de conjugaison de position du dioptre sphérique, avec origine au centre.
 - b) A partir de l'expression obtenue en 2.b établir la nouvelle expression de \overline{CL} . Que représente L par rapport à K ? Que représente le point L pour le système optique étudié ici ? Retrouver la nouvelle expression de \overline{CL} en utilisant la relation de conjugaison de position du dioptre sphérique avec origine au centre.
 - c) Donner le nom du système optique étudié.

D'après contrôle continu Rennes 1999

Exercice 3 (5/20 pts)

Une lentille mince, biconcave, symétrique, d'indice $n = 1,5$ baigne dans l'air. On note, r_1 et r_2 les rayons de courbure algébriques de ses faces. On donne $|r_1| = |r_2| = 5$ cm.

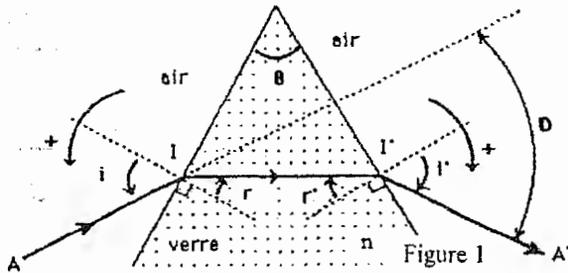
1. Représenter la lentille. Calculer la distance focale image notée f' ainsi que $\overline{OF'}$ (où O désigne le centre de la lentille et F' le foyer image principal).
2. Calculer la distance focale objet notée f ainsi que \overline{OF} (où O est le foyer objet principal).
3. On place sur l'axe principal à une distance $d = 20$ cm en avant de la lentille un petit objet noté AB perpendiculaire à l'axe principal et de longueur $AB = 2$ cm. L'extrémité A de l'objet est sur l'axe principal. Calculer la position de l'image A' de A. Calculer le grandissement transversal noté γ . Déterminer le sens de l'image par rapport à l'objet. Déterminer la nature de l'objet et celle de l'image. Représenter par un tracé de rayons l'image de l'objet AB.

D'après contrôle continu Nancy

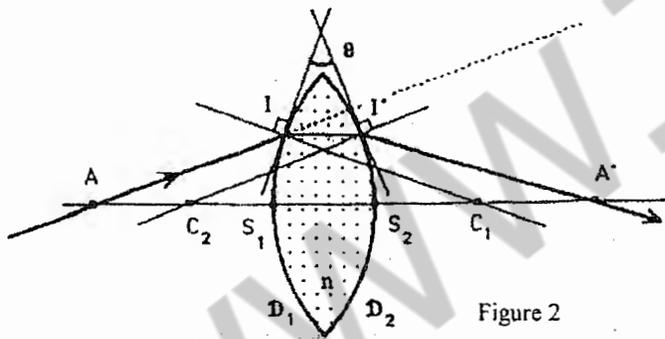
..... ■ **CONTROLE 2 (60 min ; 20 pts)** ■

A. Etude d'une lentille mince

Un rayon subit le phénomène de réfraction à travers deux dioptrés plans verre-air successifs, non parallèles, Π_1 et Π_2 . L'indice absolu de l'air est égal à 1. Les rayons AI , $I'I'$ et PA' sont dans un même plan (plan de représentation). Les dioptrés, orthogonaux au plan de figure, forment un angle θ . Les angles i et i' , et r et r' , sont comptés à partir des normales en I et I' , positivement dans le sens, indiqué sur le schéma.



1. Exprimer θ en fonction de r et r' .
2. Exprimer l'angle de déviation D , en fonction des angles i , i' et θ .
3. Dans le cas où les angles θ , i , i' , r et r' sont faibles, exprimer D en fonction de θ et n (indice du verre).
4. On envisage maintenant une lentille résultant de l'association de deux dioptrés sphériques verre-air D_1 et D_2 de rayons respectifs C_1S_1 et C_2S_2 (figure 2).



D_1 et D_2 se comportent, en I et I' , comme les dioptrés plans Π_1 et Π_2 . Si la lentille L est mince, les distances $I'I'$ et S_1S_2 peuvent être négligées devant AA' : donc $I \equiv I'$ et $S_1 \equiv S_2 \equiv O$ (centre de la lentille). Nous obtenons, dans ce cas, les figures 3 et 4.

On suppose l'approximation de Gauss vérifiée : angles α et α' faibles et rayons voisins de l'axe optique.

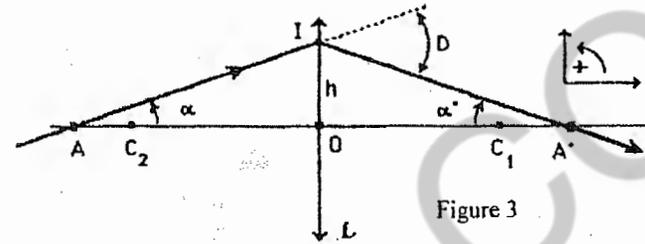


Figure 3

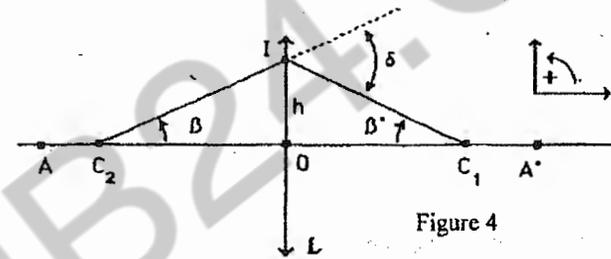


Figure 4

- a) Exprimer l'angle de déviation D en fonction de h ($=\overline{OI}$), \overline{OA} et $\overline{OA'}$.
- b) Quelle est la relation entre les angles δ et θ ?
- c) Exprimer δ en fonction de h , S_1C_1 et S_2C_2 .
- d) A l'aide de la relation trouvée au 3., donner la relation de conjugaison entre les points A et A' , c'est à dire la relation liant \overline{OA} et $\overline{OA'}$.
- e) Exprimer la distance focale image f' de la lentille L en fonction de S_1C_1 et S_2C_2 .

Dans toute la suite du problème, on supposera l'approximation de Gauss vérifiée.

B. Etude d'un objectif photographique.

Un objectif peut être modélisé par une lentille mince L de distance focale image $\overline{OF'} = f' = +75$ mm. Pour effectuer la mise au point, le photographe déplace l'objectif par rapport à la pellicule (Π).

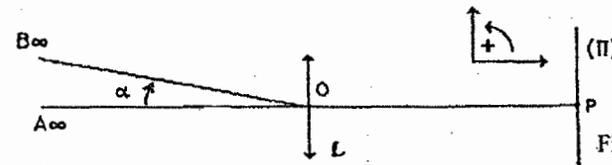


Figure 5

- On désire photographier un objet AB très éloigné, A étant sur l'axe optique et B dans une direction faisant un angle α avec l'axe : à quelle distance de la pellicule (II) faudra-t-il placer la lentille L ?
- Construire l'image A'B' de AB.
- Exprimer la grandeur $\overline{A'B'}$ en fonction des données.
- L'objet AB est une tour de 60 m de hauteur, située à 3 km de l'objectif. Calculer $\overline{A'B'}$.
- Si le photographe souhaite avoir une image deux fois plus grande sur la pellicule : par quelle lentille doit-t-il remplacer L ?
- On définit le tirage de l'objectif comme étant la distance algébrique $\overline{F'A'} = \tau'$. Quelle est la valeur maximale prise par τ' si le réglage de l'objectif permet de mettre au point sur un objet situé à une distance de L (lentille initiale) comprise entre 1,40 m et l'infini ?

C. Utilisation de lentilles additionnelles

Macrophotographie

On place devant l'objectif L du paragraphe B, une lentille additionnelle L_1 convergente de centre O_1 et de vergence $C_1 = +3$ dioptries. La distance $\overline{O_1O}$ est constante et égale à 5 cm.

- Le tirage de l'appareil n'a pas été modifié : la position de la pellicule est définie par $\overline{OF'} \leq \overline{OP} \leq \overline{OF'} + \tau'$. Déterminer l'ensemble des points A de l'axe qui peuvent, après mise au point, être photographiés en donnant une image nette ?
- L'objet AB ($\overline{AB} = +1$ cm et $\overline{AO_1} = +30$ cm) est dans un plan perpendiculaire à l'axe. Calculer la grandeur $\overline{A'B'}$ de l'image portée sur (II).
- Quelle aurait été la dimension de $\overline{A'B'}$ avec l'appareil du B.6. L'objet étant situé à 1,40 m de l'objectif ? Intérêt de la lentille L_1 ?

Téléobjectif

Pour photographier des objets très éloignés, on peut utiliser des objectifs encombrants, de grande focale. On choisit, ici, d'utiliser deux lentilles minces additionnelles :

- une lentille L_2 divergente (centre O_2 ; focale $f'_2 = -25$ mm) ;
- une lentille L_3 convergente (centre O_3 ; focale $f'_3 = +100$ mm).

On accole la lentille L_2 et l'objectif initial L (donc $O_2 \equiv O$) et on place devant cet ensemble, la lentille L_3 . La mise au point est faite, dans le but d'avoir une image de grandeur maximale (la position de la pellicule est encore définie par $\overline{OF'} \leq \overline{OP} \leq \overline{OF'} + \tau'$).

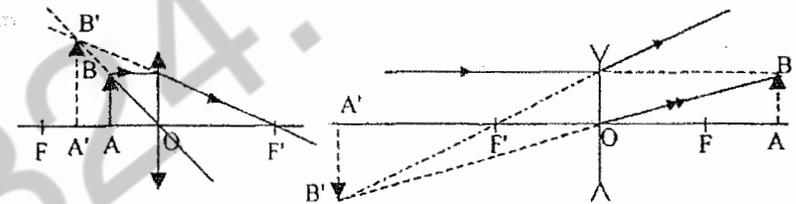
- Faire un schéma représentant les lentilles avec les positions relatives des centres optiques et des foyers. Compléter ce schéma par un tracé de rayons définissant la position du foyer image F'_2 du système optique $\Sigma = (L, L_2, L_3)$.
- Calculer l'encombrement du nouvel appareil (distance $\overline{O_3P}$).

- Déterminer la grandeur $\overline{A'B'}$ de l'image de AB défini au B.4.
- Calculer l'encombrement d'un appareil qui aurait comme objectif, une seule lentille donnant une image de même grandeur. Conclusion.

D'après Ensi - Deug 1999

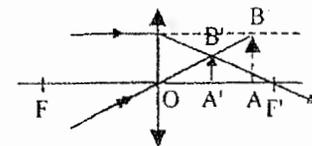
▼ **Corrigés des exercices** ▼

Corrigé 1.....

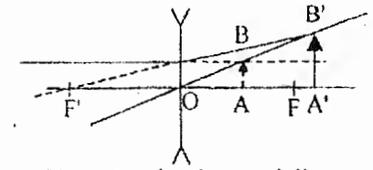


Objet réel et image virtuelle de même sens que l'objet

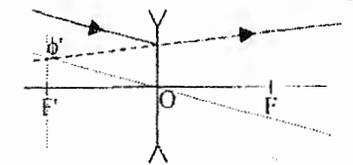
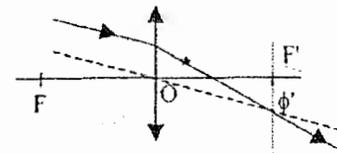
Objet virtuel et image virtuelle renversé par rapport à l'objet



Objet virtuel et image réelle de même sens que l'objet

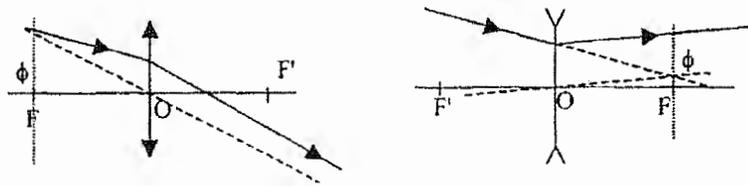


Objet virtuel et image réelle de même sens que l'objet

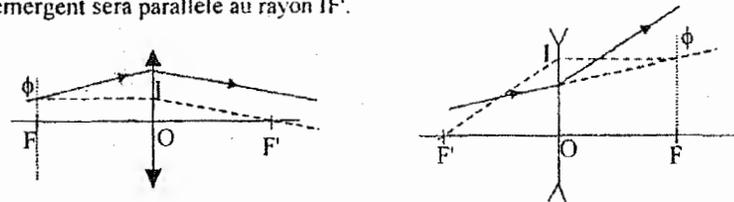


On trace le rayon passant par le centre optique et parallèle au rayon incident, il coupe plan principal image au point ϕ' (foyer secondaire image), le rayon émergent passe par ce point.

Autre exemple : on cherche le point ϕ (foyer secondaire objet) qui est à l'intersection entre le plan principal objet et le rayon incident. On trace le rayon passant par le centre optique passant par ϕ , le rayon émergent est parallèle à ce rayon (figure ci-après).

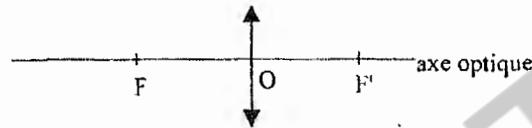


Pour les constructions suivantes on utilise le plan focal objet et le foyer image (les deux constructions précédentes pouvant être utilisées bien entendu) : on cherche le point ϕ (foyer secondaire objet) qui est à l'intersection entre le plan principal objet et le rayon incident. Un rayon parallèle à l'axe optique et partant de ϕ arrive sur la lentille en I puis passe par F' , le rayon émergent sera parallèle au rayon IF' .



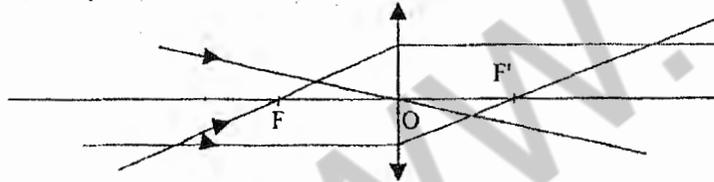
Corrigé 2.....

1. a) Il s'agit d'une lentille convergente.



O est le centre optique de la lentille, F le foyer objet, F' le foyer image.

b) Complément du schéma.



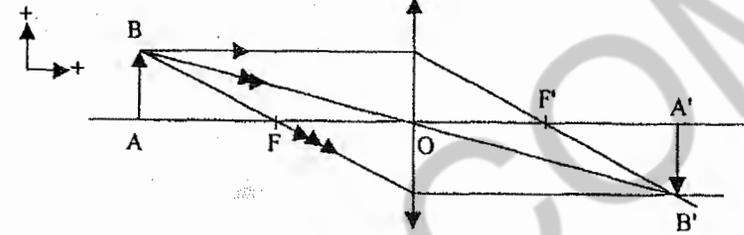
2. a) Il faudra choisir une lentille convergente, car une lentille divergente ne peut donner une image réelle d'un objet réel.

b) Il faut : un banc d'optique, une source de lumière, un écran, un objet plan transparent, et un diaphragme.

c) Deux des trois rayons tracés ci-après suffisent pour déterminer l'image.

d) Le banc d'optique permet d'avoir un alignement correct et de réaliser des mesures précises.

e) Les conditions de Gauss sont les suivantes : les rayons lumineux sont peu inclinés sur l'axe optique et passent près du centre optique.



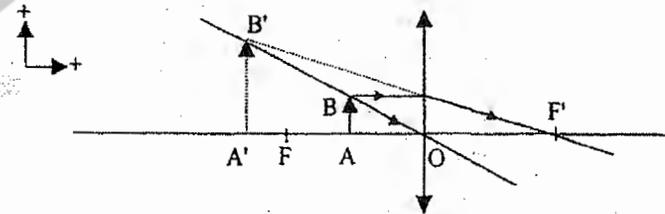
3. a) Lorsque $\overline{OA} \rightarrow -\infty, \overline{OA'} \rightarrow f'$. Sur la figure 1, on obtient, pour

$$\frac{1}{\overline{OA}} = 0, \frac{1}{\overline{OA'}} = 8,4 \text{ m}^{-1}. \text{ La distance focale est alors de } \boxed{f' = 12 \text{ cm.}}$$

b) Posons $\overline{OA} = -d$, où d est la distance (positive) de l'objet à la lentille. La relation de conjugaison permet d'écrire :

$$\boxed{\overline{OA'} = \frac{df'}{d - f'}}$$

Nous voyons que si $d > f'$, $\overline{OA'} > 0$, l'image est réelle (car dans l'espace image). Par contre si $d < f'$, $\overline{OA'} < 0$, l'image est virtuelle (car située dans l'espace objet). De plus dans ce cas, l'image est droite, plus grande que l'objet ; une application pratique est la loupe (voir ci-dessous).



4. a) La vergence de 2 lentilles accolées est égale à la somme des vergences de chaque lentille.

$$\boxed{C = C_1 + C_2}$$

b) Il faut que l'association soit équivalente à une lentille convergente, c'est-à-dire que C soit positif.

c) Appliquons la relation de conjugaison : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$

L'application numérique donne :

$$\boxed{f' \approx 0,187 \text{ m et donc } C = 5,33 \delta.}$$

d) D'après la question 3.a., la vergence de L_1 est $C_1 = 8,4 \delta$. La vergence de L_2 est :

$$C_2 = C - C_1$$

$$C_2 = 5,33 - 8,4 = -3,07 \delta$$

La distance focale de L_2 est alors :

$$f_2' = \frac{1}{C_2} = -\frac{1}{3,07} \approx -0,33 \text{ m} \Rightarrow \boxed{f_2' = -33 \text{ cm}}$$

Cette distance focale image est négative, ce qui correspond bien à une lentille divergente.

Corrigé 3.....

I. Reproduction grandeur nature d'un document

1. L'image formée sur l'écran est réelle et renversée.

2. Lorsque la photocopie a même surface que l'original, le grandissement est égal à 1 en valeur absolue, et comme l'image est renversée, $\gamma = -1$. D'après la relation du grandissement, on peut écrire :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = -1 \Rightarrow \overline{OA'} = -\overline{OA}$$

La dernière relation indique que O se trouve au milieu du segment AA' .

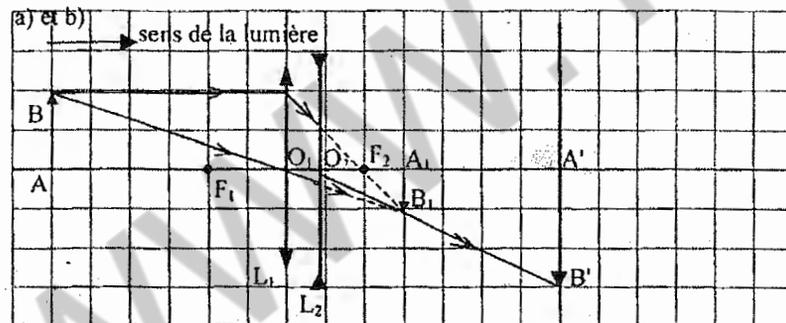
3. La relation de conjugaison donne :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'} \Rightarrow \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{OF'}$$

$$\boxed{f' = \overline{OF'} = \frac{\overline{OA'}}{2} = \frac{\overline{AA'}}{4}}$$

II. Agrandissement ou réduction d'un document

1.



c) On mesure $\overline{AB} = 0,02 \text{ m}$ et $\overline{A'B'} = -0,028 \text{ m}$.

On en déduit le grandissement $\gamma_{12} = \frac{A'B'}{AB} = -1,4$.

d) La surface de la photocopie est $S' = \gamma_{12}^2 S = (1,4)^2 S \approx 2S$. La surface du document est doublée.

2. a) A_2B_2 est l'image de AB à travers L_2 . Appliquons la relation de conjugaison des lentilles minces :

$$\frac{1}{O_2A_2} - \frac{1}{O_2A} = \frac{1}{O_2F_2'} \Rightarrow \frac{1}{O_2A_2} - \frac{1}{-0,6} = -3$$

On obtient :

$$\boxed{O_2A_2 = -0,214 \text{ m} = -21,4 \text{ cm}}$$

b) Le grandissement de la lentille L_2 est donné par :

$$\gamma_2 = \frac{A_2B_2}{AB} = \frac{O_2A_2}{O_2A} = \frac{-0,214}{-0,6} = 0,36$$

Pour la lentille L_1 , nous pouvons écrire :

$$\gamma_1 = \frac{A'B'}{A_2B_2} = \frac{O_1A'}{O_1A_2}$$

Evaluons $\overline{O_1A_2}$:

$$\overline{O_1A_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_2} = -0,086 - 0,214 = -0,3 \text{ m}$$

D'où :

$$\gamma_1 = \frac{A'B'}{A_2B_2} = \frac{O_1A'}{O_1A_2}$$

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{0,6}{-0,3} = -2,0}$$

le grandissement de L_1 vaut bien $-2,0$.

c) Le grandissement de l'association (L_2, L_1) est donné par :

$$\gamma_{21} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'B'}{A_2B_2} \frac{A_2B_2}{AB} = \gamma_1 \gamma_2$$

$$\gamma_1 \gamma_2 = 0,36 \times (-2,0) = -0,72$$

d) La surface de la photocopie est $S' = \gamma_{21}^2 S = (0,72)^2 S \approx \frac{S}{2}$. La surface du document est divisée par deux.

Corrigé 4.....

I. Détermination de la distance focale d'une lentille

1. Une lentille convergente est une lentille à bords minces tandis qu'une lentille divergente a des bords épais.

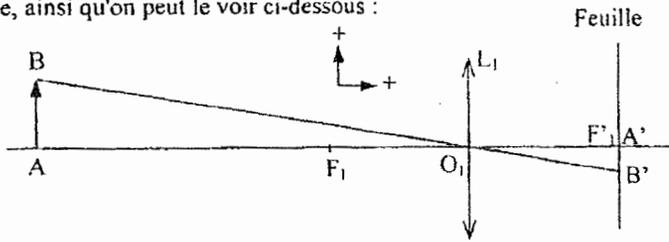
On peut distinguer les deux types de lentille en observant un objet à courte distance : pour une lentille convergente l'image est plus grande que l'objet, pour une lentille divergente, c'est le contraire.

2. La valeur + 8 indique (en dioptries) la vergence C_1 de la lentille L_1 , c'est-à-dire l'inverse de la distance focale (en m). Le signe + indique que la lentille est convergente.

D'où :
$$f_1 = \frac{1}{C_1}$$

Application numérique :
$$f_1 = 0,125 \text{ m} = 12,5 \text{ cm.}$$

3. Le bâtiment est situé à une distance très grande devant la distance focale ; on peut donc le considérer à l'infini. Dans ce cas, son image se formera dans le plan focal image de la lentille L_1 , c'est-à-dire à 12,5 cm de la lentille. C'est à cette distance qu'il faudra placer une feuille de papier. L'image est renversée, ainsi qu'on peut le voir ci-dessous :



4. Nous allons utiliser la relation de Descartes :

$$\frac{1}{O_1A'} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{O_1F_1'}$$

L'énoncé nous donne : $AA' = 1,10 \text{ m}$ et $AO_1 = 14,5 \text{ cm}$. On en tire :

$$O_1A' = O_1A + AA' = -14,5 + 110 = 95,5 \text{ cm}$$

L'application de la relation de Descartes donne :

$$O_1F_1' = 12,6 \text{ cm.}$$

Cette valeur est en bon accord avec celle donnée par le constructeur (moins de 1% d'écart).

II. Association de lentilles

1. On applique à nouveau la relation de Descartes :

$$\frac{1}{O_1A_1} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{O_1F_1'}$$

Nous avons $O_1A = -100 \text{ cm}$; la relation précédente donne :

$$O_1A_1 = 14,3 \text{ cm.}$$

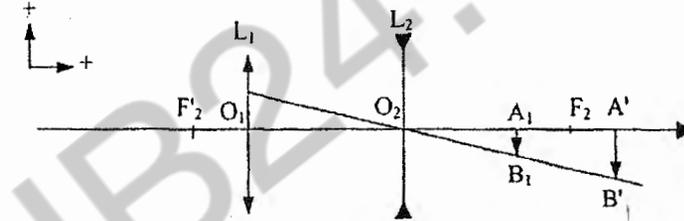
A partir de la relation du grandissement, on peut écrire :
$$\frac{A_1B_1}{O_1A_1} = \frac{AB}{O_1A}$$

On en tire :

$$A_1B_1 = AB \frac{O_1A_1}{O_1A}$$

L'application numérique donne :
$$A_1B_1 = -0,143 \text{ cm}$$

2. La lentille L_2 , marquée - 10 est donc une lentille divergente de distance focale image -10 cm. L'image A_1B_1 , se trouvant à 14,3 cm de O_1 et la distance O_1O_2 étant de 8 cm, nous avons la représentation ci-dessous (figure non à l'échelle) :



A_1B_1 joue le rôle d'objet virtuel pour la lentille L_2 . Pour trouver la position de $A'B'$, nous allons appliquer la relation de Descartes :

$$\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2A_1} = \frac{1}{O_2F_2'}$$

avec $O_2A_1 = O_2O_1 + O_1A_1 = -8 + 14,3 = 6,3 \text{ cm}$ et $O_2F_2' = -10 \text{ cm}$.

Application numérique :
$$O_2A' = 17 \text{ cm.}$$

Les triangles $O_2A_1B_1$ et $O_2A'B'$ étant semblables, nous pouvons écrire :

$$\frac{A_1B_1}{O_2A_1} = \frac{A'B'}{O_2A'}$$

On en tire :
$$A'B' = A_1B_1 \frac{O_2A'}{O_2A_1}$$

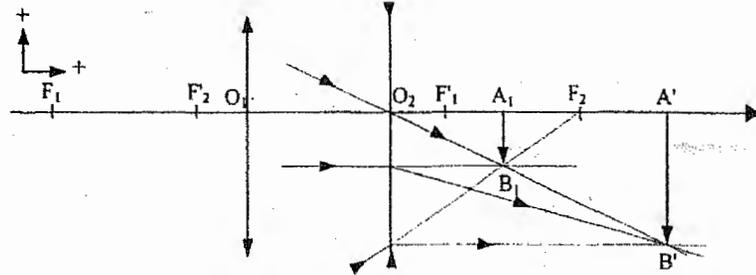
L'application numérique donne :

$$A'B' = 0,39 \text{ cm}$$

3. On peut tracer 3 rayons particuliers :

- Le rayon parallèle à l'axe optique et dont le support passe par B_1 ressort en semblant provenir de F_2' .
- Le rayon incident dont le support passe par B_1 et F_2 ressort parallèlement à l'axe optique.
- Le rayon qui passe par O_2 et par B_1 , ce rayon n'est pas dévié.

L'intersection des trois rayons émergents précédents permet de déterminer B'.
(le schéma n'est pas à l'échelle).

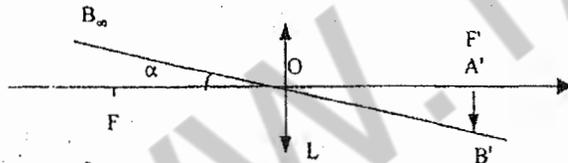


4. Le dispositif précédent donne d'un objet éloigné une image réelle dont la taille est supérieure à celle que l'on obtiendrait avec une seule lentille convergente. Ce dispositif montre donc le principe du téléobjectif. Si on définit l'encombrement de l'appareil comme la distance de la première lentille à l'image définitive, ici nous avons un encombrement de 25 cm. Pour obtenir une image de même taille, il faudrait une lentille convergente de 33,6 cm de distance focale. Le gain en encombrement est de 8,7 cm. Dans les téléobjectifs, ce gain permet d'obtenir des dimensions d'appareils raisonnables.

Corrigé 5.....

I. Œil normal

1. L'objet AB est à l'infini, son image se forme donc dans le plan focal image de la lentille L.



2. a) Nous allons appliquer la relation de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

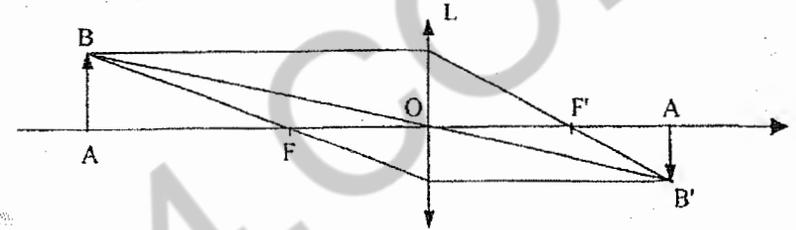
avec : $\overline{OA'} = 17 \text{ mm}$ et $\overline{OA} = -25 \text{ cm} = -250 \text{ mm}$ (attention à prendre les mêmes unités).

Application numérique :

$$\overline{OF'} = 15,9 \text{ mm}$$

b) On utilise 2 des trois rayons suivants :

- le premier issu de B, parallèle à l'axe optique ressort de la lentille en passant par F' ;
 - le second issu de B, passe par O et n'est pas dévié ;
 - le troisième issu de B, passe par F et ressort parallèlement à l'axe optique.
- Ces trois rayons passent par B', image de B !



3. L'analogie fonctionnelle que présente l'œil avec le "zoom" de certains objectifs d'appareils photo ou de caméscope est la possibilité de faire varier la distance focale.

II. Œil hypermétrope et sa correction

1. L'œil hypermétrope donne d'un objet à l'infini une image située derrière la rétine. Il n'est pas assez convergent. On doit donc ajouter une lentille convergente.

2. a) Pour avoir une image nette, l'image définitive doit se former sur la rétine.
b) L'image intermédiaire fournie par le verre joue le rôle d'objet pour l'œil. Nous allons utiliser la relation de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

avec $\overline{OA'} = 17 \text{ mm}$ et $\overline{OF'} = 18,5 \text{ mm}$.

Application numérique :

$$\overline{OA_1} = 209,7 \text{ mm} \approx 210 \text{ mm}$$

c) L'objet étant à l'infini, son image se forme dans le plan focal image de L₁ et donc $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1O} + \overline{OA_1} = 12 + 210 = 222 \text{ mm}$. A₁ est confondu avec F'₁ et la distance focale de L₁ est :

$$\overline{O_1F'_1} = 222 \text{ mm}$$

La vergence est l'inverse de la distance focale exprimée en mètre :

$$C_1 = \frac{1}{\overline{O_1F'_1}} \approx 4,5 \delta$$

3. Par un raisonnement identique à celui développé dans II.2b, on peut écrire :

$$\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O} + \overline{OA_1} = \overline{OA_1} = \overline{O_2F'_2}$$

$$\overline{O_2A_1} = 210 \text{ mm}$$

La distance focale de L_2 est environ de 21 cm.

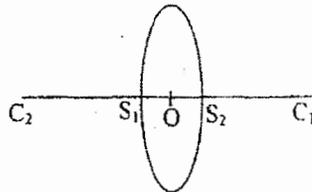
Corrigé 6.....

1. a) Le foyer image F' est le point conjugué d'un objet ponctuel situé à l'infini sur l'axe optique. Le foyer objet F est le point conjugué d'une image ponctuelle située à l'infini.

b) Une lentille est un système centré formé de deux dioptries dont l'un au moins est sphérique. Appelons S_1 et S_2 les sommets et C_1 et C_2 les centres de ces deux dioptries.

Une lentille est mince, lorsque l'épaisseur $e = |\overline{S_1S_2}|$ est négligeable devant

$$|\overline{S_1C_1}|, |\overline{S_2C_2}| \text{ et } |\overline{S_1C_1} - \overline{S_2C_2}|.$$



c) Dans une lentille mince, S_1 et S_2 sont pratiquement confondus avec le centre optique O . La distance focale image f' est alors définie par : $f' = \overline{OF'}$.

La vergence est l'inverse de la distance focale image et s'exprime en dioptrie.

d) Formules de conjugaison et grandissement γ (l'objet est AB et l'image $A'B'$) pour une lentille mince :

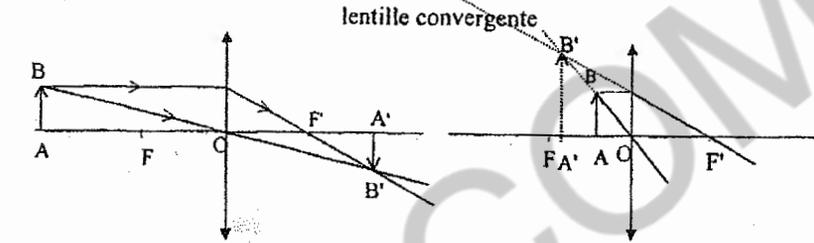
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

2. a) Les conditions d'obtention d'une bonne image sont les conditions de Gauss (stigmatisme approché) : les rayons sont paraxiaux, c'est à dire peu inclinés sur l'axe et passent près du centre optique.

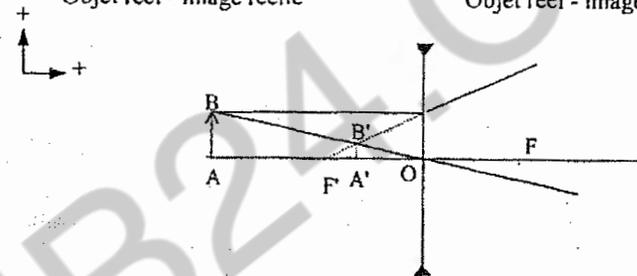
b) La lentille est convergente, car une lentille divergente donne toujours d'un objet réel une image virtuelle tandis que dans certaines conditions, une lentille convergente peut donner d'un objet réel une image réelle ou une image virtuelle.

Schéma :



Objet réel - image réelle

Objet réel - image virtuelle



Lentille divergente
Objet réel - image virtuelle

c) On utilise la formule du grandissement : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{-5}{15} = -\frac{1}{3} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

Connaissant $\overline{OA'} = 40$ cm, on en tire :

$$\overline{OA} = -3 \overline{OA'} = -3 \times 40 = -120 \text{ cm.}$$

Pour trouver la distance focale, on utilise la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{40} - \frac{1}{-120}$$

D'où :

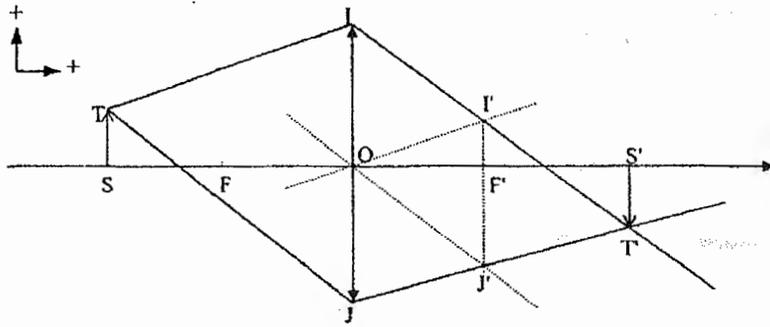
$$f' = 30 \text{ cm}$$

La vergence est égale à : $C = \frac{1}{f'} = 3,33 \text{ d.}$

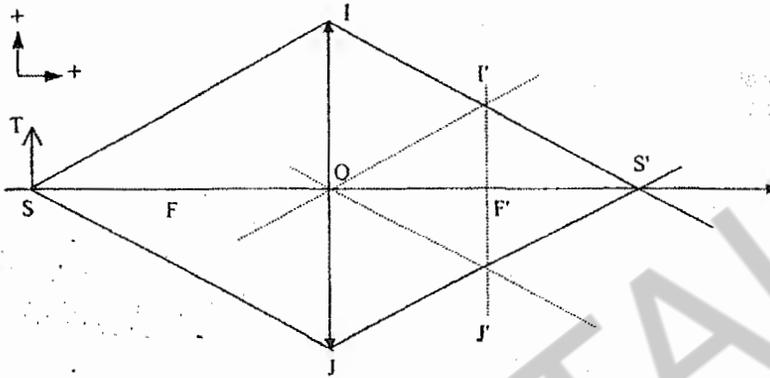
La lentille est bien convergente puisque sa distance focale est positive.

3.

a) Construction : On trace TI , puis son parallèle qui passe par $O \Rightarrow$ on trouve le foyer secondaire I' . Même démarche avec le rayon TJ pour obtenir J' . Les rayons II' et JJ' se coupent en T' .



Même construction (les deux figures sont séparées pour une meilleure visualisation).



b) Appliquons la relation de conjugaison afin de trouver la position de l'image S' de S :

$$\frac{1}{OS'} = \frac{1}{OF'} + \frac{1}{OS}$$

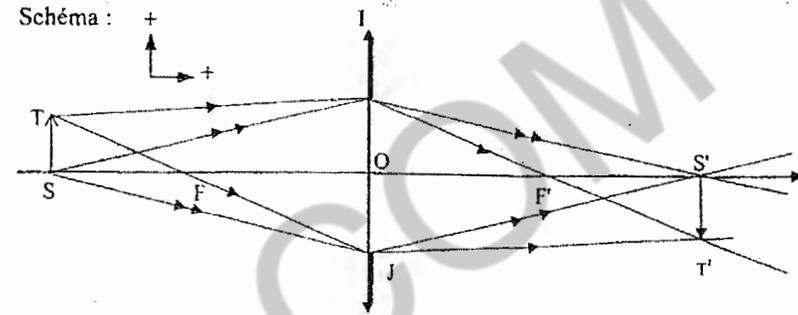
$$\frac{1}{OS'} = \frac{1}{30} + \frac{1}{-60}$$

On trouve $OS' = 60$ cm. On doit donc placer l'écran à 60 cm de la lentille.

c) L'image devient floue car l'image d'un point n'est plus un point mais une tache.

4.

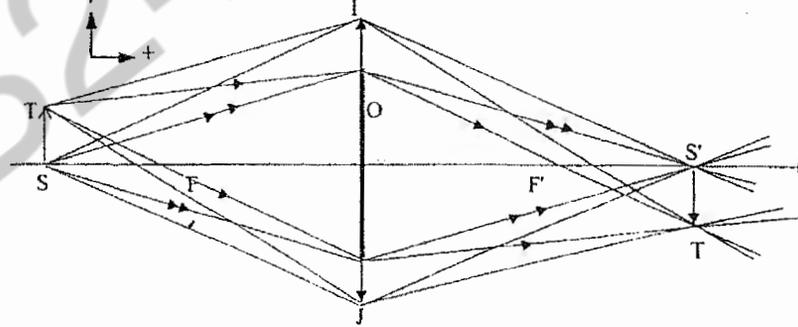
a) Position et taille sont identiques, mais la luminosité est moindre car le faisceau lumineux est moins étendu.



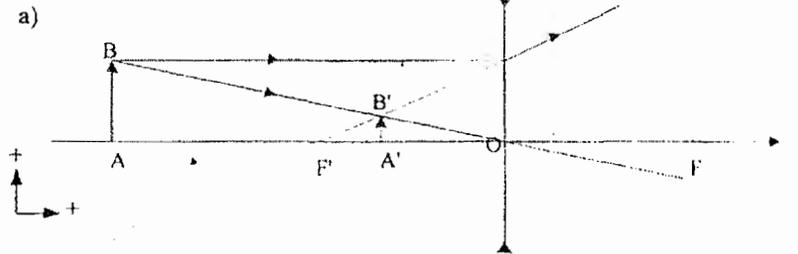
b) L'image devient floue mais moins rapidement car la tache correspondant à chaque point objet est plus petite.

c) Dans ce cas, on augmente la profondeur de champ.

d) On conserve la même position et la même taille, seule la luminosité diminue.



5.



On mesure $OA' = -29$ cm et $A'B' = 4,29$ cm. On peut vérifier ces résultats par le calcul :

$$\frac{1}{OA'} = \frac{1}{OF'} + \frac{1}{OA}$$

$$\frac{1}{OA'} = \frac{1}{-40} + \frac{1}{-100}$$

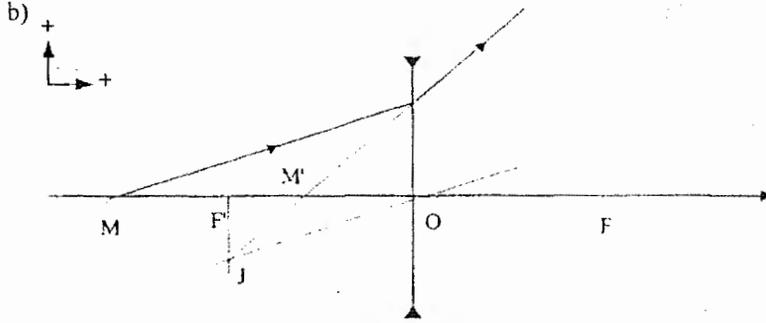
On trouve $\overline{OA'} = -28,6$ cm.

Le grandissement est donné par :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{-28,6}{-100} = 0,286$$

On trouve $\overline{A'B'} = 0,286 \overline{AB} = 0,286 \times 1,5 = 4,29$ cm.

Les valeurs calculées correspondent bien aux valeurs mesurées.



On trace MI, puis le parallèle passant par O qui coupe le plan focal image en J. On trace JI, l'intersection avec l'axe optique nous donne M'.

On mesure $\overline{OM'} = -27$ cm.

Vérifions par le calcul :

$$\frac{1}{\overline{OM'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OM}}$$

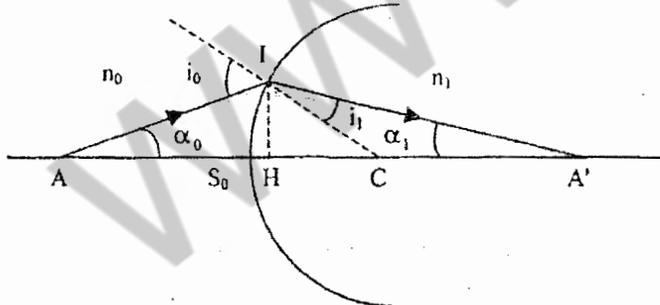
$$\frac{1}{\overline{OM'}} = \frac{1}{-40} + \frac{1}{-80}$$

On trouve :

$$\overline{OM'} = -\frac{80}{3} \approx -26,7 \text{ cm.}$$

Corrigé 7.....

1. Traçons un rayon incident AI et l'émergent IA' correspondant :



Dans les triangles ICA et ICA', on peut écrire :

$$\frac{\sin(\pi - i_0)}{CA} = \frac{\sin i_0}{CA} = \frac{\sin \alpha_0}{CI}$$

$$\frac{\sin i_1}{CA'} = \frac{\sin \alpha_1}{CI}$$

Or

$$\sin \alpha_0 = \frac{IH}{IA} \text{ et } \sin \alpha_1 = \frac{IH}{IA'}$$

Appliquons la loi de Descartes pour la réfraction :

$$n_0 \sin i_0 = n_1 \sin i_1$$

Soit :

$$n_0 \frac{CA \times IH}{IA \times CI} = n_1 \frac{CA' \times IH}{CI \times IA'}$$

$$\boxed{n_0 \frac{CA}{IA} = n_1 \frac{CA'}{IA'}}$$

La quantité $n \frac{CA}{IA}$ qui se conserve à la traversée du dioptrique est un invariant fondamental.

2. Dans le cas de l'approximation de Gauss, les longueurs IA_0 et IA_1 peuvent être confondues avec S_0A_0 et S_0A_1 .

L'invariant fondamental s'écrit alors :

$$n_0 \frac{\overline{CA_0}}{S_0A_0} = n_1 \frac{\overline{CA_1}}{S_0A_1}$$

Cette relation peut encore s'écrire :

$$n_0 \frac{\overline{CA_0}}{(S_0C + CA_0)} = n_1 \frac{\overline{CA_1}}{(S_0C + CA_1)}$$

$$n_0 \frac{\overline{CA_0}}{CA_1} = n_1 \frac{\overline{CA_1}}{CA_0}$$

Soit, en divisant par $\overline{S_0C}$:

$$\boxed{\frac{n_0}{CA_1} - \frac{n_1}{CA_0} = \frac{n_0 - n_1}{CS_0}}$$

3. a) Le foyer image d'un système optique est le point conjugué du point du milieu objet situé à l'infini sur l'axe principal.

b) La boule est composée de deux dioptriques sphériques. Nous allons chercher le conjugué d'un point, sur l'axe, à l'infini, dans l'espace objet à travers les deux dioptriques. Nous appliquons deux fois la relation de conjugaison établie en 2. ; nous appelons A_1 l'image de A_0 donnée par le premier dioptrique :

$$\frac{n_0}{CA_1} = \frac{n_0 - n_1}{CS_0}$$

Pour le deuxième dioptré, la relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{n_1}{CF'} - \frac{n_2}{CA_1} = \frac{n_1 - n_2}{CS_2}$$

En éliminant $\overline{CA_1}$ entre les deux relations, il vient :

$$\overline{CF'} = \frac{n_0 n_1}{n_0 n_1 - 2n_0 n_2 + n_1 n_2} R$$

Application numérique :

$$\overline{CF'} = \frac{n_1}{2(n_1 - 1)} R$$

$$\overline{CF'} = 4,5 \text{ mm}$$

c) Cherchons quel est le conjugué de S_0 à travers la lentille boule. Nous appellerons A_1 l'image de S_0 à travers le premier dioptré et A_2 l'image définitive :

$$\frac{1}{\overline{CA_1}} - \frac{n_1}{\overline{CS_0}} = \frac{1 - n_1}{\overline{CS_0}} = \frac{n_1 - 1}{R}$$

$$\frac{n_1}{\overline{CA_2}} - \frac{n_2}{\overline{CA_1}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS_2}} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

($R = \overline{S_0 C} > 0$),

En éliminant $\overline{CA_1}$ entre les deux relations, nous obtenons :

$$\overline{CA_2} = \frac{n_1}{n_1 - 2n_2} R$$

Les valeurs des indices sont telles que : $n_1 = 2 n_2$, et $\overline{CA_2} \rightarrow \infty$. Le faisceau transmis dans le milieu d'indice n_2 est donc un faisceau parallèle à l'axe optique.

Corrigé 8.....

1. On peut écrire (voir figure 1 énoncé) :

$$\theta = (\overline{CS}, \overline{CI}) = (\overline{CS}, \overline{AI}) + (\overline{AI}, \overline{CI}) = (\overline{AS}, \overline{AI}) + (\overline{AI}, \overline{CI})$$

$$\theta = (\overline{CS}, \overline{CI}) = (\overline{CS}, \overline{A'I}) + (\overline{A'I}, \overline{CI}) = (\overline{A'S}, \overline{A'I}) + (\overline{A'I}, \overline{CI})$$

L'angle d'incidence i est défini par :

$$i = (\overline{CI}, \overline{AI})$$

L'angle de réfraction est défini par :

$$i' = (\overline{CI}, \overline{A'I})$$

Les relations donnant θ s'écrivent :

$$\theta = u - i$$

$$\theta = u' - i'$$

$$ni \approx n'i'$$

La loi de Descartes dans l'approximation de Gauss, s'écrit :

soit :

$$n'u' - nu \approx (n' - n)\theta$$

En confondant H et S, on peut écrire :

$$p = \overline{SA} = \overline{HA} = \frac{\overline{IH}}{\tan u} \approx \frac{\overline{IH}}{u}$$

$$p' = \overline{SA'} = \overline{HA'} = \frac{\overline{IH}}{\tan u'} \approx \frac{\overline{IH}}{u'}$$

$$R = -\overline{SC} = -\overline{HC} = -\frac{\overline{IH}}{\tan \theta} \approx -\frac{\overline{IH}}{\theta}$$

En reportant dans l'expression liant u, u' et θ , il vient :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n - n'}{R}$$

Un rayon passant par le centre du dioptré sphérique correspond à un angle d'incidence nul : d'après la loi de la réfraction, ce rayon n'est pas dévié.

Le foyer objet F est le point dont l'image est à l'infini. Dans la relation précédente, si $p' \rightarrow \infty$, p est donné par :

$$p = \overline{SF} = f = -\frac{nR}{n - n'}$$

Le foyer image F' est le point image d'un objet à l'infini. Si $p \rightarrow \infty$, on obtient pour la distance focale image :

$$p' = \overline{SF'} = f' = \frac{n'R}{n - n'}$$

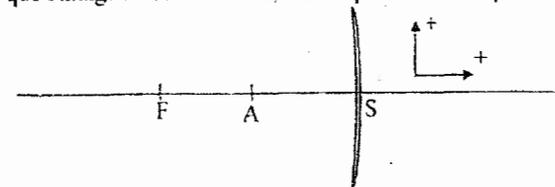
La grandeur $C = \frac{n - n'}{R}$ représente la vergence du dioptré, exprimée en dioptrie. Si la vergence est positive, le dioptré est convergent, les foyers sont réels ; dans le cas contraire, le dioptré est divergent et les foyers virtuels.

Application numérique :

$$f = \overline{SF} = -10,75 \text{ mm} ; f' = \overline{SF'} = 5,75 \text{ mm} ; C = 174 \text{ } \delta$$

La vergence est positive, le dioptré est convergent.

Pour que l'image A' soit virtuelle, il faut que A soit compris entre F et S .



2. Les angles étant petits, on peut écrire :

$$u \approx \frac{\overline{IH}}{SA} ; u' \approx \frac{\overline{IH}}{SA'}$$

soit, pour le grandissement angulaire :

$$G = \frac{u'}{u} = \frac{SA}{SA'} = \frac{p}{p'}$$

3. Lorsque l'image d'un objet plan, perpendiculaire à l'axe optique, est elle même plane et perpendiculaire à l'axe optique, on dit que le système optique est aplanétique.

Le grandissement transversal γ est défini par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{AB}$$

Dans les conditions de Gauss :

$$ni \approx n'i' \text{ et } i \approx i' = \frac{\overline{AB}}{SA} \text{ et } i' \approx \frac{\overline{A'B'}}{SA'}, \text{ soit :}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{AB} = \frac{n p'}{n' p}$$

Or $G = \frac{u'}{u} = \frac{p}{p'}$, d'où :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{AB} = \frac{n u}{n' u'}$$

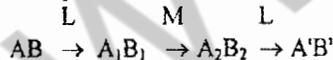
on retrouve l'invariant de Lagrange :

$$n \overline{AB} u = n' \overline{A'B'} u'$$

Corrigé 9

1. Méthode d'autocollimation

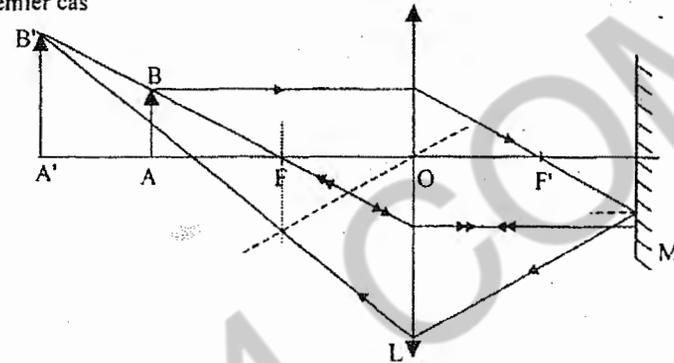
On trace l'image A_1B_1 de l'objet AB à travers la lentille puis l'image A_2B_2 de A_1B_1 à travers le miroir et l'image $A'B'$ de A_2B_2 à travers la lentille. On peut résumer la démarche suivie par :



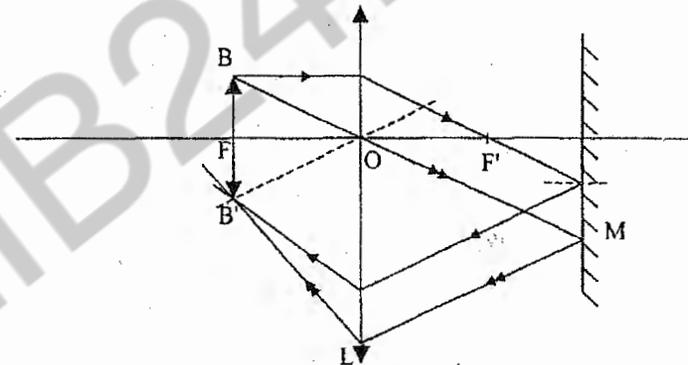
Premier cas : l'objet AB et l'image $A'B'$ ne sont pas dans le même plan. Cela n'apporte rien du point vu expérimental.

Second cas : l'image obtenue est de même taille, inversée par rapport à AB et dans le même plan. Ce cas présente l'avantage de pouvoir déterminer rapidement la distance focale de la lentille et cela quelle que soit la position du miroir. Il suffit de déplacer l'objet ou la lentille de façon à obtenir $A'B'$ nette dans le même plan que l'objet.

Premier cas



Second cas



2. Méthode de Bessel et Silbermann

a) On exprime $\overline{OA'}$ en fonction de D et x puis on applique la relation de conjugaison :

$$\overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = -x + D$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

On réduit au même dénominateur ce qui donne :

$$x^2 - Dx + Df' = 0$$

On obtient deux solutions si le discriminant est positif :

$$\Delta = D^2 - 4Df' > 0 \text{ c'est-à-dire si } D > 4f'$$

Les solutions sont :

$$x_1 = \overline{AO_1} = \frac{D - \sqrt{\Delta}}{2} ; x_2 = \overline{AO_2} = \frac{D + \sqrt{\Delta}}{2}$$

On a posé $d = O_1O_2$ d'où : $d = x_2 - x_1 = \sqrt{\Delta} = \sqrt{D^2 - 4Df'}$

$$d^2 = D^2 - 4Df'$$

$$f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

3) Le grandissement $\gamma = -1 = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{OA'} = -\overline{OA} = \frac{D}{2}$.

On reporte cette valeur dans l'équation de conjugaison :

$$\frac{2}{D} + \frac{2}{D} = \frac{1}{f'} \text{ d'où :}$$

$$f' = \frac{D}{4}$$

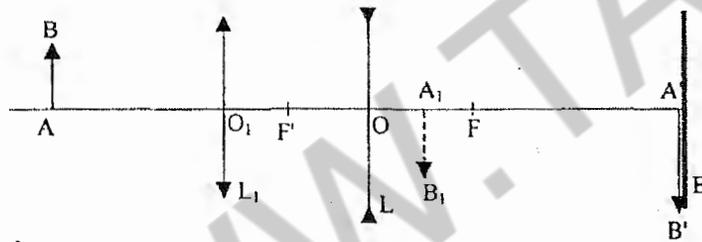
3. a) Pour obtenir une image réelle, il faut que : $\overline{OA'} > 0$. Pour une lentille divergente $f' < 0$ cela implique :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{OA} = \frac{\overline{OA'} \times f'}{f' - \overline{OA'}} > 0 \text{ donc } A \text{ est après le lentille, c'est un}$$

objet virtuel et comme $\overline{OA'} - f' > \overline{OA} \Rightarrow \overline{OA} < -f'$ il doit être placé entre le centre optique et le foyer objet F.

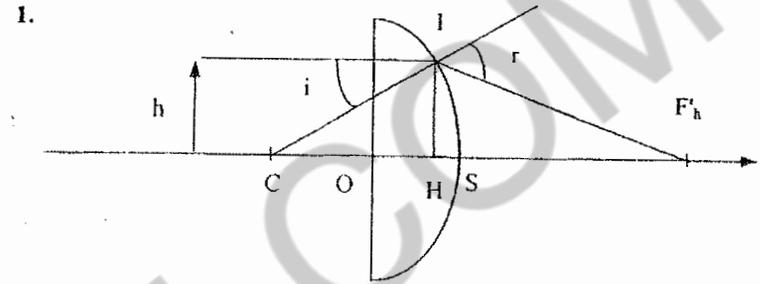
Pour réaliser cette mesure on réalise un objet virtuel (A_1B_1) à l'aide d'une lentille convergente L_1 (on note sa position en le visualisant sur un écran), on positionne L puis on visualise l'image finale sur l'écran. Pour obtenir la distance focale il suffit d'appliquer la formule de conjugaison.

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f'}$$



b) On se base sur la formule des lentilles accolées ($C_{2q} = C_1 + C_2$). Si la vergence de la lentille divergente est inférieure en valeur absolue à celle de la lentille convergente, en les accolant on aura une lentille convergente et on pourra déterminer la vergence de l'ensemble par une méthode au choix (autocollimation, Bessel...) et en déduire la vergence de la lentille divergente.

Corrigé 10.....



Nous avons :

$$\sin i = \frac{h}{R}$$

$$\text{et } n \sin i = \sin r = \frac{n h}{R}$$

Il y a réflexion totale si $n h > R$ soit : $h > h_0 = \frac{R}{n}$.

2. En considérant la figure ci-dessus, nous pouvons écrire :

$$\tan i = \frac{\overline{HI}}{\overline{CH}}, \quad \tan(r-i) = \frac{\overline{HI}}{\overline{HF_h}}, \quad \overline{CH} = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

De plus, $\overline{OF_h} = \overline{OC} + \overline{CH} + \overline{HF_h}$ et $n \sin i = \sin r = n \frac{h}{R}$

Compte tenu de toutes ces relations, nous obtenons l'expression demandée :

$$x = e - R + \frac{\sqrt{R^2 - h^2} + \sqrt{\frac{R^2}{n^2} - h^2}}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

Si $h \ll \frac{R}{n}$ (rayons proches de l'axe) et $e \ll R$ (O et S confondus), il est possible de faire un développement limité au premier ordre et, nous obtenons :

$$x = e - R + \frac{R + \frac{R}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}} = e - R + \frac{R}{1 - \frac{1}{n}} = e + \frac{R}{n-1} = \frac{R}{n-1}$$

La dernière relation est obtenue en négligeant e . On retrouve l'expression de la distance focale d'une lentille plan convexe dont l'un des rayons est infini.

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{S_1 C_1} - \frac{1}{S_2 C_2} \right) = (n-1) \left(0 + \frac{1}{R} \right)$$

..... ■ CORRIGE DU CONTROLE 1 ■

Exercice 1

Les triangles OIF' et F'A'B' sont semblables d'où :

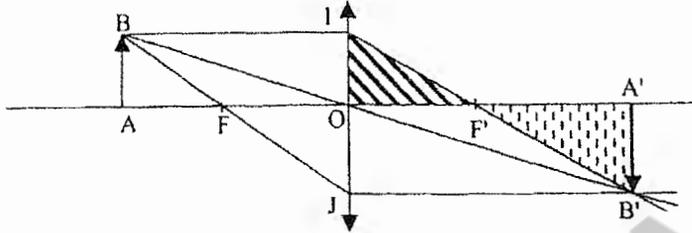
$$\frac{A'B'}{OI} = \frac{F'A'}{F'O}$$

Or $\overline{OI} = \overline{AB}$ et $\overline{F'A'} = \overline{OA'} - \overline{OF'}$, on en déduit :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{\overline{OA'} - \overline{OF'}}{F'O} = \frac{\overline{OF'} - \overline{OA'}}{\overline{OF'}} = 1 - \frac{\overline{OA'}}{\overline{OF'}}$$

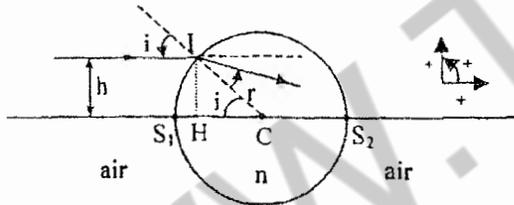
En divisant par $\overline{OA'}$ on obtient la relation de conjugaison avec origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{f'}$$



Exercice 2

• Schéma



Dans le triangle CHI, le sinus de l'angle i vaut :

$$\sin i = \frac{h}{CI} = \frac{h}{R}$$

La loi de Snell-Descartes appliquée en I donne :

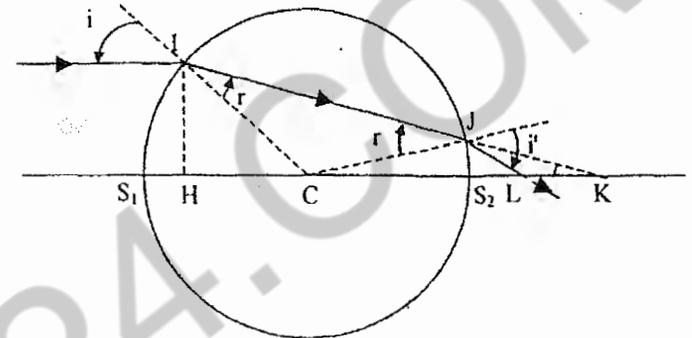
$$\sin i = n \sin r$$

• Application numérique :

$$\sin i = \frac{50}{75} = 0,667 \Rightarrow i = 41,8^\circ$$

$$r = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin i\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1,4} \sin 41,8\right) = 28,4^\circ$$

a) (Le schéma n'est pas à l'échelle).



Le triangle CIJ est isocèle donc les angles $\widehat{CIJ} = r$ et $\widehat{IJC} = r$ sont égaux. L'angle $i' = i$ du fait de la relation de Snell-Descartes.

Dans le triangle CJK, l'angle en J vaut $\pi - r$ et l'angle en K vaut $i' - r$ ou $i - r$ (relation angle alterne-interne). En C l'angle vaut :

$$\pi = \pi - r + i - r + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{C} = 2r - i$$

On applique la relation des sinus au triangle CJK :

$$\frac{\sin(\pi - r)}{CK} = \frac{\sin(i - r)}{CJ} = \frac{\sin(2r - i)}{JK}$$

$CJ = R$ et $\sin(\pi - r) = \sin r$ d'où :

$$CK = R \frac{\sin r}{\sin(i - r)}$$

Expression de la mesure algébrique

$$\overline{CS_1} = -R$$

$$\overline{CK} = -\overline{CS_1} \frac{\sin r}{\sin(i - r)}$$

b) L'angle r' en j est égal à r . Dans le triangle CJL, l'angle en J vaut $\pi - i$, l'angle C vaut $2r - i$ donc l'angle en L vaut :

$$\pi = \pi - i + 2r - i + \widehat{L} \Rightarrow \widehat{L} = 2(i - r)$$

On applique la relation des sinus à ce triangle :

$$\frac{\sin(\pi - i)}{CL} = \frac{\sin 2(i - r)}{CJ} = \frac{\sin(2r - i)}{JL}$$

$$CL = CJ \frac{\sin(\pi - i)}{\sin 2(i - r)}$$

l'expression algébrique s'écrit :

$$\overline{CS}_2 = R = CJ$$

$$\overline{CL} = \overline{CS}_2 \frac{\sin(\pi - i)}{\sin 2(i - r)} \quad \text{ou} \quad \overline{CL} = \overline{CS}_2 \frac{\sin(\pi i)}{\sin 2(i - r)}$$

3. Si $h \ll R$, les rayons incidents sont très proches de l'axe optique, on se situe dans les conditions de l'approximation de Gauss.

a) Le rayon incident étant parallèle à l'axe optique il coupe celui-ci après la traversée du dioptre S_1 au point K ; ce point correspond au foyer principal image.

Les angles étant faibles on peut écrire que $\sin i \approx i$ et $\sin r \approx r$, la relation donnant \overline{CK} devient alors :

$$\overline{CK} \approx -\overline{CS}_1 \frac{r}{(i - r)}$$

En utilisant la relation de Snell-Descartes $i \approx nr$, on a :

$$\overline{CK} \approx -\overline{CS}_1 \frac{1}{n - 1}$$

Relation de conjugaison du dioptre sphérique :

$$\frac{n'}{CA} - \frac{n}{CA'} = \frac{n' - n}{\overline{CS}}$$

A est à l'infini et l'image définitive est au point K d'où :

$$-\frac{1}{\overline{CK}} = \frac{n - 1}{\overline{CS}_1} \quad (\text{attention à ne pas faire de confusion dans les indices}).$$

$$\overline{CK} \approx -\overline{CS}_1 \frac{1}{n - 1}$$

b) Avec la même approximation sur les angles, on en déduit :

$$\overline{CL} = \overline{CS}_2 \frac{i}{2(i - r)}$$

$$\overline{CL} = \overline{CS}_2 \frac{n}{2(n - 1)}$$

L est le conjugué de K à travers le dioptre S_2 , il correspond au foyer principal image de l'ensemble du système.

La relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{CK}} - \frac{n}{\overline{CL}} = \frac{1 - n}{\overline{CS}_2}$$

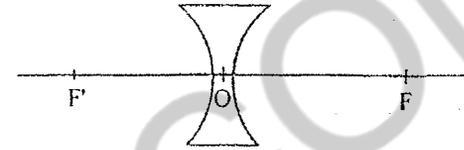
On remplace \overline{CK} par son expression, \overline{CS}_1 par $-R$ et \overline{CS}_2 par R d'où :

$$\frac{n - 1}{R} - \frac{n}{\overline{CL}} = \frac{1 - n}{R} \Rightarrow \overline{CL} = \frac{nR}{2(n - 1)}$$

c) Ce système correspond à une lentille.

Exercice 3

1. Une lentille biconcave est une lentille divergente.



Pour déterminer sa distance focale, on utilise la formule de la vergence :

$$C = \frac{1}{OF'} = (n - 1) \left(\frac{1}{OC_1} - \frac{1}{OC_2} \right)$$

Application numérique : $C = \frac{1}{f'} = (1,5 - 1) \left(\frac{1}{-5} - \frac{1}{5} \right)$

$$C = -20 \text{ δ et } f' = -5 \text{ cm}$$

$$\overline{OF'} = -5 \text{ cm}$$

2. La distance focale objet est l'opposée de la distance focale image.

$$f = -f' = 5 \text{ cm}$$

3. Position de l'image A'

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \times f'}{\overline{OA} + f'}$$

Application numérique : $\overline{OA'} = \frac{-20 \times -5}{-20 - 5} = -4 \text{ cm}$

$$\overline{OA'} = -4 \text{ cm}$$

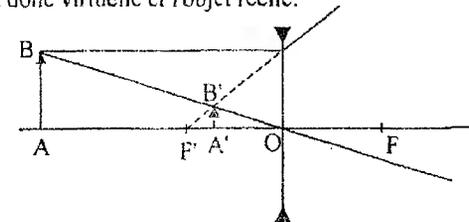
Grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Application numérique : $\gamma = \frac{-4}{-20} = 0,2$

$$\gamma = 0,2$$

γ est positif, l'image est de même sens que l'objet. $\overline{OA'} < 0$ et $\overline{OA} < 0$ l'image est donc virtuelle et l'objet réelle.



..... ■ CORRIGE DU CONTROLE 2 ■

A. Etude d'une lentille mince

1. On note O le sommet du prisme. Dans le triangle OII', on peut écrire :

$$\theta + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = \pi$$

soit :

$$\boxed{\theta = r + r'}$$

2. Avec les notations de la figure, les relations entre les angles s'écrivent :

$$D = \alpha + \beta$$

$$\alpha = i - r$$

$$\beta = i' - r'$$

$$D = i + i' - (r + r')$$

$$\boxed{D = i + i' - \theta}$$

3. Les lois de Descartes s'écrivent :

$$\sin i = n \sin r$$

$$\sin i' = n \sin r'$$

Dans le cas des petits angles, ces relations deviennent :

$$i \approx nr$$

$$i' \approx nr'$$

soit :

$$D \approx n(r + r') - \theta = (n-1)\theta$$

$$\boxed{D \approx (n-1)\theta}$$

4. a) On peut écrire :

$$D \approx \alpha - \alpha'$$

$$\alpha \approx \tan \alpha = -\frac{h}{OA}$$

$$\alpha' \approx \tan \alpha' = -\frac{h}{OA'}$$

$$\boxed{D = -\frac{h}{OA} + \frac{h}{OA'}}$$

b) Dans le quadrilatère à 2 angles droits en I et I', on peut écrire :

$$\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + (\pi - \delta) = 2\pi$$

soit :

$$\boxed{\theta = \delta}$$

c)

$$\delta = \beta - \beta'$$

$$\beta \approx \tan \beta = -\frac{h}{OC_2} \approx -\frac{h}{S_2C_2}$$

$$\beta' \approx \tan \beta' = -\frac{h}{OC_1} \approx -\frac{h}{S_1C_1}$$

$$\boxed{\delta = \frac{h}{S_1C_1} - \frac{h}{S_2C_2} \approx \frac{h}{OC_1} - \frac{h}{OC_2}}$$

d) $D = (n-1)\theta = (n-1)\delta$ fournit :

$$\boxed{\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = (n-1)\left(\frac{1}{S_1C_1} - \frac{1}{S_2C_2}\right)}$$

e) Si A est à l'infini, $OA \rightarrow -\infty$, A' est en F', $OA' = OF' = f'$ et :

$$\boxed{\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{S_1C_1} - \frac{1}{S_2C_2}\right)}$$

La relation de conjugaison trouvée en c) peut s'écrire :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'}$$

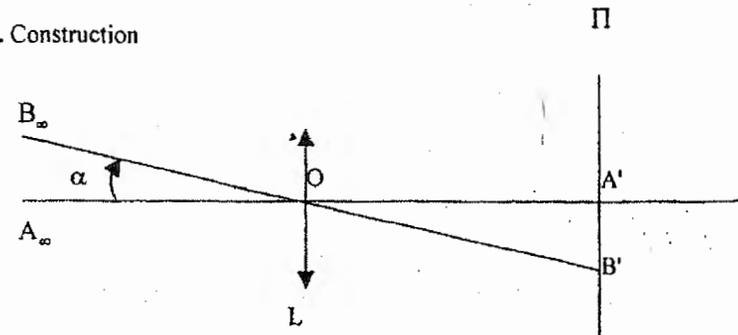
On retrouve la formule de conjugaison d'une lentille mince.

B. Etude d'un objectif photographique

1. L'objet étant très éloigné, l'image se formera dans le plan focal image. La pellicule doit être placée à une distance de l'objectif de :

$$\boxed{d = OF' = f' = 75 \text{ mm}}$$

2. Construction



3. Comme on est dans les conditions de Gauss $\tan \alpha \approx \alpha$, d'où la grandeur de l'image :

$$\boxed{A'B' = f' \alpha}$$

4. On peut écrire :

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$$

$$\overline{A'B'} = f' \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$$

L'application numérique donne $\overline{A'B'} = -1,5 \text{ mm}$, l'image est renversée.

5. Pour avoir une image deux fois plus grande sur la pellicule, il faut remplacer L par une lentille de distance focale double soit 150 mm.

6. Utilisons la formule de conjugaison de Newton :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$$

$$\tau' = \overline{F'A'} = -\frac{f'^2}{\overline{FA}} = -\frac{f'^2}{\overline{FO} + \overline{OA}} = -\frac{f'^2}{f' + \overline{OA}}$$

Or $f' \ll |\overline{OA}|$, d'où :

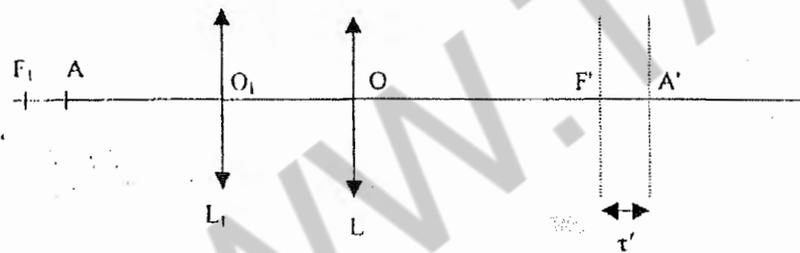
$$\tau' \approx -\frac{f'^2}{\overline{OA}}$$

L'application numérique donne $\tau' = 4 \text{ mm}$.

C. Utilisation de lentilles additionnelles

Macrophotographie

1. Appelons A_1 l'image de A dans L_1 . Pour que l'image définitive soit en F' , il faut que A_1 soit à l'infini et donc que A soit en F_1 .



Pour que l'image définitive soit en A' (tel que $\overline{F'A'} = \tau'$), il faut que A_1 soit tel que $\overline{OA_1} = -1,4 \text{ m}$, c'est-à-dire $\overline{O_1A_1} = -1,35 \text{ m}$. Donc :

$$-\frac{1}{\overline{O_1A_1}} + \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f'_1}$$

f'_1 est la distance focale de L_1 .

On obtient $\overline{O_1A} = -0,267 \text{ mm}$, ou $\overline{F_1A} = 66 \text{ mm}$.

Tous les points A, situés en avant de L_1 qui peuvent être photographiés en donnant une image nette sont tels que :

$$26,7 \text{ cm} \leq \overline{O_1A} \leq 33,3 \text{ cm}$$

2. Le grandissement γ est égal à :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \times \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$$

Pour L_1 , on écrit :

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{f'_1}{\overline{F_1A}} = \frac{f'_1}{\overline{F_1O_1} + \overline{O_1A}} = \frac{f'_1}{f'_1 + \overline{O_1A}}$$

Pour L :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{f'}{\overline{FA_1}}$$

On écrit :

$$\overline{FA_1} = \overline{FO} + \overline{OO_1} + \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1A_1} = f' - e + f'_1 - \frac{f_1'^2}{f' + \overline{O_1A}}$$

Expression dans laquelle on a posé : $e = \overline{O_1O}$. Il vient :

$$\overline{A'B'} = \frac{ff'_1}{(f'_1 + \overline{O_1A})(f' + f' - e) - f_1'^2} \overline{AB}$$

L'application numérique donne $\overline{A'B'} = -2,5 \text{ mm}$.

3. Avec l'appareil du B.6, on aurait eu, dans les conditions précisées :

$$\overline{A'B'} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{\tau'}{f'}$$

L'application numérique donne $\overline{A'B'} = -0,6 \text{ mm}$. La lentille L_1 permet d'obtenir de grandes images d'objets proches sans avoir à utiliser des lentilles de courtes distances focales et de garder un encombrement raisonnable.

Téléobjectif

1. L'ensemble L_2, L forme une lentille mince équivalente L_1 dont la distance focale est donnée par :

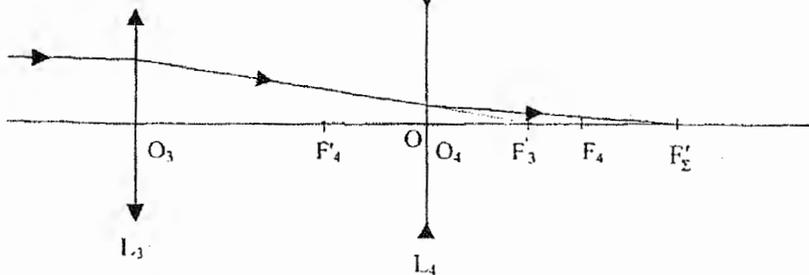
$$\frac{1}{f'_1} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f'_2}$$

soit $f'_1 = -37,5 \text{ mm}$.

F'_2 est l'image de F'_3 dans L_1 . F'_2 doit se trouver entre O_4 et F_4 . On choisit la position de L_3 pour que F'_2 soit en F' .

$$\frac{1}{O_4 F'} - \frac{1}{O_4 F'_3} = \frac{1}{f'_4}$$

O_4 est confondu avec O et O_3 . On obtient $\overline{O_4 F'_3} = 25 \text{ mm}$.



2. L'encombrement du système est $\overline{O_3 F'} = 150 \text{ mm}$.

3. L'image intermédiaire dans L_3 , $A_1 B_1$ a pour dimension algébrique :

$$\overline{A_1 B_1} = \frac{f'_3}{O_3 A} \overline{AB} = -2 \text{ mm}$$

L'image définitive $A' B'$ a pour grandeur :

$$\overline{A' B'} = \frac{f'_4}{F_4 F'_3} \overline{A_1 B_1} = -6 \text{ mm}$$

4. D'après la relation obtenue en B.4, la distance focale de la lentille convergente donnant le même grandissement serait :

$$f' = \frac{\overline{A' B'}}{\overline{AB}} \overline{OA} = \frac{-6}{60000} \times (-3000) = 0,3 \text{ m}$$

$$\boxed{f' = 0,3 \text{ m}}$$

L'encombrement serait donc de 300 mm. Le téléobjectif permet d'obtenir de grandes images avec un encombrement réduit.

■ 14 ■

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

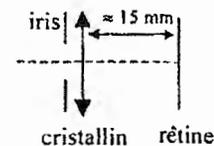
L'ŒIL

► Description

Du point de vue optique on peut considérer que l'œil est formé de trois parties :

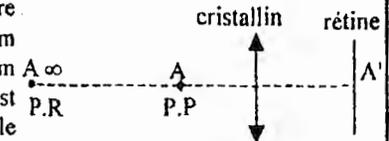
- l'iris et son ouverture la pupille qui joue le rôle d'un diaphragme ;
- le cristallin, lentille biconvexe capable de se déformer sous l'action des muscles ;
- la rétine, récepteur de lumière qui joue le rôle d'écran.

Modèle de l'œil réduit



► Accommodation

L'œil peut voir un objet nettement entre deux positions appelées le punctum rémotum P.R et le punctum proximum P.P, point où l'accommodation est maximale. La distance d_m qui sépare le point P.P de l'œil est la distance minimale de vision distincte, cette distance augmente avec l'âge. Pour les instruments d'optique commerciaux $d_m = 25 \text{ cm}$.



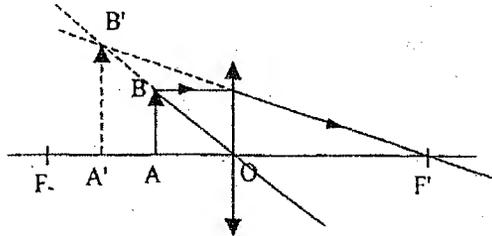
► Défauts de l'œil

- Myopie : l'œil est trop convergent, la vision de loin n'est pas possible par contre le P.P est plus proche que celui d'un œil normal. On corrige ce défaut à l'aide d'une lentille divergente.
- Hypermétropie : l'œil n'est pas assez convergent, il doit accommoder tous le temps, son P.R est virtuel. On corrige ce défaut à l'aide d'une lentille convergente.
- Presbytie : la faculté d'accommodation de l'œil diminue avec l'âge, d_m augmente et on corrige ce défaut à l'aide d'une lentille convergente uniquement pour voir de près.

LA LOUPE

► Description

La loupe est une lentille convergente de courte distance focale (entre 2 cm et 10 cm). En positionnant l'objet entre le foyer objet et le centre optique, on obtient une image virtuelle, agrandie et droite. L'œil placé derrière la lentille permet ainsi de visualiser cette image A'B'.



• Mise au point

Pour mettre au point, on amène l'image entre les deux punctums de l'œil en modifiant la distance entre l'objet et la loupe. Cette distance entre les deux positions extrêmes de l'objet est appelée latitude de mise au point (ℓ).

$$\ell = \frac{f^2}{d_m}$$

► Caractéristiques

• Puissance

La puissance d'une loupe est le rapport entre le diamètre apparent de l'image et la taille de l'objet.

$$P = \frac{\alpha'}{AB}$$

Avec α' en radians, AB en mètres et P en dioptries.

On définit aussi la puissance intrinsèque d'une loupe indépendamment de l'œil qui l'utilise. La puissance intrinsèque est égale à la vergence de la loupe.

$$P_i = C$$

• Grossissement

Par définition le grossissement est le rapport :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

α est l'angle sous lequel est vu l'objet à l'œil nu lorsque celui-ci est placé au P.P (soit d_m).

α' est l'angle sous lequel on voit l'image A'B'.

Grossissement commercial ou standard

Il est défini pour un œil observant à l'infini et avec $d_m = 25$ cm.

$$G_c = 1/4f$$

Relation entre puissance et grossissement :

$$G = P_i d_m$$

• Pouvoir séparateur

Le pouvoir séparateur est caractérisé par la distance minimale entre deux points d'un objet pour que l'œil puisse les distinguer correctement.

LE MICROSCOPE

► Description

Le microscope est destiné à augmenter le diamètre apparent sous lequel est vu un objet, il est constitué :

- d'un oculaire de courte distance focale (de l'ordre du cm) qui joue le rôle d'une loupe ;

- d'un objectif de très faible distance focale et qui donne une image réelle très agrandie et renversée.

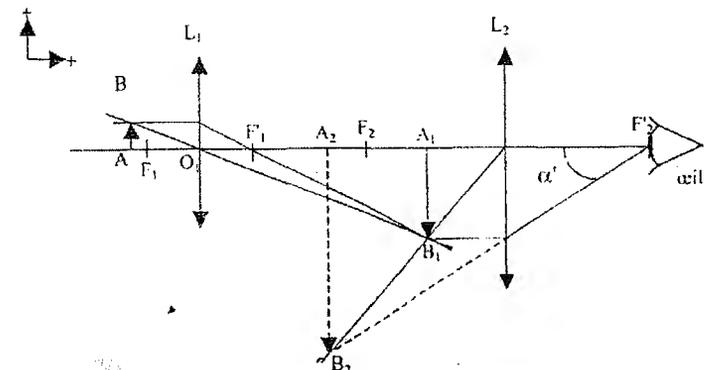
L'oculaire et l'objectif sont maintenus à une distance fixe l'un de l'autre.

► Caractéristiques

L_1 : lentille de l'objectif ; L_2 : lentille de l'oculaire.

La distance $F_1F_2 = \Delta$ est l'intervalle optique.

L'objectif donne de l'objet AB l'image A_1B_1 qui devient objet pour la lentille L_2 .

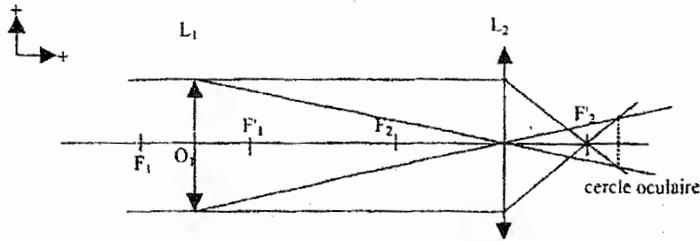


Dans le cas de la vision à l'infini, A_1 est confondu avec F_2 et l'image A_2B_2 se trouve rejetée à l'infini, l'œil n'accomode pas.

La latitude de mise au point est très faible sur un microscope d'où l'utilisation d'une vis micrométrique.

• Cercle oculaire

Le cercle oculaire est l'image de la monture de l'objectif donnée par l'oculaire. C'est à cet endroit qu'il faut placer l'œil pour recevoir le maximum de lumière. Le cercle oculaire est très proche du foyer image de L_2 .



- Puissance :

On retrouve la même définition que pour la loupe : $P = \frac{\alpha'}{AB}$.

Le microscope étant formé de deux lentilles, on peut écrire :

$$P = |\gamma_1| \times P_2$$

γ_1 est le grossissement de l'objectif et P_2 la puissance de l'oculaire.

Le microscope fonctionne en fait comme une loupe dont la puissance est multipliée par un facteur γ_1 .

Dans le cas de la mise au point à l'infini on parle de puissance intrinsèque, d'expression :

$$P_i = \frac{\Delta}{f_1' f_2'}$$

- Grossissement

Même définition que pour la loupe :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = |\gamma_1| G_2$$

G_2 est le grossissement de l'oculaire.

Le grossissement standard est donné par :

$$G = P_i d_m$$

► Pouvoir séparateur

Le pouvoir séparateur caractérise la plus petite distance entre deux points objets que l'œil verra séparés à travers le microscope. Ce pouvoir est limité par les aberrations, par la limite de résolution de l'œil ($\epsilon \approx 5 \cdot 10^{-4}$ rad) et par le phénomène de diffraction du fait de la monture de l'objectif qui diaphragme le faisceau lumineux entrant.

A cause du phénomène de diffraction, l'image d'un point est une tache. Deux taches A et B seront séparées si :

$$AB \geq \frac{0,6\lambda}{n \sin u}$$

u est l'angle sous lequel depuis l'objet on voit la monture de l'objectif, λ est la longueur d'onde de la radiation lumineuse et n l'indice du milieu dans lequel est situé l'objet.

LA LUNETTE ASTRONOMIQUE

► Description

La lunette astronomique est constituée de deux systèmes convergents de même axe optique.

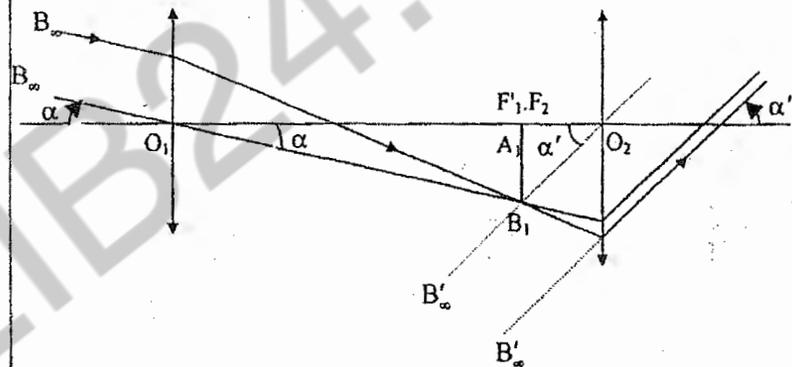
– Un objectif (lentille convergente L_1) de grande distance focale et de grand diamètre ; l'objet observé étant situé à l'infini l'image se forme dans le plan focal image.

– Un oculaire (lentille convergente L_2) qui joue le rôle de loupe ; l'objet étant au foyer objet l'image finale est rejetée à l'infini.

Le système ainsi constitué est afocal si les foyers F_1 et F_2 sont confondus.

► Construction de l'image

La lunette est afocale.



L'image finale est renversée par rapport à l'objet.

L'image intermédiaire A_1B_1 a pour taille :

$$A_1B_1 = f_1' \alpha$$

α est le diamètre apparent de l'objet.

► Caractéristiques

- Cercle oculaire

On retrouve la même définition que pour le microscope, c'est à cet endroit qu'il faut placer l'œil pour recevoir le maximum de lumière.

- Grossissement

On ne parle pas de puissance pour une lunette astronomique car comme l'objet est toujours à l'infini, on ne s'intéresse qu'à son diamètre apparent.

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_1'}{f_2'} \quad \text{ou} \quad G = -\frac{f_1'}{f_2'} \quad (\text{grossissement algébrique})$$

- Pouvoir séparateur

On montre que la limite de séparation de deux astres est donnée par :

$$\epsilon \approx \frac{1}{R}$$

Avec ϵ la distance angulaire minimale (en min d'arc) entre deux étoiles vues séparées et R (en mm) le rayon de l'objectif.

▶ **La lunette de Galilée** (Lunettes terrestres)

La lentille convergente de l'oculaire de la lunette astronomique est remplacée par une lentille divergente. L'image finale est virtuelle, agrandie et de même sens que l'objet initial. Le cercle oculaire est virtuel, on place donc l'œil le plus près possible de l'oculaire.

▶ **Le télescope**

L'objectif n'est plus une lentille mais un miroir concave sphérique. Comme il est plus aisé de construire des miroirs de grand diamètre que des lentilles, les télescopes seront plus lumineux.

On distingue les télescopes de type "Cassegrain" (un miroir concave et un miroir convexe), de type "Newton" (un miroir concave, un miroir plan et un oculaire).

▲ Énoncés des exercices ▲

■ Exercice 1

La lunette astronomique, constituée de deux systèmes optiques, donne d'un objet très éloigné une image renversée. Ce moyen d'observation est jugé mal adapté quand l'utilisation couvre le domaine terrestre.

Il existe des instruments d'optique capables de donner une image finale utilisable :

- la longue-vue ;
- la lunette de Galilée ;
- la lunette à prisme (jumelles).

Notre lunette est constituée de trois lentilles minces convergentes L_1 , L_2 et L_3 .

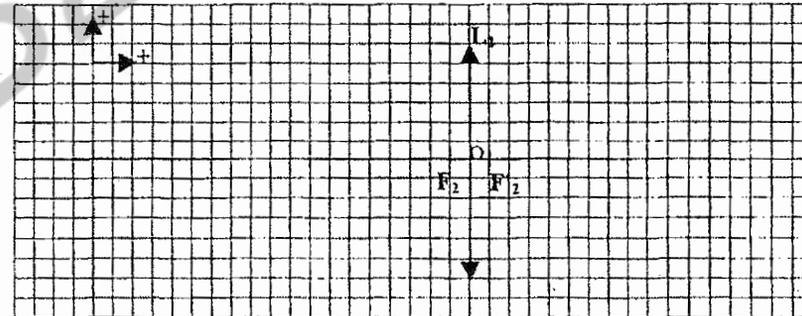
- L'objectif L_1 a une distance focale image f_1' .
- La lentille intermédiaire L_2 a une distance focale image $f_2' = 2,0$ cm.
- L'oculaire L_3 a une distance focale image $f_3' = 2,0$ cm.
- Les trois lentilles ont même axe optique.

1. Dans un premier temps nous nous intéressons à la lentille L_2 . Un objet réel ($A_1'B_1'$) de hauteur 3,0 cm et renversé par rapport au repère indiqué sur le schéma annexé, est situé à 4,0 cm en avant de la lentille.

- a) Calculer la position de l'image $A_2'B_2'$ de l'objet $A_1'B_1'$.
- b) Vérifier par construction graphique, à l'échelle 1/2, la position de l'image $A_2'B_2'$ sur le document réponse.

- c) Calculer le grandissement de cette lentille.
 - d) Quelle est la nature de l'image ? Justifiez votre réponse.
2. On place l'oculaire L_3 tel que son foyer objet coïncide avec A_2' .
- a) Tracer sur le document-réponse annexé la marche de deux rayons issus de B_2' et passant respectivement par le centre optique et le foyer image de cette lentille.
 - b) Où est située B_3' l'image de B_2' donnée par la lentille L_3 ?
 - c) Quelle est la nature de cette image ?
3. L'objet $A_1'B_1'$ est, en fait, l'image donnée par l'objectif L_1 d'un objet réel AB placé à l'infini. L'objectif est placé à 24,0 cm de L_2 .
- a) Quelle est la distance focale de la lentille L_1 ?
 - b) Terminer le schéma sur le document-réponse en plaçant L_1 , et compléter la marche des rayons lumineux.
 - c) Au vu de la réponse donnée à la question 1.3. quel est le rôle de la lentille L_2 dans ce dispositif ?
 - d) Quelle est la différence entre une lunette terrestre et une lunette astronomique ?

Document-réponse



■ Exercice 2

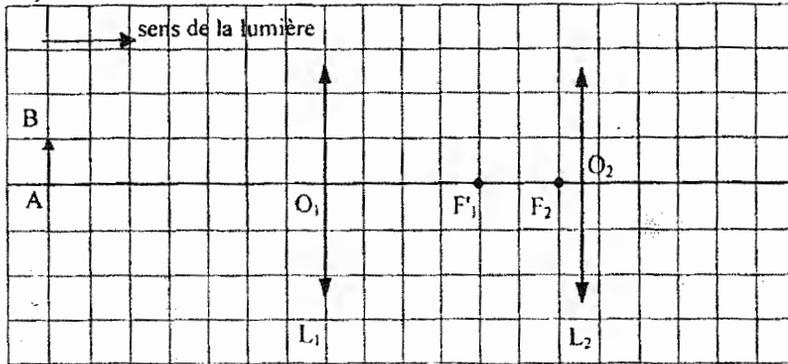
Lors d'une séance de travaux pratiques, un élève réalise sur banc optique la maquette d'un instrument à deux lentilles convergentes. Ensuite il schématise son travail sur la figure 1. Aucun schéma n'est demandé pour la question 4.

$\overline{AO_1} = 140$ cm, $\overline{O_1F_1'} = 80$ cm, $\overline{O_2F_2} = -10$ cm, $\overline{O_1O_2} = 130$ cm, $\overline{AB} = 20$ cm.

Première partie

1. Construire sur la figure 1 : A_1B_1 , image de AB à travers L_1 , puis $A'B'$ l'image de A_1B_1 à travers L_2 .
2. Calculer $\overline{O_1A_1}$ puis $\overline{O_2A'}$.
3. Calculer le grandissement γ de l'appareil optique réalisé.
4. Qu'appellera-t-on :
 - a) objectif ?
 - b) oculaire ?

c) cercle oculaire ?



Deuxième partie

L'objectif du TP est de réaliser la maquette d'une lunette astronomique avec les lentilles L_1 et L_2 .

Rappel : une lunette astronomique est utilisée pour observer des objets lumineux lointains (à l'infini). L'image finale donnée par L_2 est rejetée à l'infini et elle est plus grosse que l'objet.

1. Placer sur la figure 2 la lentille L_2 au bon endroit.
2. On suppose que la maquette ainsi réalisée est la reproduction sur banc optique d'une véritable lunette astronomique. On utilise cette maquette pour observer un point lumineux qui émet en direction de la lunette. Soit α l'angle formé par le rayon provenant de l'infini et l'axe optique de l'appareil.

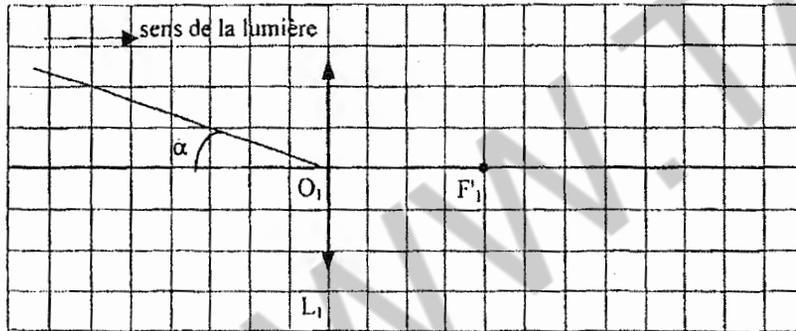


Figure 2

- a) Construire sur la figure 2 la marche du rayon lumineux.
- b) Où se trouve l'image virtuelle de l'astre observé ?
La situer par rapport à L_2 .
- c) Soit α' l'angle formé par le rayon émergent et l'axe optique. Calculer le grossissement de la lunette.

Remarque : dans une lunette astronomique, α et α' sont petits. On peut donc faire les approximations : $\tan \alpha = \alpha$ et $\tan \alpha' = \alpha'$

- d) L'observateur n'a pas de défaut de vision. Où doit-il placer son œil pour observer l'image précédente ? Doit-il accommoder ?

■ **Exercice 3**

Soit α , l'angle sous lequel un observateur voit, à l'œil nu, un objet réel AB orthogonal à l'axe et situé à l'infini. α est appelé diamètre apparent, ou diamètre angulaire, de l'objet AB. Le point A appartient à l'axe.

Afin de mieux observer cet objet, on souhaite fabriquer une lunette afocale, à l'aide de deux lentilles minces convergentes, utilisées dans les conditions de Gauss.

α' est le diamètre apparent, ou diamètre angulaire, de l'image finale A'B' donnée par la lunette. Le grossissement G de l'appareil est défini par $G = \alpha'/\alpha$.

A. Principe de la lunette

1. Qu'est-ce qu'un système optique afocal ?
2. Soit e , la distance qui sépare les deux lentilles de même axe optique. Exprimer, en fonction de leurs distances focales images respectives f'_1 et f'_2 , la distance e .
3. Faire un schéma et tracer la marche d'un faisceau de rayons issus de B, point à l'infini n'appartenant pas à l'axe.
4. Exprimer, en fonction de f'_1 et f'_2 , le grossissement G.
5. L'image A'B' est-elle renversée par rapport à l'objet AB ?

B. Construction de la lunette

On dispose de deux lentilles, de même diamètre, marquées: $+20 \delta$ et $+1 \delta$.

1. Que signifie l'inscription " $+20 \delta$ " ?
2. Quelle est, de ces deux lentilles, celle qui sera choisie pour jouer le rôle d'objectif ? Justifier le choix.
3. Calculer le grossissement G.

■ **Exercice 4**

Les lentilles sphériques minces, notées L_i , sont utilisées dans le cadre de l'approximation de Gauss. Chaque lentille L_i est caractérisée par son centre optique O_i et par sa distance focale image f'_i . Les foyers objet et image sont notés respectivement F_i et F'_i .

I - Etude d'une lentille mince convergente L_1

1. On considère une lentille mince convergente L_1 et un rayon émergent \mathcal{R}' non parallèle à l'axe. Recopier, approximativement, la figure 1 et proposer une construction géométrique du rayon incident \mathcal{R} correspondant.

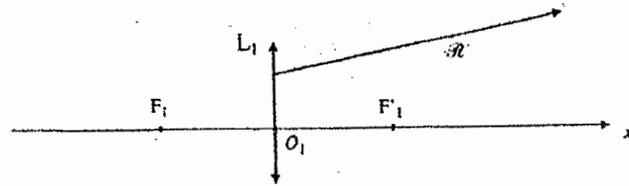


Figure 1

2. On souhaite déterminer, expérimentalement, la distance focale image f_1 de la lentille L_1 . Pour cela, on effectue le relevé, sur un banc optique gradué, des positions sur l'axe, du centre optique O_1 , du point objet lumineux A et de son image A'. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

AO_1 (cm)	24,0	26,0	28,0	30,0	32,0	34,0	36,0	38,0
O_1A' (cm)	120	86,7	70,2	60,2	53,1	48,6	45,2	42,2

- Exploiter les résultats du tableau pour vérifier la formule de Descartes.
- En déduire la valeur numérique de la distance focale image f_1 .

II - Etude d'une lentille mince divergente

1. On considère une lentille mince divergente L_2 et un rayon incident \mathcal{R} non parallèle à l'axe. Recopier, approximativement, la figure 2 et proposer une construction géométrique du rayon émergent \mathcal{R} correspondant.

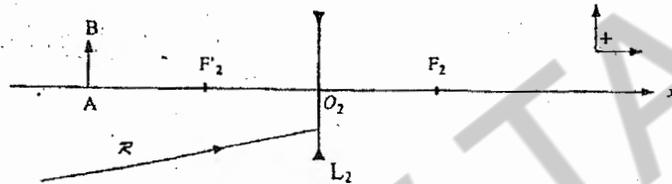


Figure 2

2. On choisit un point A sur l'axe optique et un objet réel AB orthogonal à l'axe, tels que $AF_2 > 0$ (figure 2).

- Recopier, approximativement, la figure 2 et proposer une construction géométrique de l'image A'B' correspondante.
 - Quelle est la nature de l'image A'B' ?
3. Application numérique $f_2 = -5,0$ cm ; $AO_2 = 7,5$ cm.
- Calculer $A'O_2$.
 - Calculer la valeur du grandissement linéaire γ .

III - Associations des deux lentilles

1. Grâce à la lentille précédente L_1 , on projette, sur un écran E plan et orthogonal à l'axe, l'image nette A'B' d'un objet réel quelconque AB, dont la position n'est pas précisée.

On souhaite alors agrandir l'image A'B'. On maintient l'objet AB et la lentille L_1 fixes dans leur position d'origine, mais on interpose, entre L_1 et E, la lentille divergente précédente L_2 . Pour obtenir une image nette 2 fois plus grande, il est nécessaire de reculer l'écran E d'une distance ℓ .

- Proposer un tracé de rayons qui illustre le rôle de la lentille L_2 .
 - Exprimer la distance ℓ en fonction de f_2 .
 - Application numérique $f_2 = -5,0$ cm. Calculer ℓ .
2. Soit α , l'angle sous lequel un observateur voit, à l'œil nu, un objet réel AB orthogonal à l'axe et situé à l'infini (α est appelé diamètre apparent de l'objet AB). Le point A appartient à l'axe. Afin de mieux observer cet objet, on utilise une lunette constituée des deux lentilles L_1 (objectif convergent) et L_2 (oculaire divergent). La distance e séparant les deux lentilles est réglée pour qu'un œil normal n'ait pas à accommoder lorsqu'il observe, à travers la lunette, l'image d'un objet situé à l'infini.
- Exprimer $e = O_1O_2$ en fonction des valeurs algébriques f_1 et f_2 .
 - Faire un schéma et tracer la marche d'un faisceau de rayons issus de B, point à l'infini n'appartenant pas à l'axe.
 - Soit α' , le diamètre apparent de l'image finale A'B'. Exprimer, en fonction des valeurs algébriques f_1 et f_2 , le grossissement défini par $G = \alpha'/\alpha$.
 - Application numérique $f_1 = 20$ cm ; $f_2 = -5,0$ cm. Calculer le grossissement G.
 - L'image A'B' est-elle renversée par rapport à l'objet AB ?

D'après Ensi - Deug 2002

■ Exercice 5 : la lunette astronomique

La lunette astronomique est un système centré qui se compose :

- d'un objectif de distance focale f_1 , assimilé à une lentille mince de centre optique O_1 , de diamètre D ;
- d'un oculaire, système convergent que nous assimilerons également à une lentille mince de centre optique O_2 , de distance focale f_2 et de diamètre d.

On prendra $f_1 = 1,0$ m ; D = 10 cm ; $f_2 = 50$ mm et d = 16 mm.

L'objectif donne d'un objet éloigné une image réelle, l'image objective, qui est observée au moyen de l'oculaire.

- L'objet observé est situé à l'infini. Son diamètre apparent est égal à θ , angle sous lequel il est vu en l'absence de lunette. Pour que l'œil de l'observateur n'accorde pas, l'image donnée par la lunette doit être située à l'infini.

Indiquer la position et la taille de l'image objective ainsi que les positions relatives du foyer image F_1 de l'objectif et du foyer objet F_2 de l'oculaire. Comment désigne-t-on un tel système optique ?

Calculer le diamètre apparent de l'image finale donnée par la lunette.

2. Définir le grossissement de la lunette et calculer sa valeur.
3. On considère un point objet à l'infini sur l'axe optique de la lunette. Calculer les valeurs des angles respectifs sous lesquels sont vus la monture de l'objectif et celle de l'oculaire depuis l'image objective du point considéré précédemment.
 - En déduire que le "diaphragme d'ouverture", ouverture qui limite le faisceau de rayons utilisés pour la formation de l'image, est constitué par la monture de l'objectif.
 - On considère maintenant deux objets ponctuels situés à l'infini, l'un sur l'axe optique, l'autre en dehors de l'axe optique.
4. Dessiner soigneusement les rayons limites des faisceaux sortant de la lunette et issus de chacun des points précédents.
5. En déduire :
 - que le diaphragme de champ de la lunette est constitué par la monture de l'oculaire ;
 - que tous les rayons lumineux sortant de la lunette traversent un disque, le cercle oculaire, dont le centre qui se trouve sur l'axe optique, est noté C' .
 Donner la relation qui existe entre le cercle oculaire et le diaphragme d'ouverture.
6. Déterminer la position de C' par rapport à O_2 et calculer le diamètre du cercle oculaire.
 - Où doit-on placer la pupille de l'œil quand on utilise la lunette ; pourquoi ?

■ Exercice 6 : étude d'un endoscope

Cet appareil est destiné à l'observation d'objets situés à l'intérieur de longs conduits.

La lumière y est guidée, de la source à l'objet, puis de l'objet à l'observateur, par une fibre optique.

L'observateur étudie l'image de l'objet donnée par la succession d'un objectif, $2p$ lentilles identiques, et un oculaire de même axe Oz . (figure 1)

Ces systèmes optiques, assimilables à des lentilles minces, baignent dans le cœur de la fibre.

1. L'objectif, de distance focale f_0 , fournit de l'objet réel AB , à observer, une image réelle A_0B_0 .
Construire A_0B_0 et déterminer le signe du grossissement linéaire transversal γ_0 correspondant.

2. L'image A_0B_0 , ainsi obtenue se trouve encore très éloignée de l'oculaire. Il est donc nécessaire d'interposer un système optique de "relais", donnant de A_0B_0 une image proche de l'oculaire.

On dispose donc à la suite de l'objectif une série de $2p$ lentilles identiques, de distance focale f' , de façon que le foyer principal image de l'une coïncide avec le foyer principal objet de la suivante.

Le foyer principal objet de la première lentille est placé en A_0 .

- a) Construire l'image A_1B_1 de A_0B_0 donnée par l'ensemble des deux premières lentilles.
- b) Déterminer, en fonction de p et de f' , l'allongement ℓ souhaité (ℓ distance entre A_0 et l'image donnée par les $2p$ lentilles).

Application numérique : $2p = 30$, $f' = 2$ cm calculer ℓ .

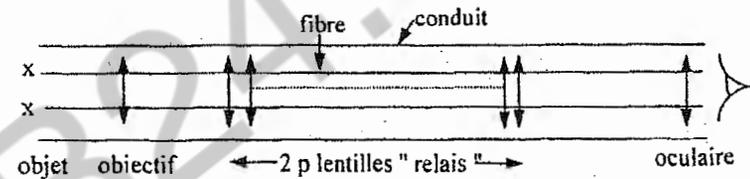


Figure 1

- c) Un rayon incident quelconque passant par B_0 fait un angle θ_0 avec l'axe principal (angle algébrique défini figure 2). Déterminer, en fonction de θ_0 , l'angle θ_1 que fait, avec l'axe, ce rayon en émergeant de la seconde lentille. Déterminer θ_p à l'émergence des $2p$ lentilles

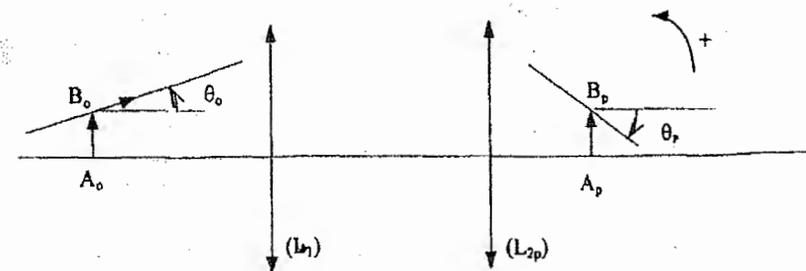


Figure 2

Quels avantages cette relation présente-t-elle ?

3. La dernière image A_pB_p sert d'objet réel pour un oculaire de distance focale f_{oc} , qui en donne une image virtuelle visible à l'œil, $A'B'$.
 - a) Quelle doit être la position de l'oculaire par rapport à A_pB_p pour que cette condition soit vérifiée ?
 - b) Quelle condition p doit-il vérifier pour que l'image définitive $A'B'$ soit de même sens que l'objet AB ?

■ Exercice 7 : Lunettes de Galilée et astronomique

I. Lunette de Galilée

En 1610, Galilée témoigne de ses travaux concernant la lunette qui portera bientôt son nom :

"... Je me suis mis à penser aux moyens de fabriquer l'instrument. J'y parvins si parfaitement que j'en construisis un, formé d'un tube de fer, extérieurement recouvert d'un drap cramoisi et long d'environ trois quarts de coudée*, il comprenait deux lentilles de la grandeur d'un écu à chaque extrémité, l'une plan concave contre laquelle on plaçait l'œil, l'autre plan convexe..."

* La coudée est une unité de mesure correspondant à 50 cm.

Lettre de Galilée à B.Landucci.

"... Quel spectacle magnifique et passionnant que de voir le corps lunaire, éloigné de nous de presque soixante rayons terrestres, rapproché au point de nous sembler éloigné seulement de deux rayons : son diamètre nous apparaît ainsi trente fois plus grand... qu'à l'œil nu..."

adapté de Sidereus Nuncius, le messager des étoiles ; (Galilée).

1. Quelle est la nature des lentilles utilisées par Galilée ?
2. La lunette est réglée de façon à donner d'une étoile, (objet à l'infini), une image à l'infini ce qui permet à l'observateur d'éviter toute fatigue puisqu'il voit sans accommodation. Dans ces conditions la lunette est dite "afocale".
 - a) Préciser et justifier la position des foyers dans une lunette "afocale".
 - b) Réaliser un schéma, sans respecter les échelles, montrant le devenir d'un rayon incident faisant un angle α avec l'axe optique et émergeant sous un angle α' dans les conditions de Gauss.
 - c) Déterminer l'expression du grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ de la lunette en fonction de f_1' distance focale de l'objectif, et f_2' distance focale de l'oculaire.
 - d) Montrer, en utilisant le texte de Galilée, que le grossissement de sa lunette est à peu près égal à 30 ; en déduire les valeurs approximatives des distances focales et des vergences de chacune des lentilles utilisées.
3. Du haut du Campanile de Venise les sénateurs vénitiens invités par Galilée, observent avec cette lunette en direction de Murano, distante de deux kilomètres et demi. Ils distinguent avec enthousiasme le mouvement des gens !
 - a) Sous quel angle les personnes de 1,70 m sont-elles observées à travers l'instrument ?
 - b) A quelle distance les sénateurs ont-ils, dans ces conditions, l'impression de voir les habitants de Murano, si l'on se réfère aux textes de Galilée reportés ci-dessus ?

II. La lunette astronomique

Extrait d'un catalogue de matériel de physique présentant les caractéristiques d'une lunette astronomique :

" 6 grossissements G possibles : 40, 64, 80, 128, 133, 266.

Longueur du tube oculaire : 82 cm.

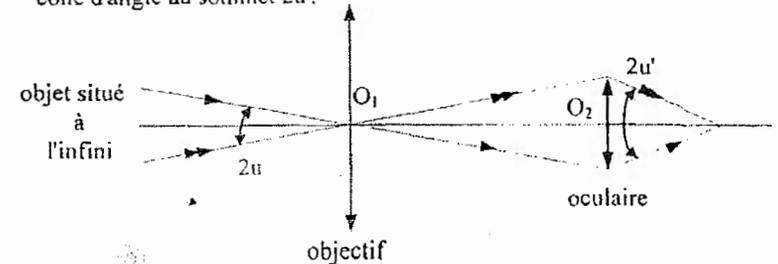
Objectif diamètre $D = 60$ mm achromatique traité. Distance focale 800 mm. Chercheur réticulé de grossissement 5 fois ; diamètre de son objectif = 24 mm.

La lunette possède une monture azimutale à deux déplacements dans le sens vertical et le sens horizontal. Mise au point par crémaillère.

Livré avec trois oculaires convergents de distance focale : 20,0 ; 12,5 et 6,0 mm et d'une lentille de Barlow (doublant les grossissements de chaque oculaire) "

Un astronome amateur observe, avec cette lunette, la planète Mars dont le diamètre est de 6 800 km environ. Pendant une observation, on admet que la distance Terre-Mars est quasiment constante, et égale à $7,0 \cdot 10^7$ km. Il existe de nombreux cratères sur Mars dont le plus grand, le bassin d'Hellas, possède un diamètre de 1 600 km.

1. Sans respecter les échelles, schématiser les positions des lentilles de la lunette lorsque celle-ci est réglée sur l'infini. Représenter le devenir d'un faisceau lumineux issu d'un point situé à l'infini sur l'axe optique.
2. Déterminer, pour cette lunette astronomique, l'expression du grossissement défini par le catalogue, $G = \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right|$, en fonction de la distance focale f_1' de l'objectif et de la distance focale f_2' de l'oculaire.
3. On se propose d'étudier le champ de cette lunette astronomique. Dans l'espace objet, le "champ objet" comprend toutes les directions de l'espace comprises à l'intérieur d'un cône de révolution autour de l'axe optique. On le définit par l'angle au sommet $2u$ de ce cône. De la même façon, les rayons émergents de l'instrument sont situés à l'intérieur d'un cône d'angle au sommet $2u'$.



- a) Dans le cas de la lunette astronomique étudiée, l'astronome amateur voit l'image sous un angle maximal $2u'$ estimé à 30° . Calculer l'angle $2u$ correspondant au champ de l'objet de la lunette pour un grossissement de 40, puis de 266.
- b) Expliquer la présence du chercheur réticulé qui est associé à toute lunette de fort grossissement.
- c) Voit-on la planète Mars en entier avec le plus fort grossissement ? Qu'en serait-il si l'amateur regardait la Lune ? Justifier les réponses.

On considère que la distance Terre-Lune est égale à 380 000 km et le diamètre de la Lune est égal à 3 400 km.

4. Une lunette astronomique permet d'observer des astres qui ne sont guère lumineux. Pour recueillir le maximum de lumière on utilise des objectifs de grand diamètre.

Tous les rayons incidents qui pénètrent dans l'objectif de la lunette donnent des rayons émergents qui, à la sortie de l'instrument, passent à l'intérieur d'un cercle appelé cercle oculaire.

a) Etablir la relation qui lie le diamètre d du cercle oculaire, le diamètre D de l'objectif et le grossissement G .

b) L'amateur utilise la lunette avec le grossissement 133.

Quel est l'oculaire associé à cet objectif ?

... Déterminer, dans ces conditions, le diamètre et la position du cercle oculaire.

Où faut-il placer l'œil pour avoir une observation optimale ?

5. On admet que le pouvoir de résolution de l'objectif est donné par la relation :

$$\beta = 1,22 \frac{\lambda}{D}; \text{ on prendra } \lambda = 550 \text{ nm.}$$

a) Quel est le phénomène qui limite le pouvoir de résolution de l'objectif ?

b) Quelle est la distance linéaire minimale de deux points A et B sur Mars que l'observateur peut distinguer dans ces conditions ?

c) Peut-on, en conclusion, discerner certains détails du bassin d'Hellas ?

D'après capes 1997

■ ■ ■ Exercice 8

Dans tout le problème on étudiera la propagation des rayons lumineux dans un plan de symétrie du dispositif et dans les conditions de Gauss (en particulier, les rayons lumineux forment avec l'axe optique du système un angle petit). La lumière est monochromatique : $\lambda = 0,60 \mu\text{m}$ dans l'air.

I- Optique géométrique.

L'objectif d'un télescope est constitué (figure 1) d'un miroir M_1 sphérique concave de sommet S_1 , d'axe S_1x , de foyer F_1 , de rayon R_1 et de centre de courbure C_1 . Dans les conditions de Gauss, la surface du miroir sera assimilée à son plan tangent en S_1 .

1. Quelle relation y a-t-il entre R_1 et F_1S_1 ? On pourra la retrouver en utilisant les formules de conjugaison pour un couple de points particuliers ou directement en utilisant l'approximation de Gauss.

2. Soit AB un petit objet frontal (A sur l'axe S_1x) et A'B' son image donnée par M_1 .

Déterminer B', image de B, en traçant les trajets de trois rayons lumineux issus de B et situés dans le plan xS_1y :

*un rayon parallèle à l'axe optique,

- *un rayon passant par le centre de courbure C_1 ,
- *un rayon frappant le sommet S_1 du miroir.

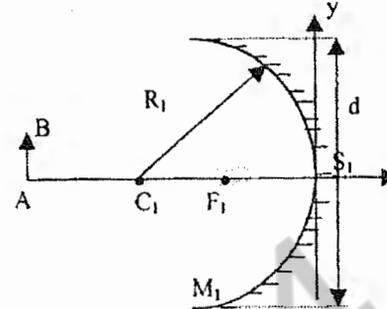


Figure 1

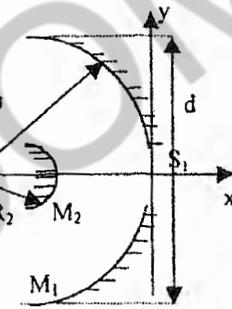


Figure 2

3. Donner le grandissement transversal $G_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ en fonction des rapports

algébriques $\frac{\overline{S_1A'}}{\overline{S_1A}}$ et $\frac{\overline{C_1A'}}{\overline{C_1A}}$.

4. Retrouver les formules de conjugaison avec l'origine au sommet S_1 , puis au centre de courbure C_1 .

5. On dirige l'axe du miroir M_1 vers le centre de la Lune; donner la position et la grandeur de l'image de la Lune.

Application numérique : rayon de courbure $R_1 = 5\text{m}$ et diamètre angulaire de la Lune vue de la Terre, $\varepsilon = 30'$.

II. Association

On associe à M_1 un miroir M_2 sphérique convexe (figure 2), de sommet S_2 , de foyer F_2 , de même axe optique et de centre de courbure C_2 , C_2 est confondu avec C_1 et le rayon R_2 est tel que $R_2 = kR_1$ ($0 < k < 1$). Les faces réfléchissantes des deux miroirs sont en regard et M_2 est petit par rapport à M_1 , de sorte que la plus grande partie de la lumière provenant d'un objet céleste est reçue par M_1 (M_2 faisant peu écran). Une ouverture percée dans M_1 , centrée sur l'axe optique, permet à la lumière de se propager au-delà de M_1 et ainsi d'observer ou d'enregistrer l'image donnée par ce dispositif.

1. Indiquer à l'aide de schémas à quelle condition (position du plan objet sur l'axe optique) un miroir convexe comme M_2 donne d'un objet frontal A'B' une image réelle A''B''. L'image est-elle droite ou renversée ? plus grande ou plus petite que l'objet ?

2. Donner la position et le grandissement de l'image A''B'', obtenue par l'association de M_1 et M_2 , d'un objet frontal AB; on prendra comme origine le centre de courbure commun (C_1 confondu avec C_2).

3. Montrer que ce système est équivalent à une lentille mince dont on donnera le centre optique C et la distance focale f' en fonction de R_1 et k . Comment varie f' avec k ? Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

- On observe les astres à l'aide de ce dispositif. On veut obtenir une image réelle : quelles doivent être les positions de S_2 et F_2 par rapport à F_1 ? On veut de plus que l'image soit en S_1 : quelle est la propriété du point S_1 et quelle est la valeur de k nécessaire ?
- Application numérique : le télescope du Mont Palomar a une distance focale $f' = 80$ m, quelle est la grandeur de l'image de la Lune donnée par ce télescope ?

..... ■ **CONTROLE 1 (45 min ; 20 pts)** ■

Une lentille mince, L , d'axe $z'z$ orienté positivement vers la droite (sens de propagation de la lumière), de centre O et placée dans l'air, donne d'un petit objet AC perpendiculaire en A à $z'z$ (fig.1) une image $A'C'$ perpendiculaire en A' à $z'z$.

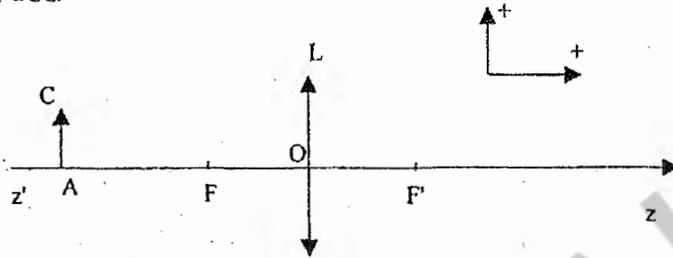


Figure 1

F et F' sont les foyers objet et image respectivement ; $f = \overline{OF}$ et $f' = \overline{OF'}$ sont les distances focales objet et image respectivement.

On suppose L convergente et $\overline{FA} < 0$: l'image $A'C'$ est alors réelle.

1. Construire l'image $A'C'$ de AC en utilisant les propriétés des foyers.

2. En déduire :

- Deux formules donnant le grandissement $\gamma = \overline{A'C'}/\overline{AC}$ (les conventions de signe sont précisées sur la figure 1), l'une en fonction de f et de \overline{FA} , l'autre en fonction de f et de $\overline{F'A'}$;
- La relation dite de Newton entre f , f' , \overline{FA} , $\overline{F'A'}$.

Le microscope photonique est un système centré, de révolution autour d'un axe $z'z$; il est constitué d'un objectif et d'un oculaire assimilés à deux lentilles minces convergentes, L_1 et L_2 , placées dans l'air, de centres O_1 et O_2 et de distances focales f_1 , f_1' et f_2 , f_2' respectivement.

On pose $\Delta = \overline{F_1'F_2}$, grandeur positive.

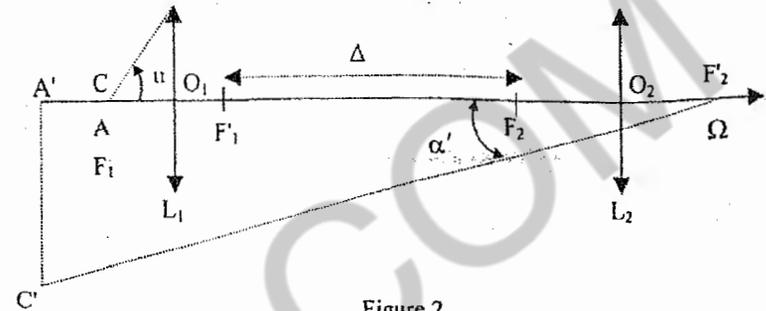


Figure 2

L'objectif L_1 donne d'un très petit objet AC , perpendiculaire en A à $z'z$ une image réelle A_1C_1 dont l'oculaire L_2 donne une image virtuelle $A'C'$ qu'un observateur regarde, son œil étant en Ω , au voisinage de F_2' (fig.2).

On posera $\overline{A'\Omega} = d$ et l'on fera les approximations résultant des relations :

$$f_1' \ll f_2' \ll \Delta < d$$

Les applications numériques seront calculées avec :

$$f_1' = -f_1 = 2 \text{ mm}$$

$$f_2' = -f_2 = 30 \text{ mm}$$

$$\Delta = 180 \text{ mm} ; d = 250 \text{ mm}.$$

- On appelle cercle oculaire, l'image L_1' de l'objectif L_1 , donnée par l'oculaire L_2 . Le centre de L_1' coïncide avec le point Ω où se trouve l'œil.
 - Déterminer $\overline{F_2'\Omega}$ en fonction de f_2, f_2', Δ , puis en déduire la valeur numérique.
 - En déduire le diamètre a de L_1' en fonction de f_2', Δ et du diamètre D de L_1 . Calculer a , sachant que $D = 11$ mm.
- Déterminer $\overline{F_2'A_1'}$ en fonction de f_2, f_2', d , puis en déduire sa valeur numérique.
 - En déduire le grandissement γ du microscope en fonction de f_1, f_2, Δ, d , puis sa valeur numérique.
- Exprimer l'angle $\alpha' = \widehat{A'\Omega C'}$, sous lequel l'observateur voit $A'C'$, en fonction de AC, d, γ , puis en fonction de f_1', f_2', Δ, AC . On notera que α' est très petit (les proportions ne sont pas respectées sur la figure 2).
 - Du fait de la structure granulaire de la rétine, l'œil ne peut distinguer deux points que si l'angle sous lequel il les voit est au moins égal à ϵ . En déduire, en fonction de $\epsilon, f_1', f_2', \Delta$, la dimension h du plus petit objet dont les points A et C seront vus distincts à travers le microscope.
- En fait, si n est l'indice du milieu objet et u l'angle d'ouverture de l'objectif (fig.2), on démontre, en optique géométrique, la relation :

$$2nAC\sin u = a\alpha'$$

Le diamètre a du cercle oculaire ayant la valeur trouvée au 3.b, calculer h sachant que $\varepsilon = 3 \times 10^{-4}$ rad; $n=1$ et $u = 70^\circ$.

..... ■ **CONTROLE 2 (45 min ; 20 pts)** ■

La détermination de l'écart angulaire à l'œil nu est tributaire de la limite de résolution de l'œil : environ $\alpha_{\min} = 3 \cdot 10^{-4}$ rad. Pour mettre en évidence et mesurer l'écart angulaire entre les composantes d'une étoile double et la parallaxe, on doit utiliser des instruments grossissants.

I. Principe d'une lunette astronomique

La lunette de Newton est formée d'une lentille convergente L_1 de distance focale f_1' (objectif) et d'un oculaire schématisé par une lentille convergente L_2 de distance focale f_2' petite devant f_1' . On veut obtenir de l'étoile (objet à l'infini) une image grossie et rejetée à l'infini, ceci pour éviter une trop grande fatigue de l'œil.

1. Indiquer quelle doit être la position de la lentille L_2 par rapport à L_1 .
2. Représenter le trajet d'un rayon à travers le système, le rayon incident étant incliné d'un angle α par rapport à l'axe.
3. Calculer le grossissement angulaire (rapport des diamètres apparents de l'image définitive et de l'objet).
Application numérique : $f_1' = 30 \cdot f_2'$; quel est le plus petit écart angulaire ε décelable ?
4. La limite de résolution théorique est liée au phénomène de diffraction par l'objectif de diamètre D fini :

$$\varepsilon_{\text{th}} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Quelle doit être la valeur minimale du diamètre de la lunette pour que l'écart ε soit effectivement observable ? (on prendra $\lambda = 500$ nm).

II. Notions sur les télescopes

On utilise plutôt actuellement des systèmes catadioptriques, c'est-à-dire formés de lentilles et de miroirs.

1. Citer au moins deux avantages de ces systèmes par rapport aux lunettes astronomiques.
2. Propriétés du miroir sphérique (fig.1).
Soit $\rho = CS$ le rayon de courbure du miroir. Dans les conditions de Gauss le foyer image F' est situé au milieu du segment CS . L'image d'un objet à l'infini se forme dans le plan perpendiculaire à l'axe en F' . Soit un rayon incident passant par le centre C , caractériser le rayon réfléchi correspondant.

3. Modèle simplifié du télescope de Newton

On considère un télescope formé d'un miroir sphérique, d'un miroir plan incliné de 45° sur l'axe optique principal et d'un oculaire, schématisé par une lentille mince convergente L_0 de distance focale f' et de centre optique O . (fig.2)

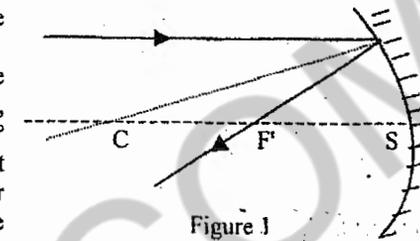


Figure 1

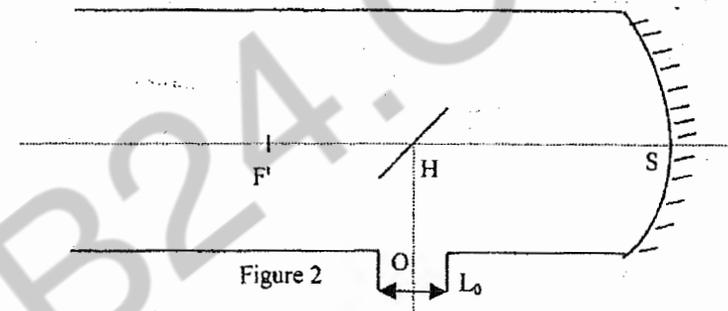


Figure 2

(F' foyer image du miroir sphérique)

- a) Le système étoile double A_1A_2 est vu à l'œil nu sous un écart angulaire ε . En utilisant les propriétés indiquées précédemment, construire l'image $A'_1A'_2$ (centrée sur l'axe du télescope) donnée par le miroir sphérique seul, et déterminer la taille de cette image en fonction de ρ et de ε .
- b) L'oculaire est placé de telle manière que l'image $A''_1A''_2$ donnée par le miroir plan se trouve dans le plan focal objet de la lentille formant l'oculaire ; représenter sur un même schéma, $A'_1A'_2$, $A''_1A''_2$, le miroir plan et la lentille.
- c) ρ a pour valeur 3 m, $F'H = 0,5$ m, $f' = 1,5$ cm. Déterminer la distance HO et le grossissement angulaire du télescope.
4. Le plus grand télescope a un diamètre de 6 m, quelle est sa limite de résolution théorique pour $\lambda = 500$ nm ? La turbulence atmosphérique limite, en fait, le pouvoir de résolution à environ $2 \cdot 10^{-6}$ rad ; quel est cependant l'intérêt d'un télescope de très grand diamètre ?
5. Comment peut-on s'affranchir de la turbulence atmosphérique ?

▼ **Corrigés des exercices** ▼

Corrigé 1.....

1. a) Nous utilisons la relation de conjugaison des lentilles minces

$$\frac{1}{O_2A_2'} - \frac{1}{O_2A_1'} = \frac{1}{f_2'}$$

Avec $\overline{O_2A_1'} = -4$ cm. On obtient : $\overline{O_2A_2'} = 4$ cm.

b) Voir document.

c) Grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A_2'B_2'}}{\overline{A_1'B_1'}} = \frac{\overline{O_2A_2'}}{\overline{O_2A_1'}} = \frac{4}{-4} = -1$$

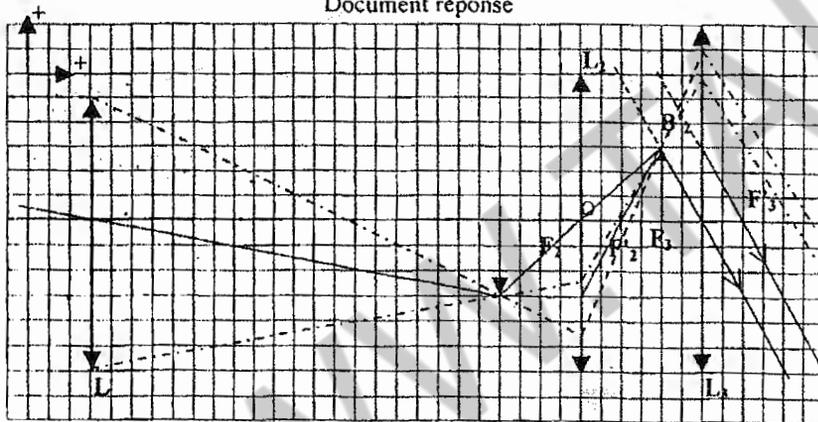
d) L'image est réelle car $\overline{O_2A_2'}$ est positif, et renversée par rapport à l'objet car γ est négatif.

2. a) Document réponse.

b) L'image $A_2'B_2'$ joue le rôle d'objet réel pour la lentille L_3 . Cet objet, situé au foyer objet de L_3 a une image à l'infini.

c) Cette image est virtuelle, droite (L_3 joue le rôle de loupe).

Document réponse



3. a) L'objet étant à l'infini, son image à travers L_1 se formera dans le plan focal image :

$$\begin{aligned} \overline{O_1A_1'} &= f_1' \\ \overline{O_2A_1'} &= -4 \text{ cm} \\ \overline{O_1O_2} &= \overline{O_1A_1'} + \overline{A_1'O_2} = 24 \text{ cm} \\ \overline{O_1A_1'} = f_1' &= \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1'} = 24 - 4 = 20 \text{ cm} \end{aligned}$$

La distance focale de L_1 est de 20 cm.

b) Voir le document.

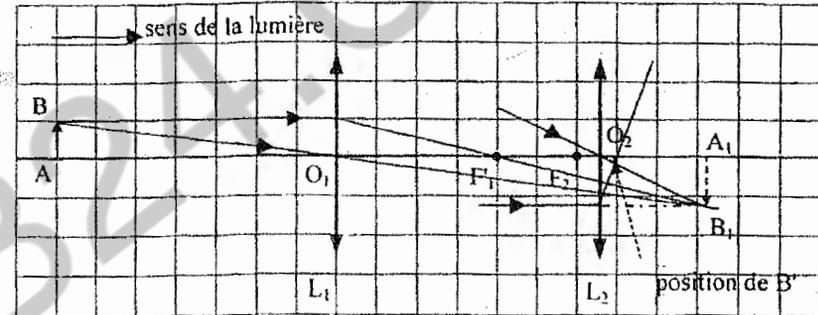
c) Le rôle de L_2 est de redresser l'image $A_1'B_1'$ sans changer sa taille.

d) Une lunette terrestre doit donner une image définitive droite, ce qui n'est pas le cas d'une lunette astronomique (on économise une lentille).

Corrigé 2.....

Première partie

1. La construction des images à travers L_1 et L_2 est faite ci-dessous.



2. A_1 est l'image à travers la lentille L_1 . Pour déterminer sa position par rapport à O_1 , nous pouvons utiliser la relation de conjugaison.

$$\frac{1}{O_1A_1} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{O_1F_1'}$$

Dans cette relation, $\overline{O_1A} = -1,4$ m, $\overline{O_1F_1'} = 0,8$ m. On obtient :

$$\overline{O_1A_1} = 1,87 \text{ m.}$$

A' est l'image de A_1 à travers L_2 . Appliquons une nouvelle fois la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2A_1} = \frac{1}{O_2F_2'}$$

Avec $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -1,3 + 1,87 = 0,57$ m et $\overline{O_2F_2'} = 0,1$ m.

On obtient :

$$\overline{O_2A'} = 0,085 \text{ m}$$

3. Le grandissement de l'appareil optique s'obtient ainsi :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'B'}{A_1B_1} \times \frac{A_1B_1}{AB}$$

Les triangles O_1AB et $O_1A_1B_1$ étant homothétiques, on peut écrire :

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{O_1A_1}{O_1A}$$

De même, pour L_2 : $\frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{O_2A'}{O_2A_1}$. On obtient pour le grandissement :

$$\gamma = \frac{O_1A_1}{O_1A} \times \frac{O_2A'}{O_2A_1}$$

L'application numérique donne :

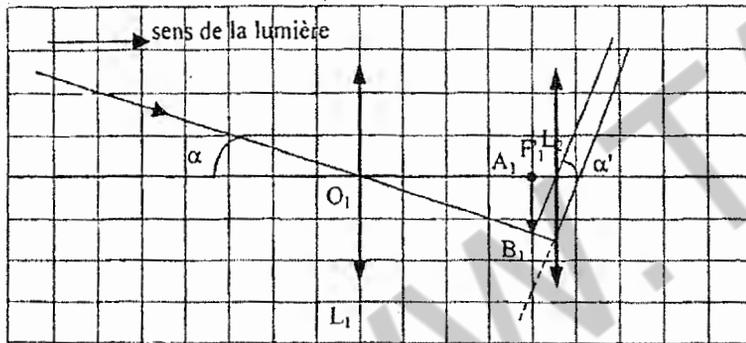
$$\gamma = \frac{1,87}{1,4} \times \frac{0,085}{0,57} \approx 0,2$$

- L'objectif est la lentille L_1 (du côté de l'objet).
- L'oculaire est la lentille L_2 (du côté où l'on place l'œil).
- Le cercle oculaire est l'image de l'objectif à travers l'oculaire. C'est à cet endroit qu'il faut placer l'œil car l'intensité lumineuse y est maximale.

Deuxième partie

1. L'image définitive étant à l'infini, l'image intermédiaire doit être dans le plan focal objet de L_2 . L'image intermédiaire est l'image d'un objet à l'infini à travers L_1 ; elle se forme donc dans le plan focal image de L_1 . Le foyer image de L_1 doit être confondu avec le foyer objet de L_2 .

2. a)



b) L'image virtuelle $A'B'$ de l'astre se trouve à l'infini, en avant des deux lentilles.

c) Sur la figure précédente, on peut écrire :

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{A_1B_1}{O_1F_1'} ; \alpha' \approx \tan \alpha' = \frac{A_1B_1}{O_2F_2}$$

On peut en déduire le grossissement :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\frac{A_1B_1}{O_2F_2}}{\frac{A_1B_1}{O_1F_1'}} = \frac{O_1F_1'}{O_2F_2} \Rightarrow G = \frac{0,8}{0,1} = 8$$

d) L'observateur doit placer l'œil au cercle oculaire, et n'accomode pas car l'image définitive est à l'infini.

Corrigé 3

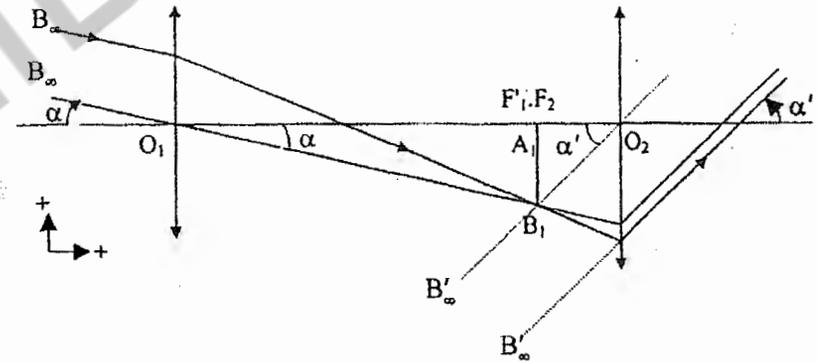
A. Principe de la lunette

1. Un système optique pour lequel un faisceau incident parallèle à l'axe ressort parallèlement à l'axe est afocal (ses deux foyers sont rejetés à l'infini).

2. Pour que le système soit afocal, le foyer image de la première lentille doit être confondu avec le foyer objet de la seconde. On a donc la relation :

$$e = f_1' + f_2'$$

3. Marche d'un faisceau de rayons issus de B (A_1B_1 est l'image intermédiaire de AB, donnée par la première lentille).



4. Le grossissement est défini par : $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$

En utilisant la figure ci-dessus, on peut écrire :

$$\tan \alpha = \frac{A_1B_1}{O_1F_1'} \text{ et } \tan \alpha' = \frac{A_1B_1}{O_2F_2}$$

En se plaçant dans les conditions de Gauss, c'est-à-dire en assimilant les angles et leurs tangentes, nous obtenons :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{O_1F_1'}{O_2F_2} = - \frac{f_1'}{f_2'}$$

5. Le grossissement algébrique étant négatif, l'image A'B' est renversée par rapport à l'objet AB.

B. Construction de la lunette

1. La vergence d'une lentille mince sphérique est définie par :

$$V = -\frac{1}{f} = \frac{1}{f'}$$

La vergence s'exprime en dioptrie (δ). Une lentille de +20 δ est donc une lentille convergente de distance focale image $f' = \frac{1}{V} = \frac{1}{20} = 0,05$ m soit 5 cm.

2. La lentille de +1 δ a une distance focale image de 1 m. Pour obtenir le plus grand grossissement, il faut choisir comme objectif la lentille qui a la plus grande distance focale, soit celle qui a une vergence de +1δ.

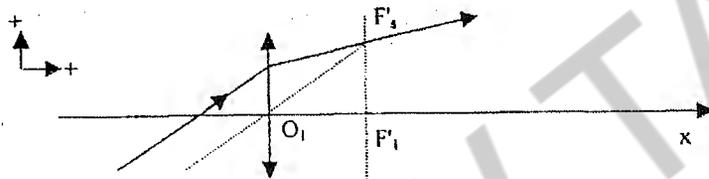
3. Application numérique :

$$G = -\frac{f'_1}{f'_2} = -\frac{V_2}{V_1} = -\frac{20}{1} = -20$$

Corrigé 4.....

I. Etude d'une lentille mince convergente L₁

1. Construction géométrique du rayon incident.



On détermine le foyer image secondaire F'₂. Le rayon passant par F'₁ et O₁ n'est pas dévié. Le rayon incident cherché est parallèle au rayon passant par le centre optique.

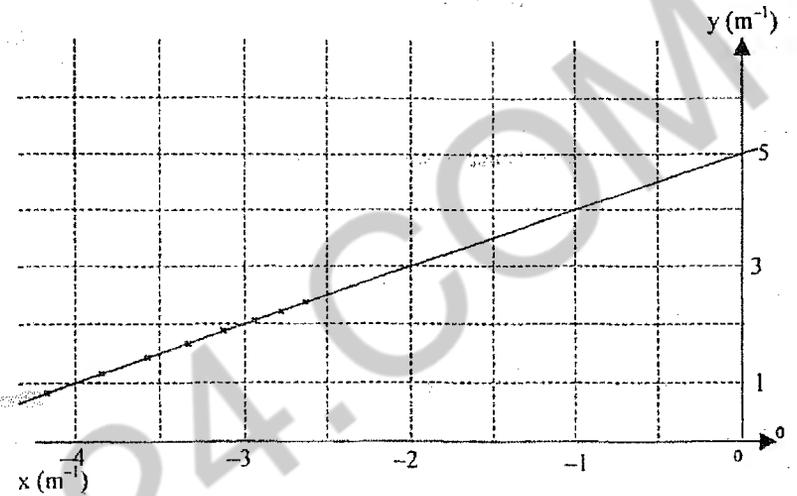
2. a) La formule de conjugaison de Descartes s'écrit ici :

$$\frac{1}{O_1A'} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{f'}$$

En posant $y = \frac{1}{O_1A'}$ et $x = \frac{1}{O_1A}$, la relation précédente s'écrit :

$$y = x + V$$

où V est la vergence cherchée. Les résultats consignés dans le tableau sont placés dans le graphe ci-dessous. Les points se répartissent le long d'une droite, ce qui vérifie la formule de Descartes.

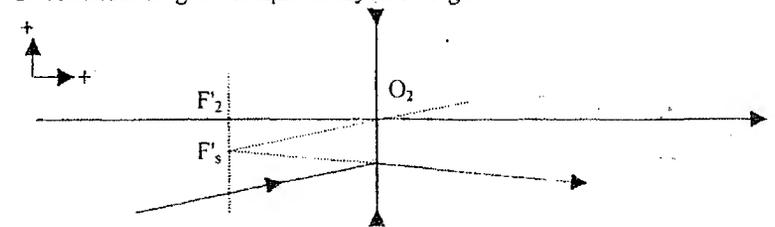


b) L'ordonnée à l'origine (y = 5) nous permet de déterminer la distance focale :

$$f'_1 = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

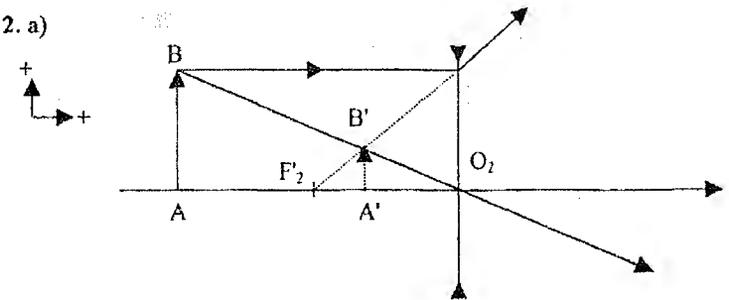
II- Etude d'une lentille mince divergente L₂

1. Construction géométrique du rayon émergent.



On trace le rayon parallèle qui passe par O₂, ce qui nous permet de déterminer le foyer image secondaire F'₁. Le rayon émergent semble provenir de ce point.

2. a)



On trace un rayon parallèle passant par B : il émerge en semblant provenir de F'_2 . Le rayon passant par B et O_2 n'est pas dévié, ce qui nous permet de déterminer B' .

b) L'image $A'B'$ est virtuelle car elle se trouve dans l'espace objet.

3. a)

$$\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2A} = \frac{1}{f'_2}$$

L'application numérique donne : $O_2A' = -3 \text{ cm}$.

b) Le grandissement linéaire est donné par :

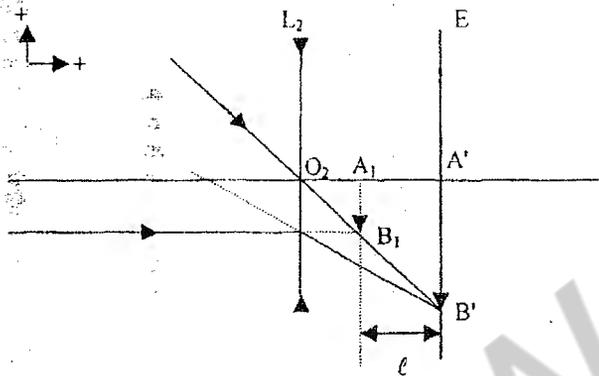
$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{O_2A'}{O_2A} = \frac{-3}{-7,5} = 0,4$$

$$\boxed{\gamma = 0,4}$$

III- Associations des deux lentilles

1. a) Tracé de rayons

A_1B_1 est l'image intermédiaire donnée par L_1 .



b) On peut écrire :

$$\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2A_1} = \frac{1}{f'_2}$$

$$\frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{O_2A'}{O_2A_1} = 2$$

De cette dernière relation, on tire : $O_2A' = 2O_2A_1$. En reportant dans la première relation, on trouve :

$$O_2A_1 = -\frac{f'_2}{2}$$

La distance l est donnée par :

$$l = \overline{A_1A'} = \overline{A_1O_2} + \overline{O_2A'} = -\frac{f'_2}{2}$$

$$\boxed{l = -\frac{f'_2}{2}}$$

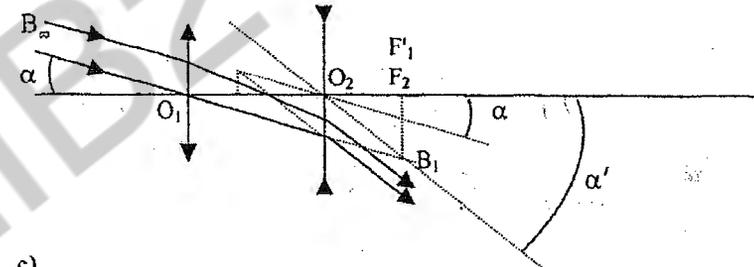
c) L'application numérique donne : $l = 2,5 \text{ cm}$.

2. a) Pour que l'image définitive soit à l'infini, le foyer image F'_1 de L_1 doit coïncider avec le foyer objet F_2 de L_2 :

$$e = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2} = f'_1 + f_2$$

$$\boxed{e = f'_1 + f_2}$$

b) La lunette étant afocale, tout faisceau parallèle ressort parallèle.



c)

On peut écrire, dans les conditions de Gauss :

$$\tan \alpha' \approx \alpha' = \frac{\overline{F_2B_1}}{\overline{O_2F_2}}$$

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{\overline{F_2B_1}}{\overline{O_1F'_1}}$$

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{O_2F_2}} = -\frac{f'_1}{f_2}$$

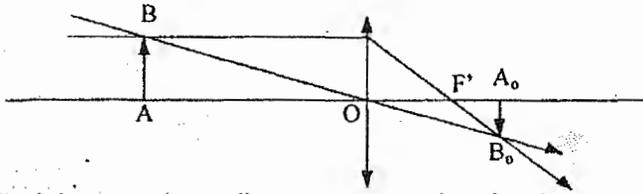
$$\boxed{G = -\frac{f'_1}{f_2}}$$

d) L'application numérique donne : $G = 4$.

e) Le grossissement étant positif, l'image $A'B'$ est de même sens que l'objet AB .

Corrigé 6.....

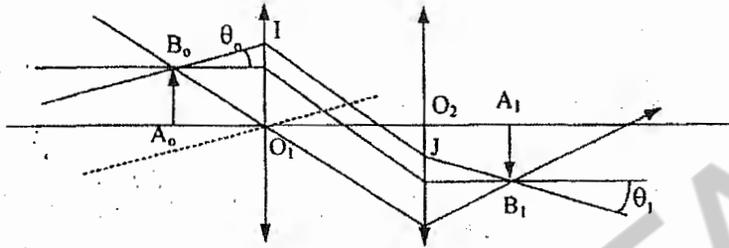
1. Construction de l'image A_0B_0 :



On établit aisément que le grandissement transversal est donné par :

$$\gamma_o = \frac{A_0 B_0}{AB} = \frac{OA_0}{OA} \text{ qui est une quantité négative.}$$

2. a) L'image de A_0B_0 à travers la première lentille se trouve à l'infini. L'image A_1B_1 donnée par la seconde lentille se trouve donc dans le plan focal image de cette deuxième lentille. Nous avons donc la construction suivante :



b) La distance A_0A_1 est égale à $4f$. Il en est de même pour chaque paire de lentilles. L'allongement cherché sera donc $l = 4pf = 120 \text{ cm} = 1,20 \text{ m}$.

c) Tout rayon passant par B_0 ressort parallèlement à B_0O_1 . On en déduit que $\theta_1 = -\theta_0$. Après $2p$ lentilles, nous aurons $\theta_p = (-1)^p \theta_0$. Cet angle est constant en valeur absolue, quel que soit p . On peut donc conserver la condition de guidage dans la fibre. Si θ_0 est inférieur à θ_c , θ_p le sera également (en valeur absolue).

3. a) L'oculaire joue le rôle de loupe, c'est-à-dire que la dernière image A_pB_p doit se trouver entre le foyer objet et le centre optique de l'oculaire.

b) L'objectif inverse l'image, chaque paire de lentilles inverse l'image, l'oculaire n'inverse pas l'image. Donc, l'image définitive sera de même sens que l'objet AB si p est impair.

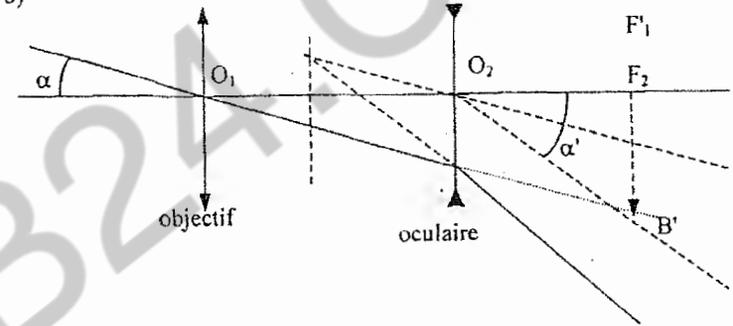
Corrigé 7.....

1. Lunette de Galilée

1. Dans la lunette de Galilée, l'objectif est une lentille convergente, l'oculaire une lentille divergente.

2. a) Un système afocal est un système tel que tout faisceau de rayons incident parallèle donne un faisceau émergent parallèle, ou encore tel que l'image de tout objet à l'infini se trouve aussi à l'infini. Dans ce cas, le foyer image de l'objectif doit se trouver au foyer objet de l'oculaire.

b)



c) En se plaçant dans les conditions de Gauss, c'est-à-dire en assimilant les angles et leurs tangentes, nous obtenons :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \approx \frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = \frac{\frac{F_2 B'}{O_2 F_2}}{\frac{F_2 B'}{O_1 F_1}} = \frac{O_1 F_1}{O_2 F_2}$$

$$\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1'}{f_2'}}$$

d) Le diamètre de la Lune paraît trente fois plus grand, donc $G = 30$ et $O_1 O_2 = 37,5 \text{ cm}$ ($\frac{1}{4}$ de coudée).

Or $\overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 F_1'} + \overline{F_1' O_2}$

$$\overline{O_1 O_2} = f_1' + f_2' \text{ et } G = -\frac{f_1'}{f_2'}$$

La résolution de ce système donne :

$$\boxed{f_1' \approx 38,8 \text{ cm et } f_2' \approx -1,3 \text{ cm.}}$$

La vergence est l'inverse de la distance focale soit :

$$\boxed{C_1 \approx 2,6 \delta \text{ et } C_2 \approx -77 \delta.}$$

3. a) Nous avons :

A l'œil nu : $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{1,7}{2 \times 10^5} = 6,8 \cdot 10^{-4}$

Corrigé 5.....

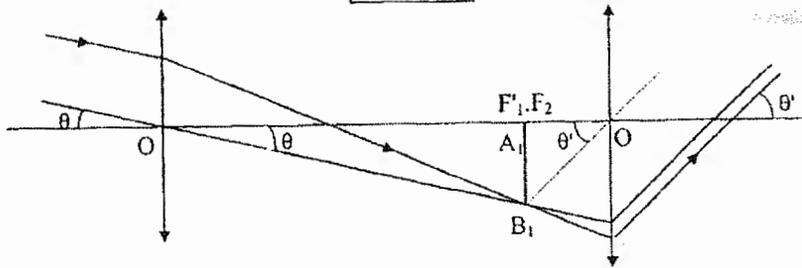
1. Comme l'image finale doit se trouver à l'infini A_1B_1 doit être dans le plan focal de l'oculaire :

$$\overline{A_1B_1} = -f_1 \cdot \theta$$

Le système est afocal, c'est à dire qu'un faisceau incident parallèle ressort parallèle.

Le foyer image de la lentille L_1 est confondu avec le foyer objet de la lentille L_2 . On obtient pour θ' :

$$\theta' = -\frac{f_1'}{f_2'} \theta$$

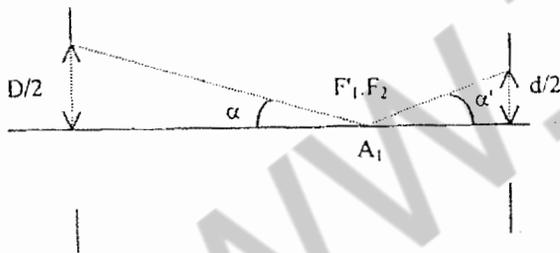


2. Le grossissement est égal au grandissement angulaire de la lunette, il est défini par :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{f_1'}{f_2'}$$

L'application numérique donne : $G = -20$ (l'image définitive est renversée).

3.

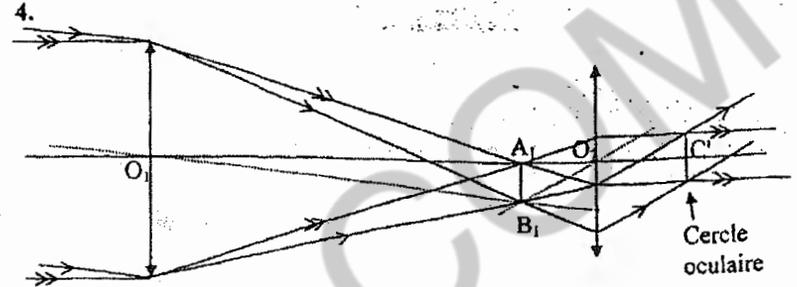


On peut écrire : $\tan \alpha = \frac{D}{2f_1'}$ et $\tan \alpha' = \frac{d}{2f_2'}$.

Application numérique :

$$\alpha = 0,05 \text{ rad et } \alpha' = 0,16 \text{ rad}$$

Le diaphragme d'ouverture est la monture de l'objectif (angle α plus petit que l'angle α').



F_1 et F_2' sont confondus avec A_1 .

L'image objective d'un point situé à l'infini sur l'axe est F_1' . Les rayons limites des faisceaux sortant de la lunette ressortent parallèlement à l'axe optique. L'image objective d'un point situé en dehors de l'axe est située en B_1 et les rayons limites des faisceaux sont représentés ci-dessus.

5. Rappelons quelques notions sur les diaphragmes.

Le diaphragme d'ouverture est celui qui limite la quantité de lumière. Le conjugué de ce diaphragme d'ouverture pour le sous-système optique situé avant s'appelle pupille d'entrée. Le conjugué du diaphragme d'ouverture que donne le sous système optique situé après s'appelle pupille de sortie.

Le champ est la portion d'espace visible à travers l'instrument. Le diaphragme réel qui limite le champ est appelé diaphragme de champ. Les conjugués objet et image sont respectivement les lucarnes d'entrée et lucarne de sortie. On voit que les rayons issus de points à l'infini de diamètre apparent trop important seront arrêtés par la monture de l'oculaire. Le diaphragme de champ est donc la monture de l'oculaire.

Tous les faisceaux sortant de l'appareil traversent un disque de centre C' , appelé cercle oculaire. Le cercle oculaire est l'image de l'objectif (diaphragme d'ouverture) à travers l'oculaire.

6. La relation de Descartes permet d'écrire :

$$\frac{1}{O_2C'} - \frac{1}{O_2O_1} = \frac{1}{f_2'}$$

Soit : $\overline{O_2C'} = 5,25 \text{ cm}$.

Le cercle oculaire est très proche du foyer image de l'oculaire.

$$\gamma = \left| \frac{\overline{O_2C'}}{\overline{O_2O_1}} \right| = \frac{D'}{D}$$

$$D' = 0,5 \text{ cm (diamètre du cercle oculaire)}$$

On doit placer la pupille de l'œil au cercle oculaire pour observer dans les meilleures conditions de confort lumineux.

Pour avoir une observation optimale, il faut placer l'œil au cercle oculaire, c'est à cet endroit que le flux lumineux est maximum.

5. a) Le pouvoir de résolution de l'objectif est limité par la diffraction due à la monture.

b) Appliquons la relation donnée dans l'énoncé :

$$\beta = 1,12 \times 10^{-5} \text{ rad} \Rightarrow d_{AB, \min} = 1,12 \times 10^{-5} \times 7,0 \times 10^7 = 780 \text{ km.}$$

c) La distance minimale est inférieure au diamètre du bassin d'Hellas, on pourra donc repérer ce bassin mais pas discerner tous les détails.

Corrigé 8.....

I- Optique géométrique

1. Utilisons la relation de conjugaison avec origine au sommet :

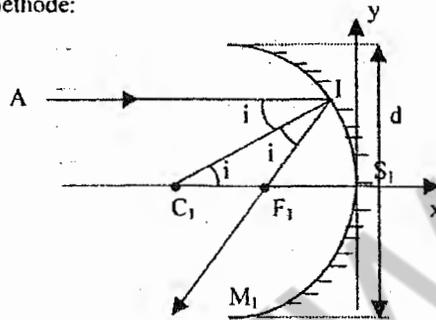
$$\frac{1}{S_1A} + \frac{1}{S_1A'} = \frac{2}{S_1C_1}$$

l'orientation positive se faisant suivant S_1x . Si on considère un point A situé à l'infini sur l'axe, A' représente alors le foyer F_1 :

$$\frac{1}{S_1F_1} = \frac{S_1C_1}{2} = -\frac{R_1}{2}$$

F_1 se trouve au milieu du segment C_1S_1 .

Autre méthode:



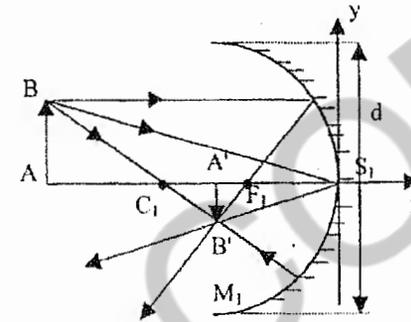
La relation des sinus dans le triangle C_1F_1I s'écrit :

$$\frac{C_1F_1}{\sin i} = \frac{C_1I}{\sin(\pi - 2i)} = \frac{R_1}{2 \sin i \cos i}$$

Puisque l'angle i est petit, on peut écrire :

$$C_1F_1 = \frac{R_1}{2 \cos i} \approx \frac{R_1}{2}$$

2. La construction de l'image $A'B'$ est indiquée ci-dessous.



3. Les triangles ABC_1 et $A'B'C_1$, d'une part et ABS_1 et $A'B'S_1$, d'autre part, sont homothétiques. On peut donc écrire (en orientant positivement suivant S_1y) :

$$G_1 = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C_1}{AC_1} = \frac{C_1A'}{C_1A} = -\frac{S_1A'}{S_1A}$$

4. L'expression précédente nous permet d'écrire :

$$\frac{C_1S_1 + S_1A'}{C_1S_1 + S_1A} = -\frac{S_1A'}{S_1A}$$

soit :

$$\frac{1}{S_1A} + \frac{1}{S_1A'} = \frac{2}{S_1C_1}$$

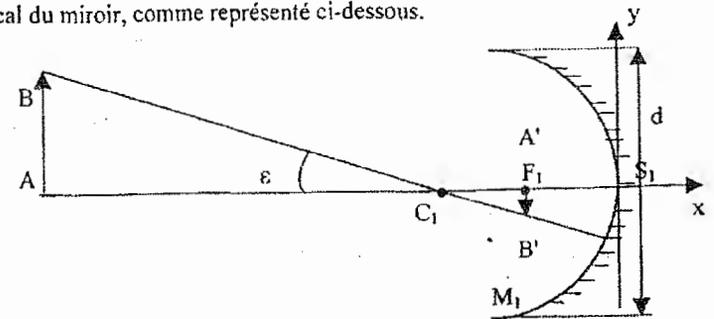
De même:

$$\frac{C_1A'}{C_1A} = \frac{S_1C_1 + C_1A'}{S_1C_1 + C_1A}$$

D'où :

$$\frac{1}{C_1A} + \frac{1}{C_1A'} = \frac{2}{C_1S_1}$$

5. La Lune se trouvant à grande distance, son image se forme dans le plan focal du miroir, comme représenté ci-dessous.



Avec l'instrument : $\alpha' = G\alpha = 0,02 \text{ rad}$.

b) Les sénateurs ont l'impression de voir les habitants à une distance D' telle que :

$$\alpha' \approx \tan \alpha' = \frac{1,7}{D'} = \frac{\alpha D}{D'} = \frac{\alpha D}{GD'}$$

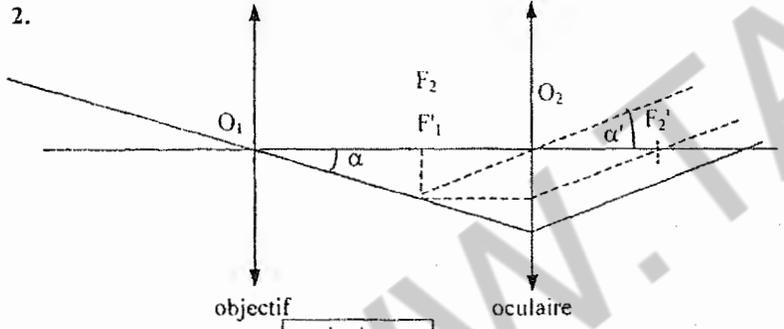
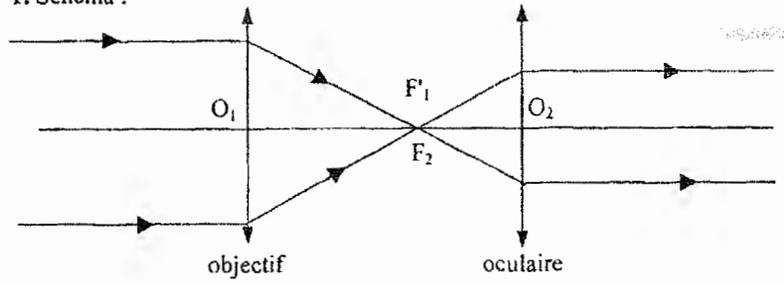
$$\boxed{D' \approx \frac{D}{G}}$$

soit :

L'application numérique donne : $D' = \frac{2500}{30} \approx 83 \text{ m}$.

II. La lunette astronomique

1. Schéma :



Là encore, nous trouvons : $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_1'}{f_2'}$

3. a) Le grossissement est défini par :

$$G = \frac{u'}{u} \text{ et } 2u = \frac{2u'}{G}$$

Pour $G = 40$, nous obtenons :

$$\boxed{2u = 0,75^\circ = 1,3 \times 10^{-2} \text{ rad}}$$

Pour $G = 266$, nous obtenons :

$$\boxed{2u = 0,11^\circ = 2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}}$$

b) Le chercheur réticulé a un grossissement faible et donc un champ important ce qui permet de repérer plus facilement l'astre que l'on désire observer.
c) Diamètre apparent de Mars :

$$\theta_M = \frac{6 \cdot 800}{7 \times 10^7} = 9,7 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

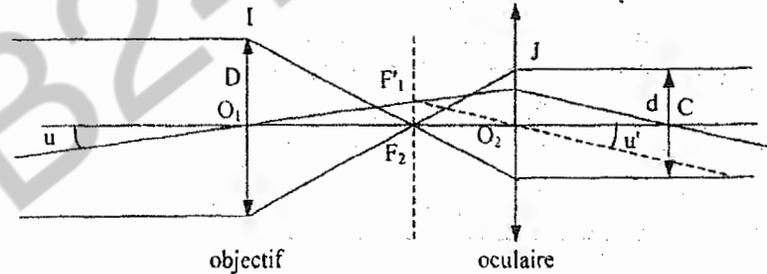
Champ de la lunette : $2u = 2,0 \times 10^{-3} \text{ rad}$ et donc $\theta_M < 2u$, Mars est vue en entier.

Pour la Lune, nous obtenons :

$$\theta_L = \frac{3 \cdot 400}{384 \times 10^3} = 8,9 \times 10^{-3} \text{ rad et } \theta_L > 2u$$

La Lune n'apparaît pas en entier.

4. a) Le cercle oculaire est l'image de l'objectif à travers l'oculaire :



Les triangles IO_1F_1' et JO_2F_2' sont homothétiques, on peut donc écrire :

$$\frac{D}{2f_1'} = \frac{d}{2f_2'}$$

$$\boxed{G = \frac{D}{d}}$$

soit :

b) $G = 133 \Rightarrow f_2' = \frac{f_1'}{G} \approx 6,0 \text{ mm}$.

Le diamètre du cercle oculaire est de $d = \frac{D}{G} = 0,45 \text{ mm}$.

Le centre C du cercle oculaire est le conjugué de O_1 dans l'oculaire. En appliquant la relation de Descartes, nous obtenons :

$$\frac{1}{O_2C} - \frac{1}{O_1O_2} = \frac{1}{f_2'}$$

$$\boxed{O_2C = 6,04 \text{ mm}}$$

Le cercle oculaire se trouve pratiquement dans le plan focal image de l'oculaire.

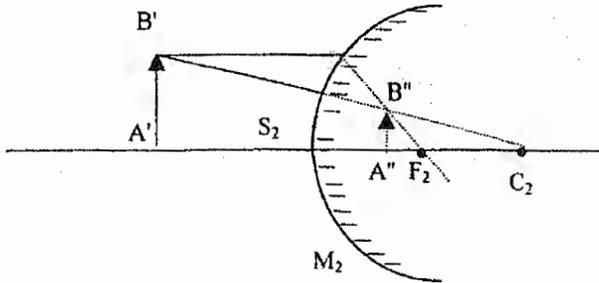
La grandeur de l'image est donnée par : $A'B' = \frac{R_1}{2} \tan \epsilon \approx \frac{R_1}{2} \epsilon$.

L'application numérique donne :

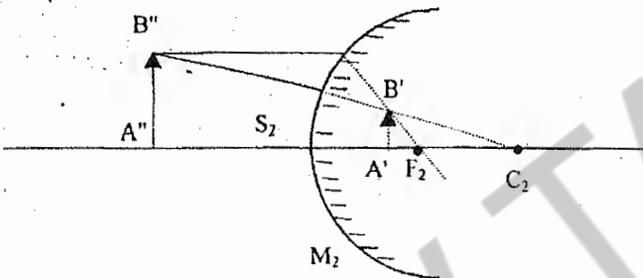
$$A'B' = 21,8 \text{ mm.}$$

II- Association

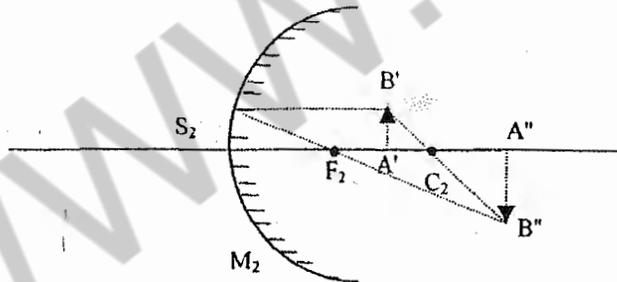
1. Les différents cas sont représentés ci-dessous :



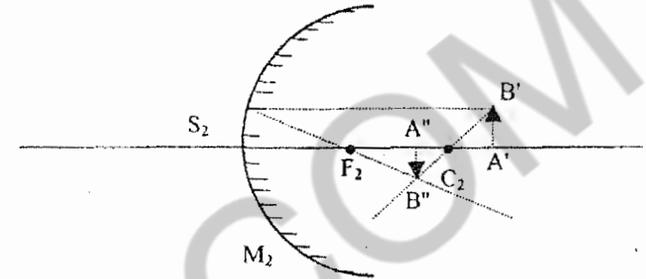
Objet réel, image virtuelle, droite, plus petite que l'objet



Objet virtuel, image réelle droite, plus grande que l'objet



Objet virtuel, image virtuelle, renversée, plus grande que l'objet



Objet virtuel, image virtuelle, renversée, plus petite que l'objet
Nous voyons que l'image est réelle si l'objet est virtuel et placé entre S_2 et F_2 .

2. Les relations de conjugaison s'écrivent (C_1 confondu avec C_2) :

$$\frac{1}{C_1A} + \frac{1}{C_1A'} = \frac{2}{C_1S_1} = \frac{2}{R_1}$$

$$\frac{1}{C_1A'} + \frac{1}{C_1A''} = \frac{2}{C_1S_2} = \frac{2}{kR_1}$$

En soustrayant membre à membre les 2 relations précédentes, il vient :

$$\frac{1}{C_1A} - \frac{1}{C_1A''} = \frac{2}{R_1} \frac{k-1}{k}$$

Le grandissement est le produit des grandissements de M_1 et M_2 :

$$G_1 = \frac{A''B''}{AB} = \frac{C_1A''}{C_1A} = \frac{1}{1 + 2 \frac{(1-k)}{k} \frac{C_1A}{R_1}}$$

3. Le système est équivalent à une lentille mince de distance focale f' telle que :

$$f' = \frac{kR_1}{2(1-k)}$$

cette distance focale est positive, la lentille équivalente est donc convergente. Le centre optique est C_1 . Lorsque k augmente, f' croît. L'intérêt d'un télescope par rapport à une lunette astronomique réside dans le fait que les miroirs n'ont pas d'aberrations chromatiques. De plus la lumière ne traverse pas les miroirs, contrairement aux lentilles : l'homogénéité du verre a donc beaucoup moins d'importance et on peut ainsi construire des objectifs de plus grand rayon pour les télescopes (les télescopes et les lunettes jouent le rôle de collecteurs de lumière, le diamètre de l'objectif doit être le plus grand possible).

4. L'image intermédiaire se forme dans le plan focal de M_1 . Pour que l'image définitive soit réelle, il faut que F_1 se trouve entre S_2 et F_2 :

$$\frac{R_2}{2} < \frac{R_1}{2} < R_2$$

$$\frac{1}{2} < k < 1$$

De plus si on veut que l'image définitive soit en S_1 , la relation établie en 2-2 donne:

$$\overline{C_1 S_1} = R_1 = \frac{k R_1}{2(1-k)}$$

$$k = \frac{2}{3}$$

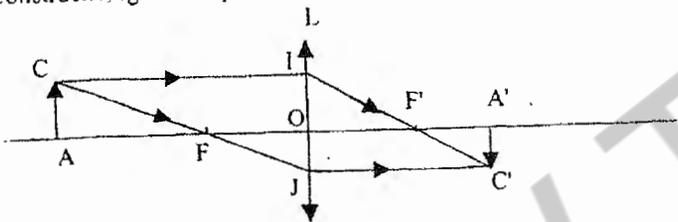
S_1 est le foyer image du télescope.

5. Application numérique : l'application numérique donne une grandeur de l'image de f' :

$$\varepsilon = 0,70 \text{ m.}$$

■ CORRIGE DU CONTROLE 1 ■

1. Construction géométrique de l'image :



2. a) Comparons les triangles ACF et FOJ : $\frac{\overline{OJ}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$

d'où :

$$\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}}$$

Comparons les triangles OIF' et F'A'C' : $\frac{\overline{OI}}{\overline{A'C'}} = -\frac{\overline{OF'}}{\overline{FA'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

d'où :

$$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

b) En égalant les deux expressions de γ , on obtient la relation de conjugaison de Newton

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f f'$$

3. a) En appliquant la relation de Newton à la lentille L_2 , il vient :

$$\overline{F_2 O_1} \cdot \overline{F_2' \Omega} = f_2 f_2'$$

Or $\overline{F_2 O_1} = \overline{F_2 F_1} + \overline{F_1 O_1} = -\Delta - f_1' \approx -\Delta$, d'où :

$$\overline{F_2' \Omega} \approx -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}$$

L'application numérique donne : $\overline{F_2' \Omega} = 5 \text{ mm}$.

b) On utilise le résultat du 2.a) :

$$\frac{a}{D} = |\gamma| = \frac{|f_2|}{|\overline{F_2 O_1}|}$$

Or $|\overline{F_2 O_1}| \approx \Delta$, d'où :

$$a \approx D \frac{f_2'}{\Delta}$$

L'application numérique donne $a = 1,32 \text{ mm}$.

4. a) En appliquant une nouvelle fois la relation de Newton à la lentille L_2 , il vient :

$$\overline{F_2 A_1'} \cdot \overline{F_2' A'} = f_2 f_2'$$

$$\overline{F_2 A_1'} = \frac{f_2 f_2'}{\overline{F_2' A'}}$$

Or $\overline{F_2 A_1'} \approx \overline{\Omega A'} = -d$, d'où :

$$\overline{F_2 A_1'} \approx -\frac{f_2 f_2'}{d}$$

L'application numérique donne $\overline{F_2 A_1'} \approx 3,6 \text{ mm}$.

b) Le grandissement du microscope est donné par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A_1 C_1}} \frac{\overline{A_1 C_1}}{\overline{AC}} = \gamma_2 \gamma_1$$

γ_1 et γ_2 sont les grandissements des lentilles L_1 et L_2 . En utilisant les relations du grandissement déjà établies, on obtient :

$$\gamma_1 = -\frac{\overline{F_1 A_1'}}{f_1'} \text{ et } \gamma_2 = -\frac{\overline{F_2 A_1'}}{f_2'}$$

$$\gamma = \frac{\overline{F_1 A_1} \cdot \overline{F_2 A_1'}}{f_1' f_2'}$$

Or $\overline{F_1 A_1} \approx \overline{F_1 F_2} \approx \Delta$ et $\overline{F_2 A_1'} \approx -d$. D'où :

$$\gamma = -\frac{\Delta d}{f_1' f_2'}$$

L'application numérique donne : $\gamma \approx -750$.

5. a) On peut écrire : $\tan \alpha' \approx \alpha' \approx \frac{A'C}{d} = \frac{|\gamma| AC}{d}$, soit :

$$\alpha' \approx \frac{\Delta AC}{f_1' f_2'}$$

b) Si $AC = h$, $\alpha' = \varepsilon$, d'où :

$$h = \varepsilon \frac{f_1' f_2'}{\Delta}$$

6. D'après la formule donnée dans l'énoncé, on obtient :

$$h = \frac{a\alpha'}{2n \sin u} = \frac{a\varepsilon}{2n \sin u}$$

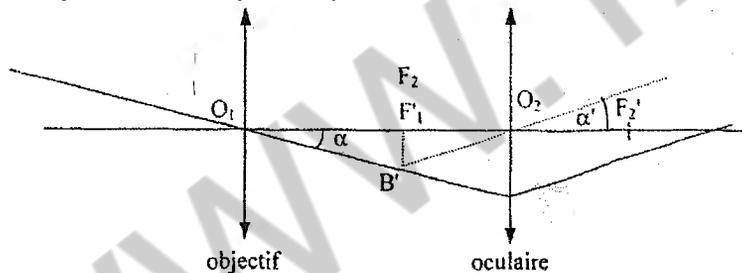
L'application numérique donne :

$$h = 2,1 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

..... ■ CORRIGÉ DU CONTRÔLE 2 ■

I. Principe d'une lunette astronomique

1. On doit avoir affaire à un système afocal : F_1' est en F_2 .
2. Représentation du trajet d'un rayon.



3. En se plaçant dans les conditions de Gauss, c'est-à-dire en assimilant les angles et leurs tangentes, nous obtenons :

$$G = \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| \approx \left| \frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} \right| = \frac{\frac{\overline{F_1 B'}}{\overline{F_1 O_2}}}{\frac{\overline{F_1 O_1}}{\overline{F_1 O_2}}} = \frac{\overline{F_1 B'}}{\overline{F_1 O_1}}$$

$$G = \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| = \frac{f_1'}{f_2'}$$

L'application numérique donne $G = 30$. Le plus petit écart angulaire décelable est donc :

$$\varepsilon = \frac{\alpha_{\min}}{G}, \text{ soit } 10^{-5} \text{ rad.}$$

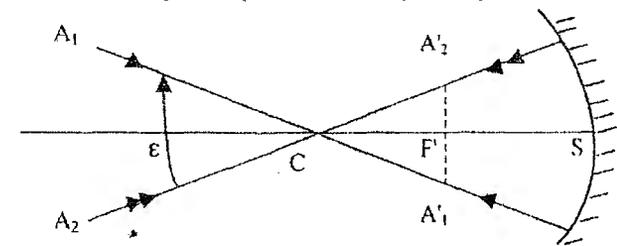
4. Pour que l'écart calculé précédemment soit observable, il faut que $D \geq 1,22 \frac{\lambda}{\varepsilon}$, c'est-à-dire :

$$D \geq 6,1 \text{ cm}$$

II. Notions sur les télescopes

1. Les télescopes présentent l'avantage de ne pas avoir d'aberrations chromatiques. Dans un télescope, l'objectif est un miroir concave ; la lumière ne traversant pas ce miroir, celui-ci nécessite une homogénéité moins grande qu'une lentille. Il est donc plus aisé de construire des objectifs de plus grand rayon pour les télescopes. Les grands télescopes ont donc une meilleure clarté que les plus grosses lunettes.

2. Un rayon incident passant par C ressort en passant par C.

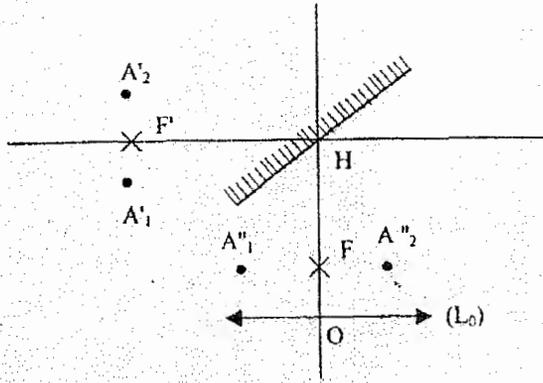


3. a) Les images des étoiles se trouvent dans le plan focal du miroir sphérique et en utilisant les rayons passant par le centre, on obtient la construction ci-dessus.

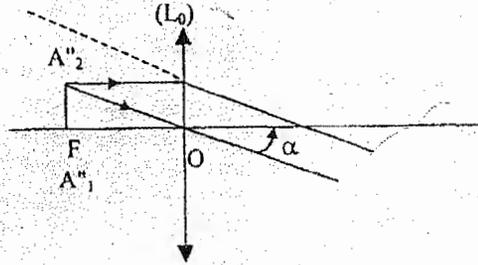
La taille de l'image $A_1' A_2'$ est donnée par :

$$A_1' A_2' = \frac{p}{2} \varepsilon$$

b) $A_1'' A_2''$ est symétrique de $A_1' A_2'$ par rapport au miroir plan.



c) La distance $HO = HF + FO$ est égale à 51,5 cm. La lentille (L_0) joue le rôle de loupe.



Le grossissement angulaire du télescope s'écrit :

$$G_{\text{tél}} = \frac{\alpha}{\epsilon}$$

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{A''_1 A''_2}{OF} = \frac{A''_1 A''_2}{f'} = \frac{p}{2f'}$$

$$G_{\text{tél}} = \frac{p}{2f'}$$

L'application numérique donne : $G_{\text{tél}} = 100$.

4. Pour $D = 6 \text{ m}$, $\epsilon_{\text{th}} = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 10^{-7} \text{ rad}$. Cette limite n'est pas atteinte du fait de la turbulence atmosphérique ; cependant un grand diamètre d'ouverture permet d'augmenter la clarté. La clarté est une caractéristique importante des instruments d'optique : pour un objet ayant un diamètre apparent, la clarté est le rapport de l'éclairement de la rétine lorsque l'œil regarde l'image à celui de la rétine lorsque l'œil regarde l'objet ; pour un objet ponctuel, la clarté est le rapport des flux lumineux reçus par la rétine avec et sans instrument.

5. On peut s'affranchir de la turbulence atmosphérique de différentes manières : on peut tout d'abord installer les télescopes dans des sites en altitude. On peut aussi placer le télescope en orbite autour de la Terre (télescope spatial de Hubble, mis sur une orbite à 600 km d'altitude en 1990). Une autre méthode consiste à utiliser un miroir déformable qui compense la turbulence : c'est l'optique adaptative.