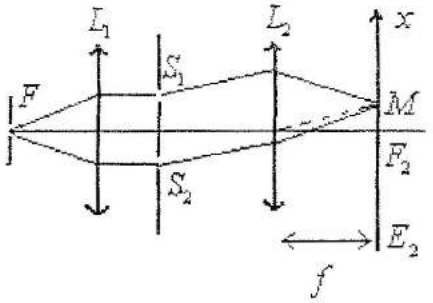
# Exercices d'optique ondulatoire

**1)** On considère le dispositif interférentiel des fentes d'Young ci-dessous où $L_1$ et $L_2$ sont deux lentilles minces, convergentes, de même axe optique. On désigne par $f = 1\,m$ la distance focale de la lentille $L_2$




Au foyer objet de la lentille $L_1$, on place un écran percé d'une fente très fine, éclairée par une lampe située en amont (fente source $F$).

L'écran situé entre les lentilles $L_1$ et $L_2$ est muni de deux ouvertures rectangulaires $S_1$ et $S_2$ identiques très fines, distantes de $e = 1\,mm$. Les grands cotés de ces rectangles sont parallèles à la fente source $F$. Le dispositif est dans l'air d'indice $n = 1$.

On examine les phénomènes qui se produisent dans le plan focal image $E_2$ de la lentille $L_2$.

On appelle $x$ l'abscisse d'un point $M$ de ce plan par rapport au foyer image $F_2$.

**1)1)** La source émet deux radiations dont les longueurs d'onde respectives sont $\lambda_1 = 0{,}577\,\mu m$ et $\lambda_2 = 0{,}579\,\mu m$.

Qu'observe t'on dans le plan $E_2$ ? (on expliquera comment traiter le phénomène de diffraction)

En quels " points " du plan $E_2$ le système de franges est-il complètement brouillé ?

**1)2)a)** On suppose maintenant que :

- le spectre d'émission de la source est un spectre continu dans l'intervalle de fréquence $[\nu_1, \nu_2]$,
- l'intensité rayonnée, dans un intervalle de fréquence $d\nu$, est égale à $dI = I_\nu d\nu$

Décrire le phénomène observé et calculer l'éclairement au point $M$. En quels " points " du plan $E_2$, l'éclairement paraît-il uniforme (le phénomène d'interférence est négligeable) ?

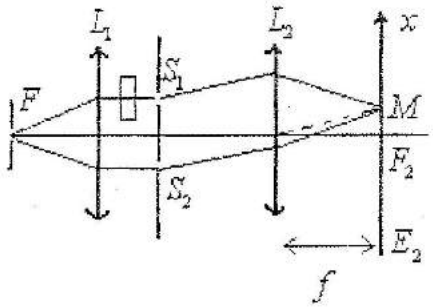
**A.N.** $\nu_2 - \nu_1 = 10^{10}\ Hz$

**1)2)b)** Montrer que la condition d'uniformité de l'éclairement peut être écrite $\tau(\nu_2 - \nu_1) \geq 1$ où $\tau$ représente la différence de temps de marches des deux rayons en $M$. Interpréter physiquement ce résultat en introduisant la durée d'émission de la source.

| Réponse 11 | Réponse 12a | Réponse 12b |

**2)** On considère le dispositif interférentiel des fentes d'Young ci-dessous où $L_1$ et $L_2$ sont deux lentilles minces, convergentes, de même axe optique. On désigne par $f = 50\,cm$ la distance focale de la lentille $L_2$.

WWW.TALIB24.COM




Au foyer objet de la lentille $L_1$, on place un écran percé d'une fente très fine, éclairée par une lampe située en amont (fente source $F$).

L'écran situé entre les lentilles $L_1$ et $L_2$ est muni de deux ouvertures rectangulaires $S_1$ et $S_2$ identiques très fines, distantes de $e = 1\,mm$. Les grands cotés de ces rectangles sont parallèles à la fente source $F$. Le dispositif est dans l'air d'indice $n = 1$.

On examine les phénomènes qui se produisent dans le plan focal image $E_2$ de la lentille $L_2$.

On appelle $x$ l'abscisse d'un point $M$ de ce plan par rapport au foyer image $F_2$.

**2)1)** La source émet une radiation de longueur d'onde $\lambda = 0{,}6\,\mu m$.

Qu'observe t'on dans le plan $E_2$ ? (on expliquera comment traiter le phénomène de diffraction)

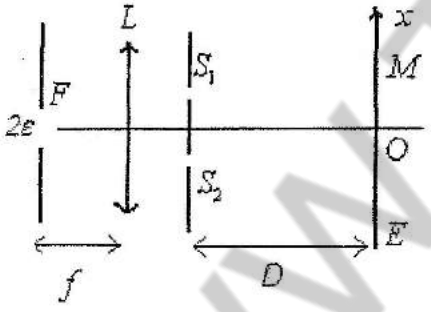
**2)2)** On intercale, sur le trajet de l'un des faisceaux, une lame à faces parallèles (épaisseur $e = 0{,}5\,mm$ ; $n = 1{,}5$).

Déterminer le nombre $N$ de franges qui ont défilé en $F_2$.

**2)3)** A partir de cette position on tourne la lame d'un angle $\theta$. Sachant que l'on peut apprécier au mieux le déplacement de 0,1 frange, avec quelle précision peut-on régler la position de la lame ?

| Réponse 21 | Réponse 22 | Réponse 23 |

**3)** On considère le dispositif interférentiel des fentes d'Young ci-dessous où $L$ est une lentille mince, convergente, de distance focale $f = 10\,cm$.




Au foyer objet de la lentille $L$, une fente source de largeur $2e$ écran émet un radiation de longueur d'onde $\lambda = 0{,}5\,\mu m$.

Un écran situé après la lentille est muni de deux ouvertures rectangulaires $S_1$ et $S_2$ identiques très fines, distantes de $e = 1\,mm$. Les grands cotés de ces rectangles sont parallèles à la fente source $F$. Le dispositif est dans l'air d'indice $n = 1$.

On examine les phénomènes qui se produisent dans un plan $E$ à distance $D$ de l'écran.

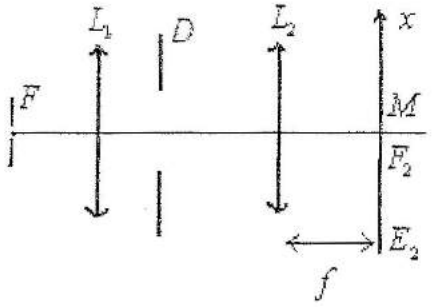
**3)1)** Déterminer la valeur de $e$ pour laquelle le système de franges disparaît pour la première fois ?

**3)2)** Pour $e$ donné, calculer l'intensité $I(x)$ ainsi que le contraste.

| Réponse 31 | Réponse 32 |

**4)** On considère le dispositif interférentiel ci-dessous où $L_1$ et $L_2$ sont deux lentilles minces, convergentes, de même axe optique. On désigne par $f$ la distance focale de la lentille $L_2$.

WWW.TALIB24.COM




Au foyer objet de la lentille $L_1$, on place une fente source très fine ($F$), centrée sur l'axe optique et dans le plan perpendiculaire à cet axe.

Entre les deux lentilles $L_1$ et $L_2$, on peut disposer, dans un plan perpendiculaire à l'axe optique, divers diaphragmes $D$.

Le dispositif est dans l'air d'indice $n = 1$.

On examine les phénomènes qui se produisent dans le plan focal image $E_2$ de la lentille $L_2$.

**4)1)** La source lumineuse est monochromatique de longueur d'onde $\lambda$. Le diaphragme $D$ est constitué par deux fentes identiques, de largeur $a$, " infiniment longue ", parallèles entre elles, dont les centres sont distants de $d$. Le dispositif ainsi étudié est un dispositif interférentiel classique de fentes Young avec diffraction dans la direction $x$.

Déterminer l'intensité lumineuse $I(x)$.

**4)2)** Le diaphragme est un réseau par transmission dont $N$ désigne le nombre total d traits (ou de fentes). Ce réseau est caractérisé par son pas $b = \frac{L}{N}$, distance entre les centre de deux traits (ou deux fentes) successifs.

$a$, largeur d'une fente (ou d'un trait), est très inférieur à $b$.

**4)2)a)** Pourquoi l'intensité lumineuse est inchangée si on intervertit largeur du trait et largeur de la fl[illegible]te.

**4)2)b)** Pour la source lumineuse, monochromatique de longueur d'onde $\lambda$, déterminer et représenter l'intensité lumineuse $I(x)$.

**4)2)c)** La source lumineuse émet deux longueurs d'onde voisines $\lambda$ et $\lambda + \Delta\lambda$.

Décrire le phénomène observé.

On considère que deux images sont distinctes l'une de l'autre (critère de Lord Rayleigh) si le maximum principal d'intensité lumineuse correspondant à $\lambda$ coïncide avec le minimum le plus voisin du maximum principal correspondant à $\lambda + \Delta\lambda$ (ou inversement).

En déduire le pouvoir de résolution $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ du réseau.

**A.N.** $L = 50mm$ ; $\frac{1}{b} = 600 traits/mm$

Déterminer le pouvoir de résolution pour le premier ordre.

**4)3)** On observe uniquement dans le premier ordre d'interférence.

Déterminer l'intervalle spectral $\Delta\lambda$ correspondant, dans le plan focal de la lentille $L_2$, à une distance $\Delta x$ des maxima de lumière.

Le montage réalisé constitue le schéma de base d'un spectroscope à réseau. La quantité $\frac{\Delta\lambda}{\Delta x}$ déduite de la question précédente caractérise la dispersion du système. On l'exprime, en général, en Angströms par millimètre.

Déterminer, en $Å/mm$, la dispersion du montage réalisé, la distance focale de $L_2$ étant $f = 150mm$.

**4)4)** On utilise maintenant une source de lumière blanche s'étendant de $\lambda = 0{,}4\ \mu m$ à $\lambda = 0{,}7\ \mu m$.

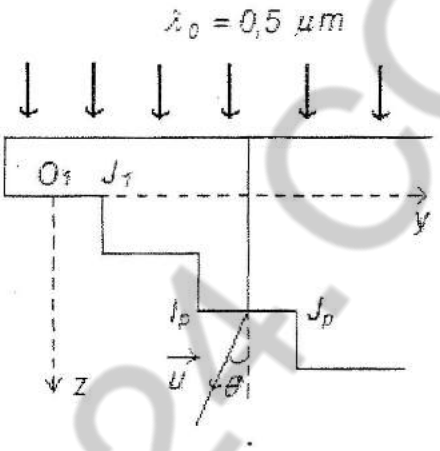
Déterminer la longueur occupée dans le plan d'observation par les spectres des trois premiers

WWW.TALIB24.COM

ordres.
Quelle difficulté va-t-on rencontrer dans l'interprétation du spectre si on observe dans les ordres supérieurs au premier ?
En se limitant au premier ordre, l'approximation de Gauss (angles petits) est-elle valable dans tout le domaine $0,4$ à $0,7\ \mu m$.

| Réponse 41 | Réponse 42a | Réponse 42b | Réponse 42c | Réponse 43 | Réponse 44 |

**5)** On considère le dispositif ci-contre constitué à partir de $N$ lames de verre (de même épaisseur $e = 6\,mm$, d'indice $n = 1,5$, décalées de $a = 1\,mm$). On prendra $N = 50$.
Il est éclairé par un faisceau monochromatique ($\lambda_0 = 0,5\ \mu m$) tombant normalement sur la face d'entrée du système. On supposera que les faces $I_p J_p$ (largeur $a$ et longueur $L$) diffractent la lumière. (on ne tiendra pas compte d'éventuelles réflexions à l'intérieur du verre)




**5)1)** Montrer que l'amplitude $A(\vec{u})$ diffractée par le système, dans la direction $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{e_z} - \sin\theta\,\vec{e_y}$, ($\vec{u}$ appartient au plan de symétrie du système) peut se mettre sous la forme d'un produit de deux fonctions caractéristiques, l'une pour la diffraction, l'autre pour l'interférence.

En déduire, pour $\theta$ petit, les valeurs $\theta_m$ de $\theta$ correspondant à des maxima de lumière. Qu'observe-t-on ?

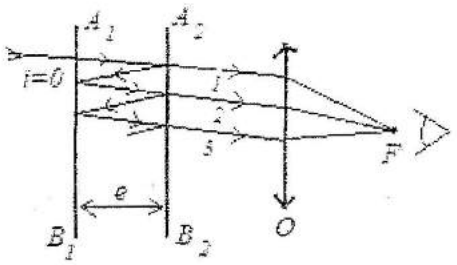
**5)2)** On donne $\left(\frac{\partial n}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_0} = -6,4\,10^4\ m^{-1}$.
Déterminer le pouvoir de résolution $R$ de l'appareil.

**5)3)** On considère une lumière comportant un spectre centré sur $\lambda_0$ et de largeur $\Delta\lambda$.
A partir de quelle valeur $\Delta\lambda_1$, il y a-t-il recouvrement d'ordre (au voisinage de $\theta = 0$) ?

| Réponse 51 | Réponse 52 | Réponse 53 |

**6)** On dispose de l'huile de cèdre transparente d'indice $n = 1,515$ entre deux lames de verre identiques dont les faces en regard $A_1B_1$ et $A_2B_2$ semi-argentées sont parallèles, leur distance étant égale à $e$.
On éclaire l'ensemble sous incidence normale par un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda$. Les faces $A_1B_1$ et $A_2B_2$ on le même facteur de réflexion $\rho$ et de transmission $\tau$ pour les intensités lumineuses ($\rho + \tau = 1$). L'œil est placé au foyer image d'un objectif $O$ qui lui permet de mettre au point dans un plan $AB$ quelconque situé entre $A_1B_1$ et $A_2B_2$. L'intensité lumineuse incidente sera prise comme intensité de référence.

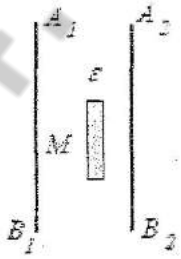
WWW.TALIB24.COM




Pour la compréhension de la figure et des réflexions successives, les rayons sont représentés inclinés : ils sont, en fait, perpendiculaires aux lames de verre ($i = 0$).

**6)1)** Donner la valeur de la différence de marche $\delta$ et du déphasage $\varphi$ entre deux rayons successifs. Calculer l'intensité lumineuse au point d'observation $F$ en fonction de $\rho, \tau, \varphi$.

**6)2)** On interpose dans l'huile des objets transparents que l'on veut examiner en contraste interférentiel. Ces objets $M$, d'épaisseur faible $\varepsilon$, sont assimilés à des petites lames à faces parallèles d'indice $n'$ voisin de $n$. L'œil effectue la mise au point sur le plan d'un objet $M$.




**6)2)a)** Donner la valeur du nouveau déphasage $\varphi' = \varphi + \delta\varphi$ entre deux rayons transmis consécutifs traversant l'objet $M$.

**6)2)b)** Calculer l'intensité $I'$ due à la traversée de l'objet $M$ et, en admettant que $\delta\varphi$ est petit, montrer que $I'$ est de la forme :

$I' = a + b\,\delta\varphi$ où $a$ et $b$ sont des coefficients que l'on calculera en fonction de $\rho$ et $\varphi$.

**6)2)c)** En définissant le contraste par la relation $\gamma = \dfrac{I - I'}{I}$, montrer que

$$\gamma = \frac{2\rho\sin\varphi}{1+\rho^2-2\rho\cos\varphi}\,\delta\varphi$$

**6)2)d)** Calculer la valeur de $\gamma$ pour une épaisseur donné $e$ telle que $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k$ entier positif ou nul).

Les objets $M$ sont-ils visibles sachant que l'observation nécessite un contraste minimum de l'ordre de 0,1 ?

On donne : $\varepsilon = 0{,}6\ \mu m$ ; $n' = 1{,}520$ ; $\rho = 0{,}8$ ; $\lambda = 5460\ \mathring{A}$

**6)2)e)** Pour une variation $\delta\varphi$ fixée, montrer que la valeur maximale du contraste vaut :

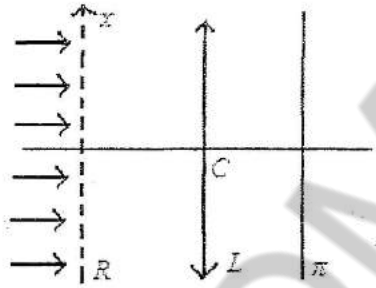
$$\gamma_M = \frac{2\rho}{1-\rho^2}\,\delta\varphi$$

Calculer, dans ce cas, l'épaisseur minimale $\varepsilon_m$ observable.

| Réponse 61 | Réponse 62a | Réponse 62b | Réponse 62c | Réponse 62d | Réponse 62e |

WWW.TALIB24.COM

7) On considère un réseau plan $R$ à transmission d'amplitude $t(x) = 1 + \sin\frac{2\pi x}{p}$ dont les " sillons " sont perpendiculaires à l'axe $Ox$.




Il est éclairé, sous incidence normale, par un faisceau monochromatique (longueur d'onde $\lambda$) de rayons parallèles issus d'une source ponctuelle.

7)1) On observe dans le plan focal $\pi$ d'une lentille convergente $L$.

Le réseau s'étend selon $Ox$ de $x_1 = -\frac{l}{2}$ à $x_2 = \frac{l}{2}$. Déterminer la répartition d'amplitude dans le plan $\pi$.

7)2) On suppose $p << l$. En déduire l'éclairement dans le plan $\pi$ et expliquer ce que l'on observe.

| Réponse 71 | Réponse 72 |

8) Sur un axe $z'z$, on considère une source lumineuse monochromatique ponctuelle $S$. Un système optique, non absorbant, non déphasant et de grandissement unité, en fournit deux images $S_1$ et $S_2$ telles que $z'z$ soit une médiatrice de $S_1S_2$. La distance $S_1S_2$ est égale à $s$. $S_1$ et $S_2$ sont des sources secondaires émettant des vibrations lumineuses cohérentes $A\cos\omega t$.

On observe les interférences produites par ce dispositif dans un plan ($P$) perpendiculaire à $z'z$ en $O$, situé à distance $D$ de la droite $S_1S_2$ telle que $D >> s$. On repère la position d'un point $P$ appartenant à ($P$) par ses coordonnées $x$ et $y$ dans un repère d'origine $O$, l'axe $Ox$ étant parallèle à $S_1S_2$.

8)1)a) Montrer que l'intensité lumineuse en $P$ voisin de $O$ peut se mettre sous la forme $I = f(\frac{x}{i})$, $i$ étant l'interfrange que l'on définira et calculera.

8)1)b) On déplace la source $S$ parallèlement à $Oy$ de sorte que $S_1$ et $S_2$ subissent le même déplacement que $S$. Comment est modifié le système de franges ? Même question si le déplacement de $S$ a lieu, dans les mêmes conditions, parallèlement à $Ox$.

8)2) La source $S$ est maintenant un rectangle de centre $O'$ ($O'$ sur $z'z$), de hauteur $2X_0$ suivant un axe $O'X$ et de largeur $l$ suivant un axe $O'Y$ ; Les axes $O'X$ et $O'Y$ sont parallèles aux axes $Ox$ et $Oy$. Le système optique donne de $S$ deux images égales $S_1$ et $S_2$, situées dans un même plan, parallèle au plan contenant $S$ et à même distance de l'axe $z'z$ ; soit $M$ un point de $S$, $M_1$ et $M_2$ ses images à travers le système optique restent toujours à la même distance $s$ quel que soit le point $M$ ($M$ étant sur la médiatrice de $M_1M_2$ parallèle à $z'z$). Soient $X$ et $Y$ les coordonnées de $M$, $M_1$ et $M_2$ émettent deux vibrations lumineuses identiques de la forme $A(X,Y)\cos[\omega t + \varphi(X,Y)]$. On pose $A^2(X,Y) = B(X,Y)$.

On observe les interférences lumineuses produites par ce dispositif dans le plan ($P$) défini à

WWW.TALIB24.COM

la question **1)**.

**8)2)a)** Montrer que deux éléments homologues, de même surface $dS$, centrés aux points $M_1$ et $M_2$ donnent en $P$ de coordonnées $x, y$, une intensité lumineuse de la forme

$d^2I = f(\frac{X - X_0}{i})dXdY$ où $X_0$ est une quantité que l'on définira et exprimera en fonction de $X$.

**8)2)b)** On suppose que $B(X,Y) = B_0 = Cte$. Déterminer l'intensité produite en $P$ par l'ensemble de la source $S$.

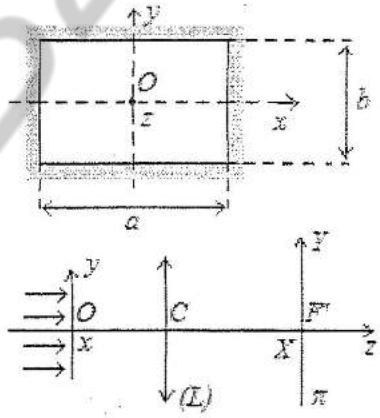
Donner l'expression du contraste défini par : $C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$

Représenter les variations de $C$ en fonction de $X_0$. Décrire le phénomène observé lorsqu'on fait varier $X_0$.

Pour quelle valeur de $X_0$, obtient-on la première disparition du système de franges ? Retrouver sans calcul ce résultat.

| Réponse 81a | Réponse 81b | Réponse 82a | Réponse 82b |

**9)** Une fente rectangulaire, percée dans un écran opaque, est éclairée par un faisceau monochromatique (longueur d'onde $\lambda$) cohérent, perpendiculaire au plan de l'écran.
On observe la figure de diffraction dans le plan focal image $\pi$ d'une lentille mince convergente (distance focale $f$).




**9)1)** Déterminer l'amplitude diffractée dans la direction $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ : $A_{a,b}(\alpha, \beta) = A_1(\alpha, \beta)$.

En déduire la valeur de la quantité $F(X,Y) = \frac{I_1(X,Y)}{I_1(0,0)}$ où $I_1(X,Y)$ représente l'intensité lumineuse au point ($X, Y$) du plan focal. Conclure.

**9)2)** On place en $O$ un cache rectangulaire dont les cotés sont parallèles à la fente (dimensions : $a'$ selon $\overrightarrow{Ox}$ et $b'$ selon $\overrightarrow{Oy}$).
On a $a' << a$ et $b' << b$ et donc $S' = a'b' << S = ab$.

**9)2)1)** Que peut-on dire de la nouvelle répartition d'intensité $I_2(X,Y)$ ?

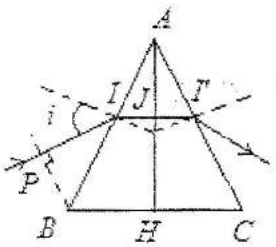
**9)2)2)** On translate le cache en le maintenant dans le plan de la fente : comment est modifiée la figure de diffraction ?

| Réponse 91 | Réponse 921 | Réponse 922 |

**10)** On considère un prisme de verre, d'indice $n$, plongé dans l'air et dont la section droite est un triangle équilatéral de coté $a$. Pour une incidence $i$ particulière, les rayons qui traversent

WWW.TALIB24.COM

le prisme ont un trajet perpendiculaire au plan bissecteur de trace $AH$. La face $AB$ est entièrement éclairée par un faisceau de lumière parallèle .




**10)1) Optique géométrique**

**10)1)a)** Calculer $i$ en fonction de $n$

*Dans la suite du problème, on considèrera $i$ comme une donnée au même titre que $a$ et $n$.*

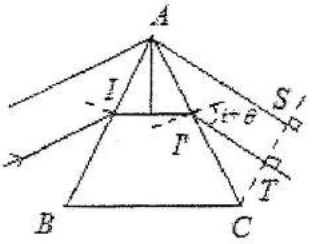
**10)1)b)** Un rayon de faisceau considéré pénètre dans le prisme au point $I$ ($AI = x$).

Calculer le chemin optique $[PIJ]$ où $P$ est le point du plan d'onde perpendiculaire au faisceau incident passant par $B$ et $J$ l'intersection du rayon avec $AH$.

On montrera que ce chemin optique est indépendant de $x$ et qu'il s'exprime en fonction de $a$ et $i$ seulement.

**10)2) Diffraction**

**10)2)1)a)** On considère la face de sortie $AC$ comme une ouverture diffractante et l'on se propose de calculer l'amplitude de la vibration lumineuse diffractée suivant une direction faisant un angle $i+\theta$ avec la normale à la face sortie ; la direction $i$ correspond au rayon émergent de l'optique géométrique et l'angle $\theta$ sera considéré comme très petit.




Les vibrations diffractées suivant cette direction par les points $A$ et $I'$ coupent respectivement en $S$ et $T$ le plan d'onde passant par $C$.

Calculer la différence de phase $\varphi$ entre ces vibrations. Le résultat sera exprimé en fonction de $x = AI = AI'$, de $\theta$, de $i$ et de $\lambda$ (longueur d'onde de la lumière utilisée.

**10)2)1)b)** On désigne par $ds = K\cos(\omega t + \varphi)\,dx$ la vibration diffractée par un élément de surface de largeur $dx$ autour de $I'$

Calculer l'amplitude résultante diffractée dans la direction $i+\theta$ par l'ensemble de la face de sortie du prisme. En déduire l'intensité lumineuse $E$ dans la direction $i+\theta$. On posera $E(i) = E_0$.

**10)2)1)c)** Calculer la direction $\theta_m$ suivant laquelle se situe le premier minimum pour la lumière diffractée.

**10)2)2)** Le prisme est en fait absorbant, si bien qu'après traversée d'une longueur $z$ de verre, l'amplitude de la vibration lumineuse est multipliée par le facteur $\exp(-\alpha z)$ ; $\alpha$ est une constante positive suffisamment grande pour que l'amplitude de la vibration du rayon traversant le prisme dans sa plus grande épaisseur est négligeable.

**10)2)2)a)** Calculer l'intensité lumineuse $E'$ diffractée dans la direction $i+\theta$ par l'ensemble de la face de sortie du prisme. On posera $E'(i) = E'_0$.

**10)2)2)b)** Calculer la direction $\theta'_m$ suivant laquelle l'intensité lumineuse est réduite de moitié

WWW.TALIB24.COM

**10)2)3) Application numérique**

$n = 1{,}52$ ; $\alpha = 1{,}0510^4\ m^{-1}$ ; $\lambda = 610^{-7}\ m$ ; $a = 0{,}03\ m$

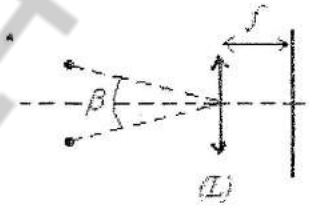
Calculer successivement l'angle d'incidence $i$, les angles $\theta_m$ et $\theta_m$.

| Réponse 101a | Réponse 101b | Réponse 1021a | Réponse 1021b | Réponse 1021c | Réponse 1022a | Réponse 1022b |

**11) Diffraction par des ouvertures circulaires**

**11)1)** Une ouverture circulaire de rayon $R$, percée dans un écran opaque, est éclairée par un faisceau monochromatique (longueur d'onde dans le vide $\lambda$) cohérent, perpendiculaire au plan de l'écran.
Calculer l'intensité lumineuse (on appellera $i$ l'angle entre la direction incidente et la direction d'observation.

**11)2)** L'œil est assimilable à une lentille *(L)* diaphragmée par une pupille circulaire de rayon $R = 1{,}5\ mm$ dont la distance focale est $f = 17\ mm$. L'indice optique sera pris égal à $n = 1{,}4$.
Il observe deux points lumineux, de même intensité, éloignés, séparés par une distance angulaire $\beta$ (longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0{,}6\ \mu m$).




En supposant que la diffraction est la seule cause de limitation du pouvoir de résolution de l'œil, déterminer la valeur minimale de $\beta$ pour laquelle l'œil commence à séparer les deux points.

**Données mathématiques**

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{x} \exp(-j\rho\cos\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi x J_1(x)$$

$$\lim_{x \to 0} 2\frac{J_1(x)}{x} = 1$$

$J_1(x)$ : fonction de Bessel de 1ère espèce d'ordre 1 ; qdx

Le premier zéro de $\frac{J_1(x)}{x}$ est $x = 3{,}832$, le deuxième est $x = 7{,}02$, le troisième est $x = 10{,}17$, le ...

| Réponse 111 | Réponse 112 |

WWW.TALIB24.COM

Exercice1 :

**1)1)** De manière générale, pour une source monochromatique, la vibration lumineuse est le produit de la fonction de diffraction par la fonction d'interférence.
Pour une fente extrêmement fine, la fonction de diffraction peut être prise égale à 1 quelque soit la direction.
Dans le dispositif des fentes d'Young, pour une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda$, la vibration lumineuse est donc :

$s = s_0[1 + \exp(j\frac{2\pi\delta}{\lambda})]$ où $\delta \approx \frac{e\,x}{f}$ est la différence de marche entre les deux rayons issus des sources secondaires $S_1$ et $S_2$ ; les deux sources sont supposées émettre des vibrations de même amplitude.

L'intensité se calcule à partir de $I \propto s\,s^* \Rightarrow$ $I = \frac{I_0}{2}[1 + \cos(\frac{2\pi\,e\,x}{\lambda\,f})]$

Pour les deux radiations, on obtient en admettant que toutes les amplitudes des vibrations sont identiques :

$$I = \frac{I_0'}{4}[1 + \cos(\frac{2\pi\,e\,x}{\lambda_1\,f}) + 1 + \cos(\frac{2\pi\,e\,x}{\lambda_2\,f})] = \frac{I_0'}{2}\left\{1 + \cos[\frac{2\pi\,e\,x}{f}(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2})]\cos[\frac{2\pi\,e\,x}{f}(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2})]\right\}$$

$\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont voisins, le système de franges sera brouillés pour $\cos[\frac{2\pi\,e\,x}{f}(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2})] = 0$,

soit $x = \pm\frac{(2k-1)f}{4e(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2})} = \pm(2k-1)\text{ x }0{,}042m$ avec $k = 1, 2, 3, \ldots$

**1)2)a)**
La source n'est plus monochromatique, la figure d'interférence se brouillera en fonction de l'incohérence temporelle de la source.

$$dI = K_\nu[1 + \cos(\frac{2\pi\,e\,x}{c\,f}\nu)]d\nu$$

Nous simplifions l'intégration en supposant que $K_\nu$ ne dépend pas de $\nu$.

$$I = K\int_{\nu_1}^{\nu_2}[1 + \cos(\frac{2\pi\,e\,x}{c\,f}\nu)]d\nu = K(\nu_1 - \nu_2)\left\{1 + \sin_c[\frac{\pi\,e\,x}{c\,f}(\nu_1 - \nu_2]\cos[\frac{\pi\,e\,x}{c\,f}(\nu_1 - \nu_2]\right\}$$

$$= I_0\left\{1 + \sin_c[\frac{\pi\,e\,x}{c\,f}(\nu_1 - \nu_2]\cos[\frac{\pi\,e\,x}{c\,f}(\nu_1 - \nu_2]\right\}$$

$$I_{max} = I_0\left\{1 + \left|\sin_c[\frac{\pi\,e\,x}{c\,f}(\nu_1 - \nu_2]\right|\right\} \quad ; \quad I_{min} = I_0\left\{1 - \left|\sin_c[\frac{\pi\,e\,x}{c\,f}(\nu_1 - \nu_2]\right|\right\}$$

L'éclairement est uniforme si $I_{max} \approx I_{min}$.

WWW.TALIB24.COM

Pour cette étude, il est intéressant de définir le contraste,

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \left| \sin_c [\frac{\pi e x}{c f}(\nu_1 - \nu_2)] \right|$$

$C$ est inférieur à $\frac{2}{3\pi} = 0{,}22$ si $\frac{\pi e x}{c f}(\nu_1 - \nu_2] \geq \pi$, soit $x \geq \frac{c f}{e(\nu_1 - \nu_2)} = 30m$

**1)2)b)**

$\delta = \frac{e x}{f}$ ⇨ $\tau = \frac{\delta}{c}$ est la différence de temps de marche

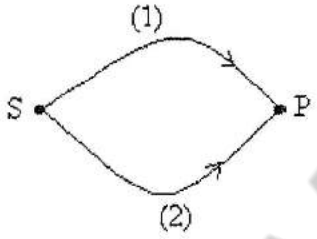
Ainsi, la condition d'uniformité de l'éclairement peut être écrite $\tau(\nu_2 - \nu_1) \geq 1$

Pour interpréter physiquement ce résultat, nous calculons la vibration émise par la source.

$$s_0(t) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} a_0 \exp(j2\pi \nu t) d\nu = a_0 \sin_c[\pi(\nu_2 - \nu_1)t] \exp(j2\pi \nu_0 t) \quad \text{avec } \nu_0 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}.$$

Au delà d'un temps $t_c = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$, la vibration devient très faible et on peut considérer que la source n'émet plus. Dans cette interprétation, $t_c$ **est la durée de l'émission**.

**Remarque :** On trouve là un résultant important : seule la source monochromatique a une durée d'émission illimitée. Evidemment, il ne peut s'agir que d'un cas limite d'école.




**Interprétation du phénomène d'interférence**

Soient $t_1$ le temps que met l'onde pour parcourir SP par le chemin (1) et $t_2$ le temps par le chemin (2).

Nous raisonnons avec $t_2 > t_1$, par suite $t_2 - t_1 = t_m$ représente la différence des temps de marche.

Le signal émis par la source S est perçu entre $t_1$ et $t_1 + \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$ pour le chemin (1), entre $t_2$ et $t_2 + \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$ pour le chemin (2).

**Pour qu'il y ait interférence**, il convient que $t_2 \leq t_1 + \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$, soit

$\frac{1}{\nu_2 - \nu_1} = t_c \geq t_2 - t_1 = t_m$ soit la durée d'émission (appelée **temps de cohérence**) supérieure à la différence des temps de marche.

On introduit généralement la **longueur de cohérence** définie par $c\,t_c$ et, pour qu'il y ait interférence, il convient qu'elle soit supérieure à la différence de marche.
Des temps de cohérence (ou des durées d'émission) importants, c'est à dire des sources les plus monochromatiques possibles, favorisent le phénomène d'interférence.

**2)1)** De manière générale, pour une source monochromatique, la vibration lumineuse est le produit de la fonction de diffraction par la fonction d'interférence.

WWW.TALIB24.COM

Pour une fente extrêmement fine, la fonction de diffraction peut être prise égale à 1 quelque soit la direction.
Dans le dispositif des fentes d'Young, pour une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda$, la vibration lumineuse est donc :

$s = s_0[1 + \exp(j\frac{2\pi\delta}{\lambda})]$ où $\delta \approx \frac{e\,x}{f}$ est la différence de marche entre les deux rayons issus des sources secondaires $S_1$ et $S_2$ ; les deux sources sont supposées émettre des vibrations de même amplitude.

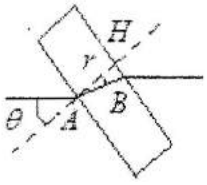
L'intensité se calcule à partir de $I \propto s\,s^* \Rightarrow$ $I = \frac{I_0}{2}[1 + \cos(\frac{2\pi\,e\,x}{\lambda\,f})]$

La distance entre deux franges correspond à une différence de marche $\Delta\delta = \lambda$

**2)2)** Le fait d'intercaler la lame introduit une différence de marche égale à $(n-1)\,e$ et donc le nombre de franges qui défilent en $F_2$ est égal à $N = \frac{(n-1)\,e}{\lambda} = 417$

**2)3)**

$\sin\theta = n\sin r$




Le chemin optique $[AB]$ est égal à : $[AB] = \frac{n\,e}{\cos r}$

La différence de marche est : $\delta_\theta = \frac{n\,e}{\cos r} - \frac{e\cos(\theta - r)}{\cos r}$

La variation de différence de marche est :

$$\delta_\theta - \delta_0 = \frac{n\,e}{\cos r} - \frac{e\cos(\theta - r)}{\cos r} - (n-1)e$$

L'angle $\theta_{max}$ correspondant à un déplacement de 0,1 frange , soit $\delta_\theta - \delta_0 = \frac{\lambda}{10}$ est faible.

Ainsi $\theta \approx n\,r$, $\cos r \approx 1 - \frac{r^2}{2}$, $\cos(\theta - r) \approx 1 - \frac{(\theta - r)^2}{2} = 1 - (n-1)^2\frac{r^2}{2}$

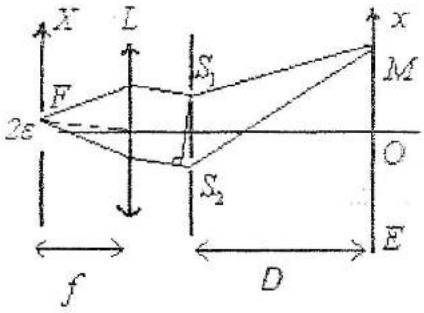
$$\delta_\theta - \delta_0 = \frac{n\,e}{\cos r} - \frac{e\cos(\theta - r)}{\cos r} - (n-1)e \approx e\left\{n(1 + \frac{r^2}{2}) - [1 - (n-1)^2\frac{r^2}{2}](1 + \frac{r^2}{2}) - n + 1\right\}$$

$$= e\,n\,(n-1)\frac{r^2}{2} = \frac{e\,(n-1)}{2n}\theta^2 \le \frac{\lambda}{10}$$

Soit $\theta_{max} = \sqrt{\frac{n}{5\,(n-1)}\frac{\lambda}{e}} = 0{,}019\,rd = 1$ degré

**3)1)**

WWW.TALIB24.COM




La différence de marche $\delta = [F(X)S_2M] - [F(X)S_1M]$ est égale à :

$$\delta = \frac{eX}{f} + \sqrt{(x+\frac{e}{2})^2 + D^2} - \sqrt{(x-\frac{e}{2})^2 + D^2}$$

$$\approx e(\frac{X}{f} + \frac{x}{D})$$

L'intensité, pour une fente source situé en $X$ de largeur $dX$ est donc :

$$dI = K\left\{1 + \cos[\frac{2\pi e}{\lambda}(\frac{X}{f} + \frac{x}{D})]\right\}dX$$

L'intensité pour la fente source de largeur $2\varepsilon$ sera :

$$I(x) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} K\left\{1 + \cos[\frac{2\pi e}{\lambda}(\frac{X}{f} + \frac{x}{D})]\right\}dX = \frac{I_0}{2}[1 + \sin_c(\frac{2\pi e \varepsilon}{\lambda f})\cos(\frac{2\pi e x}{\lambda D})]$$ où

$I_0 = 4K\varepsilon$

Le système de franges disparaît pour la première fois pour $\sin_c(\frac{2\pi e \varepsilon}{\lambda f}) = 0$, soit

$$\frac{2\pi e \varepsilon}{\lambda f} = \pi \Rightarrow 2\varepsilon = \frac{\lambda f}{e} = 50\,\mu m$$

**Remarque :** $\delta_F = \frac{e 2\varepsilon}{f}$ représente la différence de phase entre les rayons passant en $X = +\varepsilon$ et $X = -\varepsilon$ dans la fente ; le système de franges disparaît si $\frac{2\pi\delta_F}{\lambda} = 2\pi$ c'est-à-dire si toutes les phases sont représentées sur une périodicité soit $[0,2\pi]$

**3)2)**

$$I(x) = \frac{I_0}{2}[1 + \sin_c(\frac{2\pi e \varepsilon}{\lambda f})\cos(\frac{2\pi e x}{\lambda D})]$$

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \left|\sin_c(\frac{2\pi e \varepsilon}{\lambda f})\right|$$

**4)1)** De manière générale, pour une source monochromatique, la vibration lumineuse est le produit de la fonction de diffraction par la fonction d'interférence.

Pour une fente de largeur $a$, dans la direction $i = \frac{x}{f}$, la fonction diffraction est $\sin_c(\frac{\pi x a}{\lambda f})$

Pour ce qui est du phénomène d'interférence, nous sommes en présence du dispositif

WWW.TALIB24.COM

classique des fentes d'Young. La fonction d'interférence est $1+\exp(j\frac{2\pi\delta}{\lambda})$ où $\delta \approx \frac{d\,x}{f}$

L'intensité lumineuse est donc : $I(x) = \frac{I_0}{2}\sin_c^2(\frac{\pi\,x\,a}{\lambda\,f})[1+\cos(\frac{2\pi\,d\,x}{\lambda\,f})]$

**4)2)a) Le théorème de Babinet**

Nous considérons deux surfaces $S_1$ et $S_2$ complémentaires c'est à dire que la somme de ceux surfaces constituent un écran total ne laissant pas passer la lumière au-delà.

L'état vibratoire en $M$ sera nul : $s_1(M)+s_2(M)=0$.

$$I_1 = s_1 s_1^* = (-s_2)(-s_2^*) = I_2$$

**Les figures de deux surfaces complémentaires sont identiques.**

**4)2)b)**

La fonction de diffraction est inchangée, celle d'interférence correspond à un réseau classique

par transmission soit $\dfrac{\sin(\frac{\pi\,N\,x\,b}{\lambda\,f})}{\sin(\frac{\pi\,x\,b}{\lambda\,f})}$

L'intensité lumineuse est donc :

$$I(x) = I_0\sin_c^2(\frac{\pi\,x\,a}{\lambda\,f})\left[\frac{\sin(\frac{\pi\,N\,x\,b}{\lambda\,f})}{N\sin(\frac{\pi\,x\,b}{\lambda\,f})}\right]^2$$

Le phénomène de diffraction limite la largeur de la figure par la relation $x \in \left[-\frac{\lambda\,f}{a},+\frac{\lambda\,f}{a}\right]$

Les positions des maxima principaux sont données par : $x = \pm K\frac{\lambda\,f}{b}$ avec $K = 0,1,2,3,\ldots$

$K$ est égal au maximum à l'entier inférieur à $\frac{b}{a}$

La demi largeur d'un maximum principal est égal à $\delta x = \frac{\lambda\,f}{N\,b}$

**4)2)c)** On s'intéresse au pouvoir de résolution pour $K=1$

$$x_{\lambda+\Delta\lambda} - x_\lambda = \frac{(\lambda+\Delta\lambda)\,f}{b} - \frac{\lambda\,f}{b} = \frac{\Delta\lambda\,f}{b} \geq \delta x = \frac{\lambda\,f}{N\,b}$$

Le pouvoir de résolution est donné par : $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N = \frac{L}{b} = 30000$

**4)3)** $x_{\lambda+\Delta\lambda} - x_\lambda = \Delta x = \frac{(\lambda+\Delta\lambda)\,f}{b} - \frac{\lambda\,f}{b} = \frac{\Delta\lambda\,f}{b} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\Delta x} = \frac{b}{f} = 111\,\mathring{A}/mm$

WWW.TALIB24.COM

4)4)

Pour le premier ordre, $x \in [36, 63]\, mm$

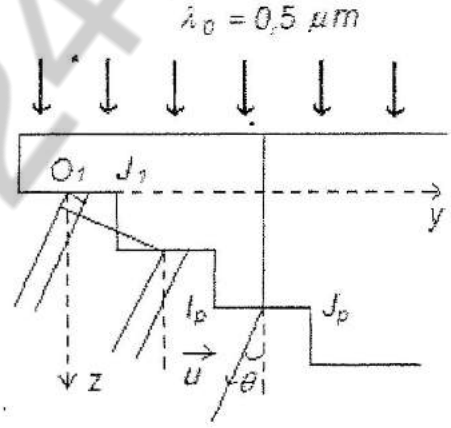
Pour le deuxième ordre, $x \in [72, 126]\, mm$

Pour le troisième ordre, $x \in [108, 189]\, mm$

Nous voyons qu'à partir du deuxième ordre il y a recouvrement entre les ordres.

Pour le premier ordre, l'angle maximal du rayon optique par rapport à l'axe optique est égal à $\frac{63}{150} = 0.42\, rd = 24$ degrés : un peu grand pour considérer que l'approximation de Gauss est vérifiée.

**5)1)** $dA_1(y) = K \exp(-j\frac{2\pi\, y \sin\theta}{\lambda})dy$




$dA_2(y) = dA_1(y)\exp(-j\varphi)$

$dA_3(y) = dA_1(y)\exp(-j2\varphi)$

.....

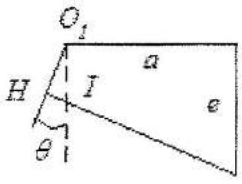
$dA_n(y) = dA_1(y)\exp[-j(n-1)\varphi]$

$$A(\vec{u}) = \underbrace{K\left\{\int_{-a/2}^{+a/2} \exp(-j\frac{2\pi\, y \sin\theta}{\lambda})dy\right\}}_{diffraction}\underbrace{\left\{\sum_{n=1}^{N} \exp[-j(n-1)\varphi]\right\}}_{interférence}$$

$$A(\vec{u}) = K' \sin_c(\frac{\pi\, a \sin\theta}{\lambda})\frac{1-\exp(-jN\varphi)}{1-\exp(-j\varphi)}$$

$$I(\vec{u}) = I_0 \sin_c^2(\frac{\pi\, a \sin\theta}{\lambda})\left[\frac{\sin(N\frac{\varphi}{2})}{N\sin(\frac{\varphi}{2})}\right]^2$$

**Calcul de** $\varphi$




$O_1H = O_1I\cos\theta$

$\tan\theta = \frac{e - O_1I}{a} \Rightarrow O_1I = e - a\tan\theta$

$O_1H = e\cos\theta - a\sin\theta$

WWW.TALIB24.COM

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left[(n-1)\,e - O_1 H\right] = \frac{2\pi}{\lambda}(n\,e - e\cos\theta + a\sin\theta)$$

Pour $\theta$ petit, $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left[(n-1)\,e + a\theta)\right]$

Les maxima principaux sont obtenus pour $\frac{\varphi}{2} = k\pi$ avec $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

Soit $\theta_M = \frac{k\lambda - (n-1)\,e}{a}$

Le phénomène de diffraction limite les valeurs de $\theta$ à $\theta \in \left[-\frac{\lambda}{a}, \frac{\lambda}{a}\right]$

Soit $\frac{(n-1)\,e}{\lambda} - 1 = 5999 \le k \le \frac{(n-1)\,e}{\lambda} + 1 = 6001$

**5)2)**

Pour $n$ et $\lambda$ donnés, la demi-largeur d'un maximum principal est égal à :

$$\delta\theta_M = \frac{\lambda}{2\pi\,a}\delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\,a}\frac{2\pi}{N} = \frac{\lambda}{a\,N}$$

Pour une variation de $n$ et $\lambda$, $\delta\theta_M = \frac{k\,\delta\lambda - e\,\delta n}{a} = \frac{\lambda}{a\,N} \Rightarrow$

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = R = kN - eN\frac{\delta n}{\delta\lambda} = 301920$$

**5)3)**

$$\theta_M^- = \frac{k^-(\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}) - (n^- - 1)\,e}{a} \quad ; \quad \theta_M^+ = \frac{k^+(\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}) - (n^+ - 1)\,e}{a}$$

Pour qu'il n'y ait pas de recouvrement entre deux spectres d'ordre successifs, il faut que :

$$\theta_M^-(k^- = k-1) \le \theta_M^+(k^+ = k) \Rightarrow k\lambda_0 - k\frac{\Delta\lambda}{2} - \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} - n^- e \le k\lambda_0 + k\frac{\Delta\lambda}{2} + n^+ e$$

$$e\,(n^+ - n^-) = e\frac{\partial n}{\partial\lambda}\Delta\lambda \ge k\Delta\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2} - \lambda_0 \Rightarrow \Delta\lambda \le \frac{\lambda_0}{k + \frac{1}{2} + e\frac{\partial n}{\partial\lambda}} \approx \frac{\lambda_0}{k} = 0{,}8\,\mathring{A}$$

**6)1)**

$$\delta = 2n\,e \;;\; \varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi\,n\,e}{\lambda}$$

$$r^2 = \rho \Rightarrow a_2 = a_1\rho\exp(-j\varphi) \;;\; a_3 = a_1\rho^2\exp(-j2\varphi) \;;\; \ldots;$$

$$a_N = a_1\rho^{N-1}\exp[-j(N-1)\varphi]$$

WWW.TALIB24.COM

$$a = \sum_{N=1}^{N\to\infty} a_N = a_1 \sum_{N=1}^{N\to\infty} \rho^{N-1} \exp[-j(N-1)\varphi] = \frac{a_1}{1-\rho\exp(-j\varphi)} \text{ car } \rho^{N\to\infty} \to 0$$

$$I \propto a a^* = \frac{A}{1+\rho^2-2\rho\cos\varphi} \Rightarrow I_{\max} = \frac{A}{(1-\rho)^2} \Rightarrow \frac{I}{I_{\max}} = \frac{(1-\rho)^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\varphi}$$

**6)2)**

**6)2)a)**

$$\delta' = 2n(e-\varepsilon) + 2n'\varepsilon = 2ne + 2(n'-n)\varepsilon = \delta + \delta(\delta)$$

$$\varphi' = \varphi + \delta\varphi = \frac{4\pi n e}{\lambda} + \frac{4\pi (n'-n)\varepsilon}{\lambda}$$

**6)2)b)**

$$I' = I(\varphi+\delta\varphi) = I(\varphi) + \left(\frac{dI}{d\varphi}\right)_\varphi \delta\varphi = I_{\max}\left[\frac{(1-\rho)^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\varphi} - \frac{2(1-\rho)^2\rho\sin\varphi}{(1+\rho^2-2\rho\cos\varphi)^2}\delta\varphi\right] = a + b\,\delta\varphi$$

**6)2)c)**

$$\gamma = \frac{I-I'}{I} = \frac{2\rho\sin\varphi}{1+\rho^2-2\rho\cos\varphi}\delta\varphi$$

**6)2)d)**

$$\delta\varphi = \frac{4\pi(n'-n)\varepsilon}{\lambda} = 0{,}069 \quad ; \quad \gamma = \frac{2\rho}{1+\rho^2}\delta\varphi = 0{,}067 < 0{,}1$$

(non visible)

**6)2)e)**

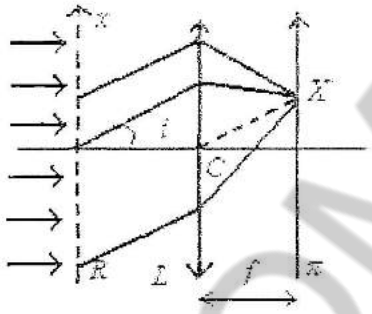
$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{2\rho\sin\varphi}{1+\rho^2-2\rho\cos\varphi}\right) = 0 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \text{ et } \sin\varphi = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}$$

Soit $\gamma_M = \frac{2\rho}{1-\rho^2}\delta\varphi \geq 0{,}1 \Rightarrow \delta\varphi = \frac{4\pi(n'-n)\varepsilon}{\lambda} \geq 0{,}1\frac{1-\rho^2}{2\rho}$

Soit $\varepsilon \geq 0{,}1\frac{1-\rho^2}{2\rho}\frac{\lambda}{4\pi(n'-n)} = \varepsilon_m = 0{,}2\,\mu m$

WWW.TALIB24.COM

7)1) Dans une direction $i = \frac{X}{f}$, l'amplitude est égale à :




$$s = K \int_{-l/2}^{+l/2} [1 + \sin(\frac{2\pi x}{p}) \exp(-j \frac{2\pi x X}{\lambda f})dx$$

$$s = Kl\left\{ \sin_c(\frac{\pi X l}{\lambda f}) - \frac{j}{2}\sin_c[\frac{\pi l}{\lambda}(\frac{X}{f} + \frac{\lambda}{p})] + \frac{j}{2}\sin_c[\frac{\pi l}{\lambda}(\frac{X}{f} - \frac{\lambda}{p})] \right\}$$

**7)2)**

Il y a trois pics centrés en $X = \left[ -\frac{\lambda f}{p}, 0, \frac{\lambda f}{p} \right]$

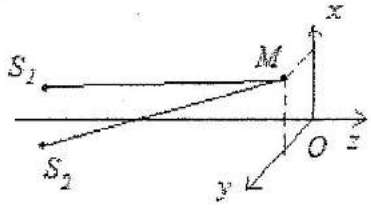
La largeur de chaque pic est égale à $2\frac{\lambda f}{l}$.

Puisque $p << l$, il n'y a pas recouvrement des pics et l'éclairement sera :

$$I = I_0 \left\{ \sin^2_c(\frac{\pi X l}{\lambda f}) + \frac{1}{4}\sin^2_c[\frac{\pi l}{\lambda}(\frac{X}{f} + \frac{\lambda}{p})] + \frac{1}{4}\sin^2_c[\frac{\pi l}{\lambda}(\frac{X}{f} - \frac{\lambda}{p})] \right\}$$

La figure correspond à trois pics bien distincts les uns des autres.

**8)1)a)** $I = \frac{I_0}{2}(1 + \cos\varphi) = \frac{I_0}{2}[1 + \cos(\frac{2\pi\delta}{\lambda})]$




$\delta = [S_2M] - [S_1M]$ : différence de marche

$$M\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad S_1\begin{Bmatrix} s/2 \\ 0 \\ -D \end{Bmatrix} ; \quad S_2\begin{Bmatrix} -s/2 \\ 0 \\ -D \end{Bmatrix}$$

$$\delta = \sqrt{(x + \frac{s}{2})^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{(x - \frac{s}{2})^2 + y^2 + D^2} \approx \frac{xs}{D} \text{ si } s << D$$

Par suite, $I(M) = \frac{I_0}{2}[1 + \cos(\frac{2\pi\delta}{\lambda})] = \frac{I_0}{2}[1 + \cos(\frac{2\pi s x}{\lambda D})]$

WWW.TALIB24.COM

L'interfrange est définie par la périodicité de l'intensité, soit $\frac{2\pi s(x+i)}{\lambda D} = \frac{2\pi s x}{\lambda D} + 2\pi \Rightarrow$

$i = \frac{\lambda D}{s}$, soit $I(M) = \frac{I_0}{2}[1+\cos(\frac{2\pi x}{i})]$

Dans le plan $Oxy$, les franges sont parallèles à l'axe des $y$.

**8)1)b)**

$S$ est déplacée suivant l'axe des $y$ de telle sorte que $S_1$ et $S_2$ subissent le même déplacement : la différence de marche n'est pas changée, la figure d'interférence non plus puisque les franges sont parallèles à l'axe des $y$.

$S$ est déplacée suivant l'axe des $x$ de telle sorte que $S_1$ et $S_2$ subissent le même déplacement : la différence de marche n'est pas changée, la figure d'interférence est déplacée en bloc suivant l'axe des $y$ de ce déplacement.

**8)2)a)**

$S$ donne deux sources $S_1$ et $S_2$

Nous considérons deux sources élémentaires cohérentes de dimension $dXdY$ notées

$$dS_1\begin{Bmatrix} X+s/2 \\ Y \\ -D \end{Bmatrix} \text{ et } dS_2\begin{Bmatrix} X-s/2 \\ Y \\ -D \end{Bmatrix}$$

$$\delta(M,dS_1,dS_2) = \sqrt{(x-X+\frac{s}{2})^2+(y-Y)^2+D^2} - \sqrt{(x-X-\frac{s}{2})^2+(y-Y)^2+D^2} \approx \frac{(x-X)s}{D}$$

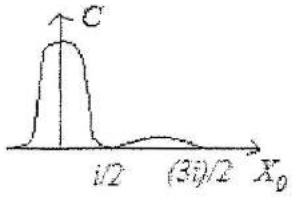
$$d^2I(M) = B(X,Y)[1+\cos\frac{2\pi(x-X)}{i}]dX\,dY$$

**8)2)b)**

$$I(M) = B_0\int_{-X_0}^{+X_0}\int_{-l/2}^{+l/2}[1+\cos\frac{2\pi(x-X)}{i}]\,dX\,dY = I_0'[1+\sin_c(\frac{2\pi X_0}{i})\cos(\frac{2\pi x}{i})]$$

avec $I_0' = B_0 4X_0 l$

$$C = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} = \left|\sin_c(\frac{2\pi X_0}{i})\right|$$




La première valeur nulle de $C$ se produit pour $\frac{2\pi X_0}{i} = \pi$, soit $X_0 = i/2$

WWW.TALIB24.COM

$$\delta(M,dS_1,dS_2) = \frac{(x-X)s}{D} \quad ; \quad \delta(M,dS_1',dS_2') = \frac{(x-X')s}{D}$$

$$\delta(M,dS_1',dS_2') - \delta(M,dS_1,dS_2) = \frac{(X-X')s}{D}$$

Pour $X - X' = i/2$, on obtient

$$\delta(M,dS_1',dS_2') - \delta(M,dS_1,dS_2) = \frac{(X-X')s}{D} = \frac{is}{2D} = \frac{\lambda}{2}$$

Ainsi, $\frac{2\pi}{\lambda}[\delta(M,dS_1',dS_2') - \delta(M,dS_1,dS_2)] = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = \pi$

Les interférences s'annulent deux à deux : $I(M,dS_1',dS_2') + I(M,dS_1,dS_2) = Cte = I_0'$

**9)1)**

Soit $M$ un point de la fente défini par $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$

La différence de marche entre deux rayons de direction $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ passant par $O$ et par $M$ est égale à $\delta = \vec{u}\,\overrightarrow{OM} = \alpha x + \beta y$

$$A_1(\alpha,\beta) = K\int_{-a/2}^{+a/2}\int_{-b/2}^{+b/2} \exp[j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)]dxdy = Kab\sin_c(\frac{\pi\alpha a}{\lambda})\sin_c(\frac{\pi\beta b}{\lambda})$$

$$\alpha = \frac{X}{f} \quad ; \quad \beta = \frac{Y}{f}$$

$$F(X,Y) = \frac{I_1(X,Y)}{I_1(0,0)} = \sin_c^2(\frac{\pi X a}{\lambda f})\sin_c^2(\frac{\pi Y b}{\lambda f})$$

**9)2)1)**

$$A_2(\alpha,\beta) = K\iint_{B-C}\exp(j\frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}\,\overrightarrow{OM})dS = K\iint_B \exp(j\frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}\,\overrightarrow{OM})dS - K\iint_C \exp(j\frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}\,\overrightarrow{OM})dS$$

$$= Kab\sin_c(\frac{\pi\alpha a}{\lambda})\sin_c(\frac{\pi\beta b}{\lambda}) - Ka'b'\sin_c(\frac{\pi\alpha a'}{\lambda})\sin_c(\frac{\pi\beta b'}{\lambda})$$

$a' << a$ et $b' << b \Rightarrow$ la figure de diffraction du cache est beaucoup plus large que celle de la fente et de faible amplitude.

WWW.TALIB24.COM

$$A_2(\alpha,\beta) \approx Kab\sin_c(\frac{\pi\alpha a}{\lambda})\sin_c(\frac{\pi\beta b}{\lambda}) - Ka'b'$$

$$F_2(X,Y) = \frac{I_2(X,Y)}{I_1(0,0)} = \sin_c^2(\frac{\pi X a}{\lambda f})\sin_c^2(\frac{\pi Y b}{\lambda f}) - 2\frac{s'}{s}\sin_c(\frac{\pi X a}{\lambda f})\sin_c(\frac{\pi Y b}{\lambda f})$$

A la figure de diffraction de la fente, se superpose une intensité proportionnelle à l'amplitude diffractée par le cache.

**9)2)2)**

Le cache est centré en $(x_0, y_0)$.

$$A_3(\alpha,\beta) = K\iint_{F-C}\exp(j\frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}\,\overrightarrow{OM})dS = K\iint_F\exp(j\frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}\,\overrightarrow{OM})dS - K\iint_C\exp(j\frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}\,\overrightarrow{OM})dS$$

$$= Kab\sin_c(\frac{\pi\alpha a}{\lambda})\sin_c(\frac{\pi\beta b}{\lambda}) - Ka'b'\exp[j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x_0 + \beta y_0)]\sin_c(\frac{\pi\alpha a'}{\lambda})\sin_c(\frac{\pi\beta b'}{\lambda}$$

$$F_3(X,Y) = \frac{I_3(X,Y)}{I_1(0,0)} = \sin_c^2(\frac{\pi X a}{\lambda f})\sin_c^2(\frac{\pi Y b}{\lambda f}) - 2\frac{s'}{s}\sin_c(\frac{\pi X a}{\lambda f})\sin_c(\frac{\pi Y b}{\lambda f})\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{X x_0}{f} + \frac{}{}$$

La figure de diffraction est modulée par l'interférence entre la fente et le cache.

**10)1) Optique géométrique**

**10)1)a)**

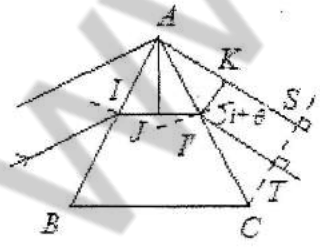
$\sin i = n\sin r$ avec $r = \frac{A}{2} = \frac{\pi}{6}$, soit $\sin i = \frac{n}{2} = 0{,}76 \Rightarrow i = 49°27'$

**10)1)b)**

$[PIJ] = PI + nIJ = (a-x)\cos(\frac{\pi}{2} - i) + nx\sin r = a\sin i$ (indépendant de $x$)

**10)2) Diffraction**

**10)2)1)a)**




La différence de marche $\delta_S - \delta_T = \delta_K - \delta_T = AK - nJI'$ est égale à :

$$\delta_S - \delta_T = x\sin(i+\theta) - nx\sin\frac{A}{2} = x\sin i\cos\theta + x\cos i\sin\theta - x\sin i$$

$$\approx \theta x\cos i$$

$$\varphi = \frac{2\pi\theta x\cos i}{\lambda}$$

WWW.TALIB24.COM

**10)2)1)b)**

$$s = \int_0^a K\cos(\omega t + \frac{2\pi\theta x\cos i}{\lambda})\,dx = \frac{K\lambda}{2\pi\theta\cos i}\left[\cos(\omega t + \frac{2\pi\theta a\cos i}{\lambda}) - \cos(\omega t)\right]$$

$$= Ka\cos(\omega t + \frac{\pi\theta a\cos i}{\lambda})\sin_c(\frac{\pi\theta a\cos i}{\lambda})$$

$$E \propto \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s^2 dt \Rightarrow E = E_0 \sin_c^2(\frac{\pi\theta a\cos i}{\lambda})$$

**10)2)1)c)** Le premier minimum est obtenu pour :

$$\frac{\pi\theta_m\, a\cos i}{\lambda} = \pm\pi \quad \Rightarrow \quad \theta_m = \pm\frac{\lambda}{a\cos i} = \pm 3\,10^{-5}\ rd = \pm 6''$$

**10)2)2)a)**

Le prisme a la forme d'un triangle équilatéral : $z = x$

$$s' = \int_0^a K\exp(-\alpha x)\cos(\omega t + \frac{2\pi\theta x\cos i}{\lambda})\,dx = K\frac{\alpha\cos(\omega t) - \frac{2\pi\theta\cos i}{\lambda}\sin(\omega t)}{\alpha^2 + (\frac{2\pi\theta\cos i}{\lambda})^2}$$

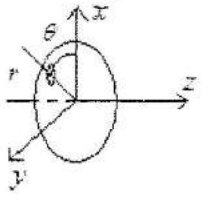
$$E' \propto \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s^2 dt \Rightarrow E = \frac{E_0'}{\alpha^2 + (\frac{2\pi\theta\cos i}{\lambda})^2}$$

**10)2)2)b)**

$$E' = E_0'/2 \Rightarrow \theta_m' = \pm\frac{\alpha\lambda}{2\pi\cos i} = \pm 0{,}00154\,rd = 5'20''$$

**11)1)**

$$s = \iint_{oc} A\exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}x\sin i)\,dx\,dy \quad ; \; x = r\cos\theta \; ; \; dx\,dy \to r\,dr\,d\theta$$



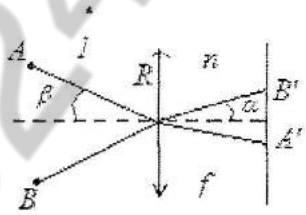

$$s = \int_0^R\int_0^{2\pi} A\exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}r\cos\theta\sin i)\,r\,dr\,d\theta = A\pi R^2\,\frac{J_1(\frac{2\pi}{\lambda}R\sin i)}{\frac{2\pi}{\lambda}R\sin i}$$

WWW.TALIB24.COM

$$I = I_0 \left[ \frac{2\,J_1(\frac{2\pi}{\lambda} R \sin i)}{\frac{2\pi}{\lambda} R \sin i} \right]^2$$

**11)2)** Dans un milieu d'indice $n$, si $\lambda$ reste la longueur d'onde dans le vide, il convient de remplacer $\lambda$ par $\lambda / n$.

L'intensité doit être écrite $$I = I_0 \left[ \frac{2\,J_1(\frac{2\pi\, n}{\lambda} R \sin i)}{\frac{2\pi\, n}{\lambda} R \sin i} \right]^2$$, la tâche de diffraction a un rayon donné par $\frac{2\pi\, n}{\lambda} R \sin i_m = 3{,}832$, soit $\sin i_m \approx i_m = \frac{3{,}832\,\lambda}{2\pi\, n\, R} = 0{,}61 \frac{\lambda}{n\, R}$




Les points $A'$ et $B'$ sont distincts (donc les points $A$ et $B$ sont vus distincts) si $\alpha = \frac{\beta}{n} = \frac{A'B'}{2f} \geq i_m = 0{,}61 \frac{\lambda}{n\, R}$

Par suite, $\beta \geq 0{,}61 \frac{\lambda}{R} = \beta_m = 0{,}2410^{-3}\ rd = 0{,}8'$

$$A'B' \geq 1{,}22 \frac{\lambda f}{n\, R} = A'B'_m = 5{,}9\ \mu m$$

WWW.TALIB24.COM