ELECTRICITE 3

Première partie :

Electrostatique des milieux diélectriques

WWW.TALIB24.COM

SOMMAIRE

I. LE DIPOLE ELECTROSTATIQUE

II. LES MILIEUX DIELECTRIQUES

III. LES MILIEUX DIELECTRIQUES LINEAIRES HOMOGENES ET ISOTROPES

IV. ENERGIE ELECTROSTATIQUE EN PRESENCE DE DIELECTRIQUES

V. LES MILIEUX DIELECTRIQUES DU POINT DE VUE MICROSCOPIQUE

WWW.TALIB24.COM

Electrostatique des milieux diélectriques

Introduction

L'introduction d'une lame isolante entre les armatures d'un condensateur plan, isolé, fait diminuer la d.d.p U à ses bornes.

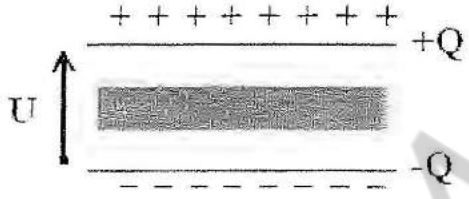


Fig. I.1

L'introduction de la lame a pour effet de croître la capacité du condensateur. On peut conclure qu'en présence d'un champ extérieur, un isolant peut modifier les propriétés électriques de l'espace environnant.

I. Le dipôle électrostatique

I.1 Définition

Un dipôle électrostatique (Fig. I.2) est un couple de charges ponctuelles opposées (-q) et (+q), séparées par une distance a, très faible devant la distance r les séparant du point d'observation M. ($a << r$).

I.2 Le moment dipolaire

Un dipôle $\left[A_{(-q)}, B_{(+q)}\right]$ est caractérisé par sont moment dipolaire :

$$\vec{p} = |q|\,\overrightarrow{AB},$$

vecteur dirigé de la charge négative vers la charge positive.

<u>Unités du moment dipolaire :</u>

- Coulomb mètre (Cm)

- Debye ($1\,\text{Debye} = \frac{1}{3}.10^{-29}\,\text{C.m}$).

WWW.TALIB24.COM

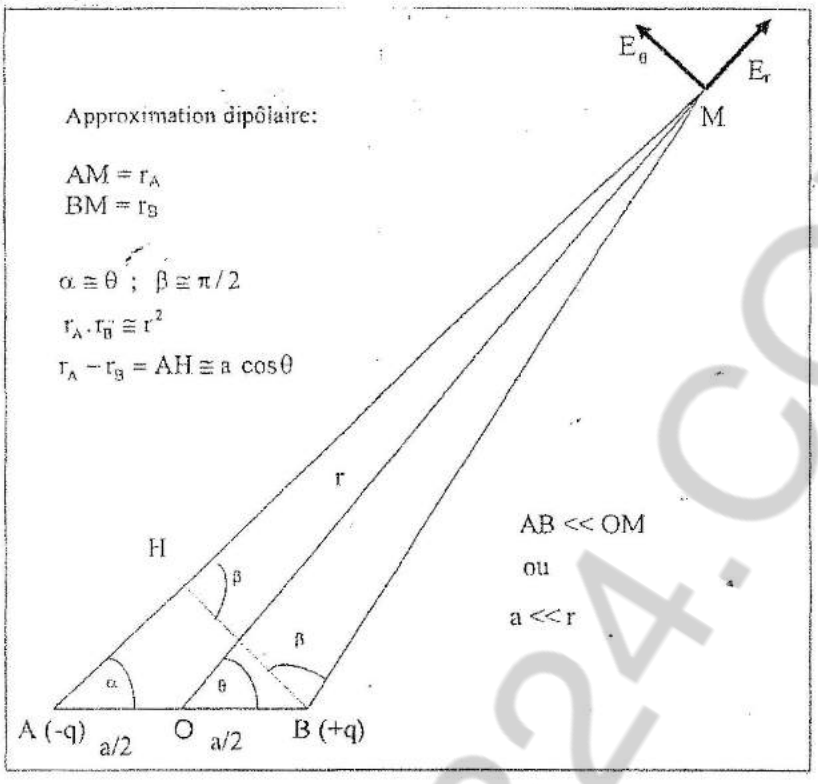


Fig. I.2

I.3 Potentiel électrostatique crée par un dipôle

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{r_A - r_B}{r_A r_B}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p.\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3}$$

I.4 Champ électrostatique crée par un dipôle

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(r,\theta)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2p\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{p\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta\right)$$

<u>Autre expression du champ :</u>

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3(\vec{p}.\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}\right\}}$$

WWW.TALIB24.COM

Positions de Gauss :

$$\vec{E}(r,0)=\vec{E}(r,\pi)=\begin{cases}\vec{E}(r,0)=\vec{E}(r,\pi)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2\vec{p}}{r^3}\\ \vec{E}\left(r,\dfrac{\pi}{2}\right)=\vec{E}\left(r,\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{p}}{r^3}\end{cases}$$

I.5 Action d'un champ extérieur sur un dipôle

I.5.1 Action d'un champ uniforme

a) Résultante des forces appliquées :

$$\vec{F}=\vec{F}(A)+\vec{F}(B)=\vec{E}_0(q-q)=\vec{0}$$

Conclusion :

En champ uniforme, un dipôle ne peut subir de translation.

b) Moment résultant :

$$\vec{\Gamma}/O=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}(A)+\overrightarrow{OB}\wedge\vec{F}(B)$$

$$\vec{\Gamma}/O=q.\overrightarrow{AB}\wedge\vec{E}_0=\vec{p}\wedge\vec{E}_0$$

Positions d'équilibre :

$\theta=0$: Equilbre stable, $(\vec{p},\vec{E})$ Parallèles (Energie potentielle minimale).

$\theta=\pi$: Equilbre instable, $(\vec{p},\vec{E})$ Antiparallèles (Energie potentielle maximale).

Conclusion :

En champ uniforme, un dipôle subit l'effet du couple (rotation), qui l'oriente dans la direction du champ appliqué.

I.5.2 Action d'un champ non uniforme

En plus de l'effet du moment, le dipôle subit la résultante :

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}_B-\vec{E}_A\right)=q\,d\,\vec{E}$$

$$\vec{F}=\left(\vec{p}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{E}$$

Conclusion : En champ non uniforme, le dipôle subit à la fois une rotation et une translation.

WWW.TALB24.COM

I.6 Energie potentielle d'un dipôle dans un champ

$$\boxed{W_p = q(V_B - V_A)}$$

$$\boxed{W_p = q\,dV = q\,\overrightarrow{grad}\,V.\ \overrightarrow{AB}}$$

$$\boxed{W_p = -\vec{p}.\vec{E}}$$

$$W_p = -p.E.\cos\theta$$

La position d'équilibre stable correspond au minimum de l'énergie potentielle :

$$W_{min} = -pE.$$

La position d'équilibre instable correspond au maximum de l'énergie potentielle :

$$W_{max} = pE.$$

Conclusion :

En général, dans un champ extérieur, un dipôle libre évolue en vue de minimiser son énergie potentielle. Il s'oriente dans le sens du champ en se translatant vers la région où le champ est plus intense.

Remarque : Un dipôle voit pratiquement un champ uniforme.

WWW.TALIB24.COM

II. Les milieux diélectriques

II.1 Définition

Un diélectrique, ou isolant, est un corps ne possédant pas de porteurs de charges libres, ou en d'autres termes, c'est un corps où les charges sont liées. A titre de comparaison, dans un conducteurs, les porteurs sont libres et peuvent en conséquence se mouvoir sous l'effet d'un champ appliqué si faible soit il.

Si un isolant est chargé, ses charges sont alors figées (fixes ou liées).

Remarque : Sous l'effet de champ très intense, un isolant peut devenir conducteur (phénomène de claquage).

II.2 Isolants polaires et apolaires

Un isolant est dit polaire si ses molécules possèdent un moment dipolaire intrinsèque.

Exemple d'isolants polaires: HCl, H_2O.

Dans le cas contraire, il est dit apolaire (non polaire).

Exemple d'isolants apolaires : O_2, H_2, CO_2.

II.3 Isolants en présence de champ électrique – Polarisation

En appliquant un champ extérieur à un isolant polaire, les molécules de celui-ci s'orientent pour aligner leurs moments dipolaires avec le champ (minimisation de l'énergie potentielle). On dit alors que l'isolant est polarisé. C'est la polarisation d'orientation.

Si l'isolant est apolaire, le champ appliqué induit dans chaque molécule un dipôle électrostatique. Ceci résulte d'une déformation par le champ du nuage électronique moléculaire. Cette déformation consiste en un décalage des barycentres des charges positives et négatives au sein de la molécule. Dans ce cas aussi, l'isolant est dit polarisé. C'est la polarisation induite.

Isolant polaire : *Polarisation d'orientation*
Isolant apolaire : *Polarisation induite*

Remarque :

La polarisation induite disparaît aussitôt avec le champ extérieur. Par contre, la polarisation d'orientation peut persister en l'absence du champ polarisant. Dans ce dernier cas, la dépolarisation de l'isolant (polaire) est accélérée par l'agitation thermique.

WWW.TALIB24.COM

II.4 Effets électrostatiques d'un isolant polarisé

II.4.1 Le vecteur polarisation

Chaque élément de volume $d\tau_A$, centré autour du point A d'un diélectrique polarisé (Fig. I.3), possède un moment dipolaire $d\vec{p}_A$.

On définit le vecteur Polarisation au point A du diélectrique par :

$$\vec{P}_A = \frac{d\vec{p}_A}{d\tau_A}.$$

Son module traduit la concentration des dipôles orientés au sein du diélectrique. Si le vecteur polarisation $\vec{P}$ est constant en tout point du diélectrique, la polarisation est dite uniforme.

Unité de polarisation : Cm^{-2}

II.4.2 Potentiel électrostatique crée par un isolant polarisé en un point extérieur

Chaque élément de volume $d\tau_A$ du diélectrique polarisé comporte un ensemble de dipôles, de moment dipolaire élémentaire $d\vec{p} = \vec{P}\,d\tau$.. Le potentiel créé en un point M extérieur par cet élément de volume $d\tau_A$ est alors :

$$\boxed{dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\vec{p}(A)\overrightarrow{AM}}{AM^3}}$$

$$\boxed{dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}(A)d\tau\ \overrightarrow{AM}}{AM^3}}$$

Le potentiel créé par l'ensemble du diélectrique en M vaudra donc:

$$\boxed{V_{diel}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{diel}\vec{P}(A).\frac{\vec{r}}{r^3}\ d\tau,}$$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$

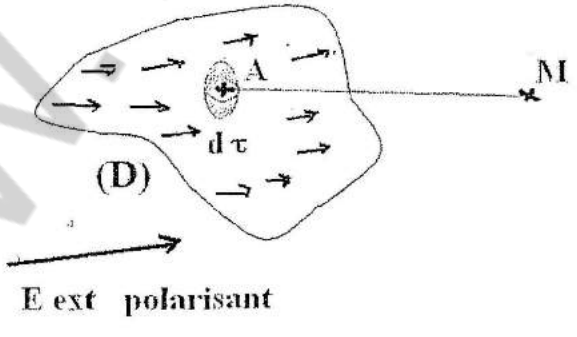


Fig. I.3

WWW.TALB24.COM

Or

$$\boxed{\frac{\vec{r}}{r^3} = \overrightarrow{\text{grad}}_A\left(\frac{1}{AM}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M\left(\frac{1}{AM}\right).}$$

On a donc

$$\boxed{V_{diel}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{diel} \vec{P}.\overrightarrow{\text{grad}}_A\left(\frac{1}{AM}\right)d\tau.}$$

De plus on a, pour tout champ de vecteurs $\vec{U}$ et tout champ de scalaires f ,

$$\boxed{\text{div}\left(f\,\vec{U}\right) = f\,\text{div}\vec{U} + \vec{U}.\overrightarrow{\text{grad}}\,f}$$

et donc

$$V_{diel}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{diel}\left[\text{div}_A\left(\frac{\vec{P}(A)}{AM}\right) - \frac{1}{AM}\text{div}_A\vec{P}\right]d\tau.$$

Cette relation s'écrit grâce au théorème de Green Ostrogradsky:

$$\boxed{V_{diel}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\Sigma}\frac{\vec{P}(A).\vec{n}\,dS}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{diel}\frac{1}{r}\text{div}\vec{P}d\tau.}$$

On voit alors que ce potentiel est rigoureusement équivalent au potentiel créé par :

- une distribution surfacique de charges dans le vide, de densité $\sigma_p = \vec{P}.\vec{n}$ (pour le premier terme).
- une distribution volumique de charges dans le vide, de densité $\rho_p = -\text{div}\vec{P}$ (pour le second terme).

Le potentiel crée par les charges de polarisation est donc :

$$\boxed{V_{diel}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\Sigma}\frac{\sigma_p\,dS}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho_p\,d\tau}{r},}$$

Avec :

$$\sigma_p = \vec{P}.\vec{n}\ ,\ \text{et}\quad \rho_p = -\text{div}\vec{P}\,.$$

D'où l'équivalence (Fig.I.4) :

WWW.TALIB24.COM

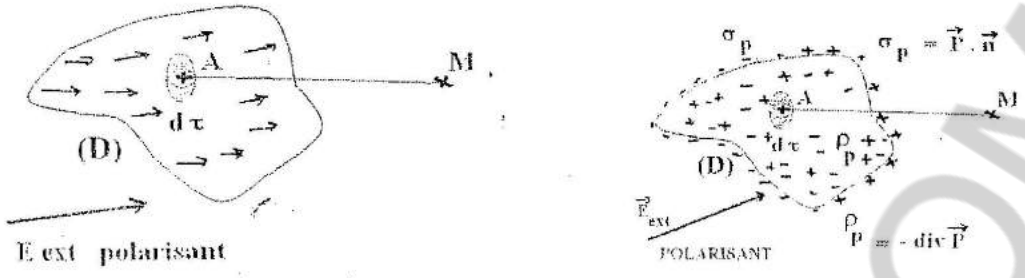


Fig. I.4

Remarque :

Un diélectrique initialement neutre, le reste aussi après polarisation par un champ extérieur. On comprend alors que la somme des charges de polarisation, volumiques et surfacique est nulle.

$$Q^{p}_{vol} + Q^{p}_{surf} = 0 .$$

II.4.3 Champ crée par un diélectrique polarisé en un point extérieur

Ce champ est le même que celui qui serait crée par les deux distribution de charges de polarisation ρ_p et σ_p.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iiint_D \frac{\rho_P \vec{r}}{r^3} d\tau + \iint_S \frac{\sigma_P \vec{r}}{r^3} ds\right]$$

et peut être calculé également par la relation

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$$

N.B : Bien entendu, si l'isolant est chargé avec des charges libres ρ_L et σ_L, l'expression globale du champ crée par le diélectrique est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iiint_D \frac{(\rho_P + \rho_L)\vec{r}}{r^3} d\tau + \iint_S \frac{(\sigma_P + \sigma_L)\vec{r}}{r^3} ds\right].$$

II.4.4 Potentiel et champ crées par un diélectrique en un point intérieur

Le raisonnement précédent s'étend à l'intérieur du diélectrique, E(M) et V(M) ont respectivement mêmes expressions qu'en un point à l'extérieur

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iiint_D \frac{\rho_P \vec{r}}{r^3} d\tau + \iint_S \frac{\sigma_P \vec{r}}{r^3} ds\right]$$

WWW.TALIB24.COM

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\iiint \frac{\rho_p}{r}\,d\tau + \iint_S \frac{\sigma_p}{r}\,ds\right]}$$

II.4.5 Etude d'exemples de champs crées par des corps polarisés:

Exp. 1 : *Plaque uniformément polarisée*

Soit une plaque homogène de dimensions très grandes devant son épaisseur, de vecteur polarisation $\vec{P}$ uniforme et perpendiculaire à ses faces.

Montrer que le champ crée par les charges de polarisation à l'intérieur du diélectrique est :

$$\vec{E}_p = \vec{E}_d = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_o}$$

et qu'à l'extérieur du diélectrique :

$$\vec{E}_p = \vec{0}.$$

En déduire que cette distribution est identique à celle d'un condensateur plan dans le vide.

Remarque :

$\vec{E}_d$ est de sens opposé au vecteur polarisation $\vec{P}$ qui lui a donné naissance, d'où son appellation de champ dépolarisant.

Exp. 2 : *Champ crée par une boule diélectrique uniformément polarisée en son centre (TD).*

Exp. 3 : *Champ au centre d'une cavité sphérique creusée au sein d'un diélectrique polarisé (Voir TD).*

Bilan des champs :

En tout point M de l'espace, intérieur ou extérieur au diélectrique, on a coexistence du champ polarisant : $\vec{E}_{ext}$ et du champ de polarisation $\vec{E}_p$. Le champ total en M est donc (Fig. I.5):

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_p$$

$$\vec{E} \equiv \vec{E}_T$$

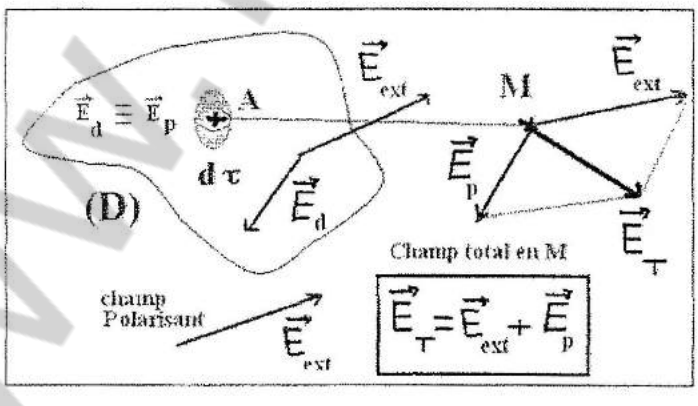


Fig. I.5

WWW.TALIB24.COM

II.4.6 Courants de polarisation

Lorsque le champ extérieur (polarisant) est variable dans le temps, la polarisation l'est aussi, et on écrit

$$\vec{P} = \vec{P}(t)$$

A cette polarisation correspond un courant, dit courant de polarisation, de densité volumique définie par :

$$\boxed{\vec{j}_v = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}$$

Ce courant s'établit aussi pendant le régime transitoire précédant la polarisation.

II.5 Le vecteur excitation électrique $\vec{D}$

II.5.1 Définition

Soit M point à <u>l'intérieur</u> du diélectrique polarisé. D'après le théorème de Gauss local, on a :

$$\mathrm{div}\vec{E}(M) = \frac{1}{\varepsilon_o}\left[\rho_L(M) + \rho_P(M)\right]$$

On tient compte aussi bien des charges fictives de polarisation ρ_P que des charges réelles ρ_L.

Or

$$\boxed{\rho_P = -\mathrm{div}\vec{P}}$$

$$\varepsilon_o \mathrm{div}\vec{E}(M) = \rho_L(M) - \mathrm{div}\vec{P}$$

$$\mathrm{div}\left(\varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_L$$

Le vecteur excitation électrique $\vec{D}$ est défini par :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}}$$

Le vecteur $\vec{D}$ est aussi appelé vecteur <u>Déplacement électrique</u>.

De cette définition découle la relation importante suivante, baptisée Théorème de Gauss local pour le vecteur $\vec{D}$:

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho_L(M)$$

<u>Remarque importante :</u>

Avec l'introduction du vecteur $\vec{D}$, on ignore les charges de polarisation et on ne tient compte que des charges réelles ρ_L.

WWW.TALIB24.COM

II.5.2 Théorème de Gauss généralisé

$$\iint_{\Sigma_G} \vec{D}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{\tau(\Sigma_G)} \operatorname{div}\vec{D}(M)d\tau = \iiint_{\tau(\Sigma_G)} \rho_L d\tau$$

$$\iint_{\Sigma_G} \vec{D}.\overrightarrow{dS} = Q_L^{int}$$

Enoncé : Le flux du vecteur $\vec{D}$ à travers une surface fermée Σ_G est égal à la charge totale libre intérieure à cette surface.

II.5.2 propriétés de $\vec{E}$ et $\vec{D}$ à l'interface entre deux milieux

a) Relation de passage pour le vecteur $\vec{D}$

Soit un point M de l'interface (Σ) séparent deux milieux diélectriques 1 et 2.

(S_f) : Surface fermée élémentaire, constituée par le cylindre aplati, de surface latérale (Σ_{lat}) et de bases (ds_1) et (ds_2) (Fig. I.6).

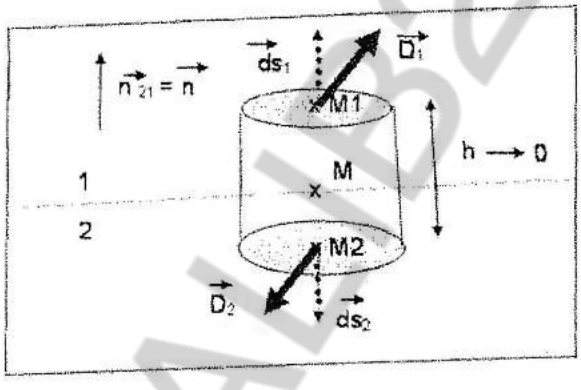


Fig. I.6

$\vec{n}_{21} = \vec{n}$: vecteur normal à l'interface (Σ) en M, orienté de 2 vers 1

M_1 et M_2 : deux points au voisinage de M sur la normale $M\vec{n}$, situés de part et d'autre de (Σ).

$$\vec{D}_1(M) = \lim_{M_1 \to M} \vec{D}\ (M_1)$$

$$\vec{D}_2(M) = \lim_{M2 \to M} \vec{D}\ (M_2)$$

Appliquons le théorème de Gauss généralisé a la surface fermée (S_f):

WWW.TALIB24.COM

$$\phi_{ST}(\vec{D}) = \sigma_L\, ds$$

$$\vec{D}(M_1).\overrightarrow{dS_1} + \vec{D}(M_2).\overrightarrow{dS_2} + d\phi_{Lat} = \sigma_L\, dS$$

$$\overrightarrow{ds_1} = ds\,\vec{n} \quad ; \quad \overrightarrow{ds_2} = -ds\,\vec{n} \;;\; d\phi_{Lat} \to 0$$

$$\vec{D}_1(M)\vec{n} - \vec{D}_2(M)\vec{n} = \sigma_L(M)$$

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right).\vec{n} = \sigma_L(M)$$

ou encore

$$\boxed{D_{1n} - D_{2n} = \sigma_L(M)}.$$

Conclusion :

A la traversée d'une interface chargée réellement, la composante normale du vecteur $\vec{D}$ subit une discontinuité égale à la densité de charges liées σ_L au point de la traversée (Fig. I.8).

b) Relation de passage pour le vecteur $\vec{E}$ (Fig. I.7)

$$\vec{E}_1(M) = \lim_{M_1 \to M} \vec{E}\,(M_1)$$

$$\vec{E}_2(M) = \lim_{M2 \to M} \vec{E}\,(M_2)$$

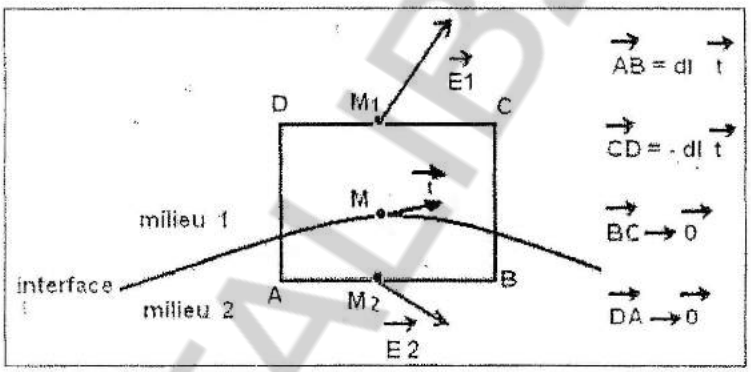


Fig. I.7

En régime stationnaire on toujours :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}\ .$$

$$\oint_{(ABCD)} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \iint \overrightarrow{rot}\,\vec{E}.\,\overrightarrow{ds} = 0$$

$$\vec{E}_2.\overrightarrow{AB} + \vec{E}.\overrightarrow{BC} + \vec{E}_1.\overrightarrow{CD} + \vec{E}.\overrightarrow{DA} = 0$$

$$dl\,\vec{E}_2.\vec{t} + 0 - dl\,\vec{E}_1.\vec{t} + 0 = 0$$

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

WWW.TALIB24.COM

Conclusion :

A la traversée d'une interface, chargée ou non, la composante tangentielle du champ électrostatique E est continue (Fig. I.8).

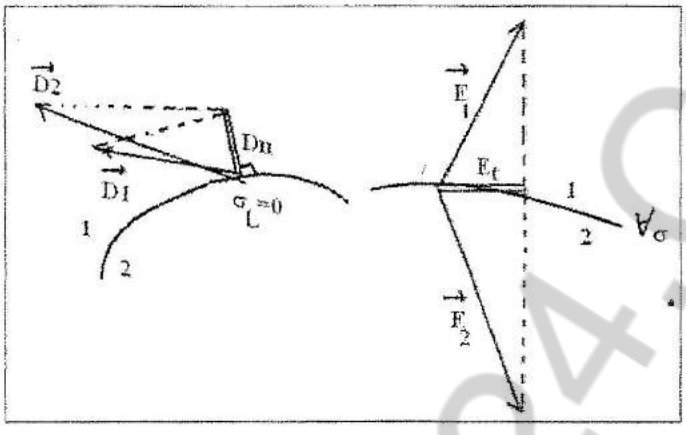


Fig. I.8

Application :

Interface métal – isolant ($\vec{E}$ est normal à la surface du métal).

WWW.TALIB24.COM

III. Milieux diélectriques Linéaires Homogènes et Isotropes (L.H.I)

III.1 Définitions

a) Milieu linéaire :

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

b) Milieu homogène :

La matrice $[\varepsilon]$ des permittivités est

Symétrique, c à d $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, donc diagonalisable. Dans la base de ses vecteurs propres, les composantes des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{D}$ satisfont la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \varepsilon_1 E_1 \\ D_2 = \varepsilon_2 E_2 \\ D_3 = \varepsilon_3 E_3 \end{cases}$$

Il s'ensuit que les composantes du vecteur polarisation satisfont aussi les relations:

$$\begin{cases} D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_0 E_1 + P_1 \\ D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \varepsilon_0 E_2 + P_2 \\ D_3 = \varepsilon_3 E_3 = \varepsilon_0 E_3 + P_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 \\ P_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_2 \\ P_3 = (\varepsilon_3 - \varepsilon_0) E_3 \end{cases}$$

c) Milieu isotrope :

Toutes les grandeurs physiques sont indépendantes de la direction. Ainsi :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \varepsilon E_1 \\ D_2 = \varepsilon E_2 \\ D_3 = \varepsilon E_3 \end{cases}$$

III.2 Propriétés d'un milieu L.H.I :

P. 1 : Dans un diélectrique L.H.I, le vecteur Déplacement $\vec{D}$ et le champ total $\vec{E}$ sont parallèles et de même sens ($\vec{D} // \vec{E}$).

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad ; \quad \varepsilon_r > 1$$

ε_r : Permittivité diélectrique relative

ε : Permittivité diélectrique absolue du milieu L.H.I

ε_0 : Permittivité diélectrique absolue du vide

WWW.TALIB24.COM

P. 2 : Dans un diélectrique L.H.I, le vecteur Polarisation $\vec{P}$ et le champ total $\vec{E}$ sont parallèles et de même sens ($\vec{P} // \vec{E}$).

$$\begin{cases} D_1 = \varepsilon\ E_1 = \varepsilon_o E_1 + P_1 \\ D_2 = \varepsilon\ E_2 = \varepsilon_o E_2 + P_2 \\ D_3 = \varepsilon\ E_3 = \varepsilon_o E_3 + P_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1 = (\varepsilon\ - \varepsilon_o) E_1 \\ P_2 = (\varepsilon\ - \varepsilon_o) E_2 \\ P_3 = (\varepsilon\ - \varepsilon_o) E_3 \end{cases}$$

$$\vec{P}\ = (\varepsilon\ - \varepsilon_o)\vec{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_o\ \ ;\ \ \varepsilon - \varepsilon_o = \varepsilon_o(\varepsilon_r - 1)\ ;\ \varepsilon_r - 1 = \chi_e\ ;\ \chi_e > 0$$

$$\boxed{\vec{P}\ = \chi_e\ \varepsilon_0\ \vec{E}}$$

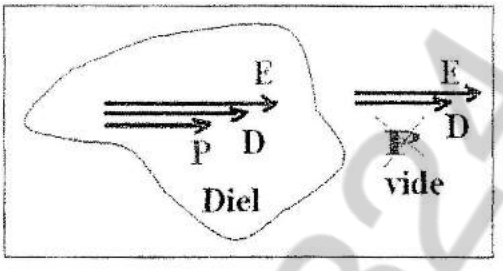


Fig. I.9

III.3 Electrostatique des milieux L.H.I

<u>Equations locales :</u>

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\text{div}\,\vec{D} = \rho_L$$

$$\text{div}(\varepsilon\ \vec{E}) = \rho_L$$

Théorème de Gauss local
$\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho_L}{\varepsilon}$

$$\begin{cases} \text{div}\vec{E} = \dfrac{\rho_L}{\varepsilon} \\ \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \end{cases}$$

Equation de poisson
$\Delta V + \dfrac{\rho_L}{\varepsilon} = 0$

WWW.TALIB24.COM

Conséquence :

Dans un diélectrique L.H.I, toutes les lois de l'électrostatique du vide restent valables, à condition de remplacer la permittivité diélectrique ε_0 du vide par celle du milieu, ε.

Exemples :

- Force de Coulomb entre charges ponctuelles
- Théorème de Gauss

Attention ! Dans le cas de plusieurs milieux L.H.I, respecter les relations de passage aux interfaces.

III.4 Relation entre ρ_L et ρ_P dans un milieu L.H.I

Pour tout milieu diélectrique, linéaire ou non, on a toujours :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Si en plus le milieu est L.H.I, on a :

$$\vec{D} = \varepsilon\, \vec{E}$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \frac{\varepsilon_0 \vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{D} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \vec{D}$$

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \operatorname{div} \vec{D},$$

d'où la relation importante :

$$\rho_P = -\left[\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right] \rho_L$$

$$\varepsilon_r > 1$$

Conclusions :

Localement, dans un diélectrique L.H.I chargé, les charges volumiques de polarisation et les charges réelles sont de signes opposés. Un diélectrique L.H.I neutre et polarisé, ne peut porter que des charges de polarisation surfaciques.

WWW.TALIB24.COM

VI. Energie Electrostatique en présence de diélectriques

Un milieu diélectrique chargé (Fig. I.10) emmagasine l'énergie potentielle électrostatique W, donnée par :

$$w = \frac{1}{2}\iiint_{diel} \rho v \, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_{espace} \rho v \, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_{espace} \mathrm{div}\vec{D}.v.d\tau$$

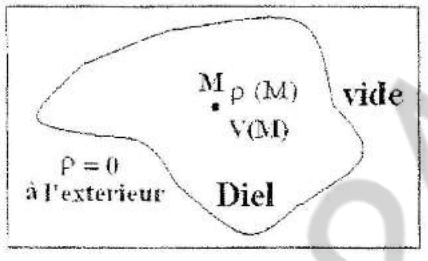


Fig. I.10

$$w = \frac{1}{2}\left[\iiint_{\tau} \mathrm{div}\left(\vec{D}.V\right)d\tau - \iiint_{espace} \vec{D}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}V \, d\tau\right]$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{S_f(espace)} V\vec{D}.\overrightarrow{ds} + \frac{1}{2}\iiint_{espace} \vec{E}.\vec{D} \, d\tau$$

$$\left.\begin{array}{l} v \sim \frac{1}{r} \\ D \sim \frac{1}{r^2} \\ ds \sim r^2 \end{array}\right\} \; vDds \sim \frac{1}{r} \to 0$$

$$r_{Sphère-espace} \to \infty$$

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\iiint_{espace} \vec{E}.\vec{D} \, d\tau}$$

<u>Densité d'énergie dans l'espace</u>:

$$\boxed{w^* = \frac{dw}{d\tau} = \frac{1}{2}\vec{E}.\vec{D}}$$

WWW.TALIB24.COM

Pour un diélectrique L.H.I :

$$w = \frac{1}{2}\iiint_{espace} \varepsilon\, E^2 d\tau$$

$$w^* = \frac{dw}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Cas du vide :

$$w^* = \frac{dw}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

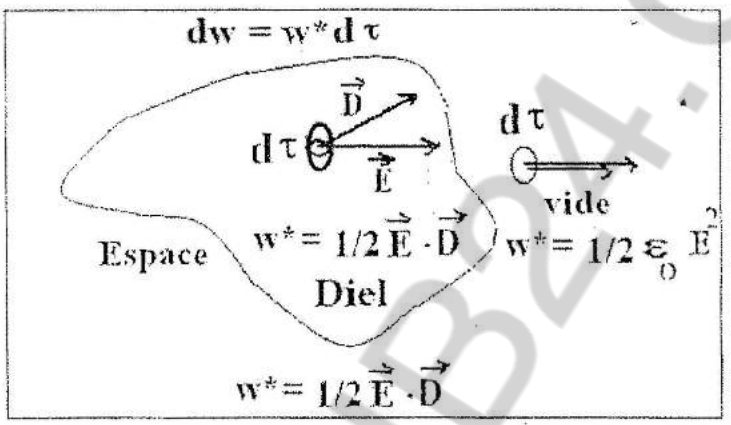


Fig. I.11

WWW.TALIB24.COM

V. Les milieux diélectriques du point de vue microscopique

On se limite à des diélectriques non chargés $\rho_L = 0$ et à polarisation $\vec{P}$ uniforme, induite par un champ électrique extérieur.

V.1 Champ électrique macroscopique

A l'intérieur du diélectrique, règne le champ total $\vec{E}$, <u>localement</u> dénommé champ macroscopique :

$$\vec{E}_m = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_P$$

$\vec{E}_{ext}$ est le champ extérieur, polarisant *(crée par les charges extérieures au diélectrique).*

$\vec{E}_P$ est le champ crée par les charges de polarisation dans le diélectrique.

V.2 Champ électrique local

Le champ local $\vec{E}_{loc}(M)$, en un point M intérieur au diélectrique, est le champ agissant sur la molécule située en M et induisant sa polarisation (Fig. I.12).

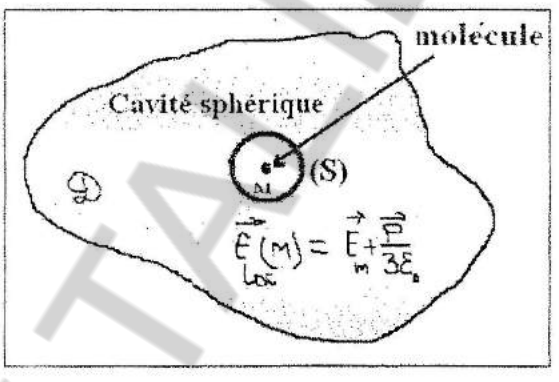


Fig. I.12

C'est donc le champ crée en M par l'ensemble de toutes les charges (extérieures ou intérieures au diélectrique) à l'exception de celles situées en M.

$$\vec{E}_{loc}(M) = \underbrace{\vec{E}_{ext}(M) + \vec{E}_P(M)}_{\vec{E}_m} + \vec{E}_s(M)$$

Le champ $\vec{E}_S(M)$ est le champ crée par la sphère creuse (S) en son centre M (Voir TD).

$$\vec{E}_s = +\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

WWW.TAHIB24.COM

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E}_m(M) + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_o}$$

Le champ local $\vec{E}_{loc}$ est aussi appelé champ de Lorentz.

V.3 Polarisabilité électrique

Définition

La polarisabilité α d'un diélectrique est une grandeur physique microscopique caractéristique du matériau. Elle relie le moment dipolaire $\vec{p}$ d'une molécule (atome ou ion) au champ local par la relation :

$$\vec{p} = \alpha\, \vec{E}_{loc}$$

Si N est le nombre de dipôles (molécules polarisables) par unité de volume du diélectrique, le vecteur polarisation est :

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\alpha\vec{E}_{loc}$$

$$\vec{P} = N\alpha\left(\vec{E}_m + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_o}\right)$$

d'où

$$\vec{P} = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_o}}\vec{E}_m$$

D'autre part on a :

$$\vec{P} = \chi_e\varepsilon_o\vec{E}_m$$
$$= (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_o\,\vec{E}_m,$$

soit

$$\frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_o}} = \varepsilon_o(\varepsilon_r - 1)$$

$$\boxed{\frac{N\alpha}{3\varepsilon_o} = \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right)}$$

Cette relation est dite de *Clausius Mossotti.*

Elle relie la polarisabilité moléculaire α, qui est une grandeur microscopique, à la constante diélectrique ε_r, qui elle, est une grandeur macroscopique mesurable.

WWW.TALIB24.COM

Cours

ELECTRICITE 3

Deuxième partie :

Magnétostatique des milieux matériels

WWW.TALIB24.COM

SOMMAIRE

I. LE DIPOLE MAGNETIQU

II. LES MILIEUX AIMANTES

III. PROPRIETES DES VECTEURS $\vec{B}$ ET $\vec{H}$ AUX INTERFACES

IV. MILIEUX AIMANTES LINEAIRES HOMOGENES ET ISOTROPES (L. H. I)

V. ASPECTS MICROSCOPIQUES DU MAGNETISME

VI. ENERGIE MAGNETIQUE

WWW.TALIB24.COM

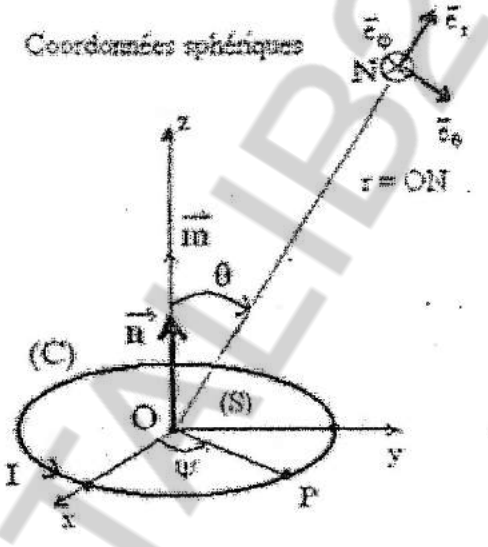
I. Le dipôle magnétique :

I.1 Définition :

Un dipôle magnétique est constitué par une boucle de courant (spire) de surface (S), parcourue par un courant d'intensité constante I. Les dimensions de la boucle sont négligeables devant la distance qui la sépare du point d'observation N. La boucle n'est pas nécessairement circulaire.

I.2 Moment dipolaire magnétique :

$$\vec{m} = I\,S\,\vec{n}$$



Boucle de courant (C), de surface (S), ou dipôle magnétique de moment $\vec{m} = I\,S\,\vec{n}$

Fig. II.1

I.3 Potentiel vecteur $\vec{A}$:

La boucle de courant produit au point N le potentiel vecteur :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I \oint_{(C)} \frac{d\,\vec{l}_P}{PN}$$

Ce potentiel s'écrit également sous la forme :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{m} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

où

$$\vec{r} = \overrightarrow{ON}$$

WWW.TALIB24.COM

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{m} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{A} = \begin{cases} A_r = 0 \\ A_\theta = 0 \\ A_\varphi = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m\sin\theta}{r^2} \end{cases}$$

I.4 Champs magnétique créé par un dipôle magnétique:

Ce champ peut être calculé, à partir du potentiel vecteur, par la relation :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} B_r = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2m\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m\sin\theta}{r^3} \\ B_\varphi = 0 \end{cases}$$

I.5 Action subie par un dipôle magnétique dans un champ extérieur $\vec{B}$:

<u>Cas d'un champ uniforme</u> $\vec{B}_0$:

$$\vec{F} = \oint_{(spire)} I\,\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_0$$

$$\vec{F} = \left(\oint_{(spire)} I\,\overrightarrow{dl}\right) \wedge \vec{B}_0 = \vec{0}$$

La force de Laplace est nulle et le champ magnétique induit un couple de moment :

$$\vec{\Gamma}/O = \frac{\mu_0}{4\pi} IS\vec{n} \wedge \vec{B}_0 = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$$

qui tend à orienter le dipôle magnétique.

WWW.TALIB24.COM

Cas d'un champ non uniforme $\vec{B}$:

$$\vec{F} = \begin{cases} F_x = \vec{m}.\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial x} \\ F_y = \vec{m}.\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial y} \\ F_z = \vec{m}.\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial z} \end{cases}$$

I.5 Energie potentielle d'un dipôle magnétique dans un champ externe :

$$W(P) = -\vec{m}.\vec{B}(P)$$

Position d'équilibre stable, W minimale ; $\vec{m}$ et $\vec{B}$ parallèles et de même sens.

Dans un champ $\vec{B}$ non uniforme, le dipôle magnétique est soumis à une force qui tend à déplacer ce dipôle vers les champs intenses, et à un couple qui tend à l'orienter suivant les lignes de champ.

Dans un champ $\vec{B}_0$ uniforme, le dipôle magnétique est soumis à un effet de couple qui tend à l'orienter suivant les lignes de champ.

II. Les milieux aimantés

Introduction :

Certains matériaux peuvent acquérir une aimantation en présence d'un champ magnétique extérieur. Selon sa nature, le milieu aimanté peut ou non garder cette aimantation après la disparition du champ.
Les expériences effectuées sur les aimants montrent que les courants électriques macroscopiques ne sot pas les seuls sources possibles du champ magnétique ; le champ crée par les aimants possède toutes les propriétés caractéristiques du champ magnétique crée par les courants. En effet, sous l'effet d'un champ extérieur, la matière peut acquérir les propriétés magnétiques des aimants permanents (aimants naturels ou magnétites). C'est le phénomène d'aimantation de la matière.

II.1 Aspect macroscopique de l'aimantation :

Le vecteur Aimantation :

Dans un milieu aimanté, chaque élément de volume $d\tau$ possède un moment dipolaire magnétique $d\vec{m}$. L'intensité d'aimantation en un point P du milieu dépend de la densité des moments dipolaires magnétiques en ce point. Pour caractériser cette

WWW.TALIB24.COM

intensité, on définit le vecteur aimantation $\vec{M}(P)$ comme étant le moment dipolaire magnétique par unité de volume.

$$\vec{M}(P) = \frac{d\vec{m}}{d\tau_P}$$

Unité : Am^{-1}

II.2 Potentiel Vecteur créé par un corps aimanté :

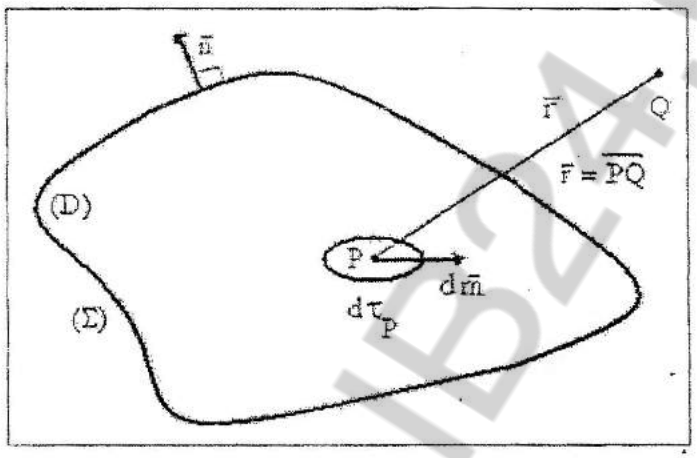


Fig. II. 2

$$d\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{m}\wedge\vec{r}}{r^3} \quad ; \quad \vec{r} = \overrightarrow{PQ}$$

$$d\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{M}(P)\wedge\vec{r}}{r^3}d\tau_P$$

Or

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \overrightarrow{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$d\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M}(P)\wedge\overrightarrow{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)d\tau_P$$

D'autre part, on a pour tout champ de vecteurs $\vec{U}$ et de scalaires f :

$$\overrightarrow{rot}\left(f\,\vec{U}\right) = f\ \overrightarrow{rot}\,\vec{U} - \vec{U}\wedge\overrightarrow{grad}\,f$$

et donc

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)}\vec{M}(P)\wedge\overrightarrow{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)d\tau_P$$

$$\boxed{\vec{A}(Q) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)}\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)}\frac{\overrightarrow{rot}\,\vec{M}}{r}d\tau}$$

WWW.TALIB24.COM

Formule du rotationnel :

$$\iiint_{(\tau)} \overline{\text{rot}}\ \vec{U}\ d\tau = \iint_{S_r(\tau)} \left(\vec{n} \wedge \vec{U}\right) ds$$

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{\Sigma} \frac{\vec{M} \wedge \vec{n}}{r} ds + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau(D)} \frac{\overline{\text{rot}}\ \vec{M}}{r} d\tau$$

(Σ) étant la surface délimitant le corps aimanté (D), de volume $\tau_{(D)}$

Equivalence :

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{\Sigma} \frac{\vec{k}_a}{r} ds + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau(D)} \frac{\vec{J}_a}{r} d\tau,$$

avec

$$\begin{cases} \vec{k}_a = \vec{M} \wedge \vec{n} \\ \vec{J}_a = \overline{\text{rot}}\ \vec{M} \end{cases}$$

Le potentiel vecteur crée par un corps aimanté (D), d'aimantation $\vec{M}$, en un point Q à l'extérieur de celui ci, est le même que celui qui serait crée dans le vide par une distribution équivalente de courants, dits courants d'aimantation :

- caractérisés dans (D) par une densité de courant volumique d'aimantation $\vec{j}_a = \overline{\text{rot}}\,\vec{M}$.
- sur la surface par une densité de courant d'aimantation surfacique $\vec{k}_a = \vec{M} \wedge \vec{n}$.

II.2 Champs magnétique créé par un matériau aimanté :

$$\vec{B} = \overline{\text{rot}}\ \vec{A}$$

$$\vec{B}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{\Sigma} \frac{\vec{k}_a \wedge \vec{r}}{r^3} ds + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau(D)} \frac{\vec{j}_a \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau$$

Remarque :

Dans le calcul de A et B, crées par la matière aimantée, il faut tenir compte dans ces calculs des distributions de courants libres, ou de conduction, si ils existent, de densités surfacique et volumique respectives $\vec{k}_L$ et $\vec{j}_L$.

III. Le Vecteur Excitation magnétique $\vec{H}$.

III.1 Définition

WWW.TALIB24.COM

Soit un volume de matière aimantée ; ce volume est donc siège de courants électriques fictifs d'aimantation de densité $\vec{j}_a$, mais il peut aussi être parcouru par des courants réels de conduction de densité $\vec{j}_L$ et des courants de polarisation $\vec{j}_P$ ($\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{0}$ en régime stationnaire).

Dans la matière aimantée, le théorème d'Ampère local s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_a + \vec{j}_L\right)$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0\ \overrightarrow{rot}\ \vec{M} + \mu_0 \vec{j}_L$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{j}_L$$

On définit le vecteur excitation magnétique

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

III.2 Théorème d'Ampère local pour le Vecteur $\vec{H}$

De cette définition découle la relation importante suivante :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{H} = \vec{j}_L$$

C'est le Théorème d'Ampère local pour le vecteur $\vec{H}$ en régime stationnaire. On peut lui associer la relation intégrale suivante, déduite directement du théorème de Stokes :

$$\oint_{(C)} \vec{H}\,\vec{dl} = \iint_{Sf(C)} \overrightarrow{rot}\ \vec{H}.\vec{ds} = \iint_{Sf(C)} \vec{j}_L.\vec{ds}$$

D'où le théorème d'Ampère pour le vecteur $\vec{H}$:

$$\oint_{(C)} \vec{H}\,\vec{dl} = I_L$$

III.3 Théorème d'Ampère pour le Vecteur $\vec{H}$

<u>Enoncé</u> :

En régime stationnaire, la circulation du vecteur $\vec{H}$ sur un contour fermé (C) est égale à l'intensité totale du courant de conduction I_L qui traverse ce contour.
Unité $[H]$: A m^{-1}

WWW.TALIB24.COM

Remarque :

En appliquant le théorème d'Ampère pour le vecteur $\vec{H}$, on ignore les courants d'aimantation.

III.4 Analogie milieux aimantés - milieux diélectriques :

Une simple comparaison des expressions des vecteurs :

- excitation magnétique $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

- excitation électrique $\vec{D}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Permet d'établir les correspondances suivantes :

$\vec{E}$	$\vec{D}$	ε_0	$\vec{P}$
$\vec{B}$	$\vec{H}$	$1/\mu_0$	$-\vec{M}$

III. Propriétés des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ à l'interface entre deux milieux

A la traversée d'une interface séparant deux milieux aimantés différents, les champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ peuvent changer de direction ou d'intensité.

III.1 Relation de passage pour le champ $\vec{B}$

Sur la figure II.3, considérons la surface fermée (S_f), constituée par le cylindre aplati, de surface latérale (Σ_{lat}) et de bases (ds_1) et (ds_2).

Le champ $\vec{B}$ est a flux conservatif. Ceci est traduit par la relation :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Ceci signifie que son flux à travers toute surface fermée est nul. En effet on a :

$$\phi_{(Sf)}(\vec{B}) = \iint_{(Sf)} \vec{B}.\overrightarrow{ds} = \iiint_{\tau(Sf)} \operatorname{div} \vec{B}\, d\tau = 0$$

$$\phi_{(Sf)}(\vec{B}) = \vec{B}(M_1).\overrightarrow{ds_1} + \vec{B}(M_2).\overrightarrow{ds_2} + d\phi_{lat} = 0$$

$$\phi_{(Sf)}(\vec{B}) = \vec{B}(M_1).ds\,\vec{n} - \vec{B}(M_2).ds\,\vec{n} = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

WWW.TALIB24.COM

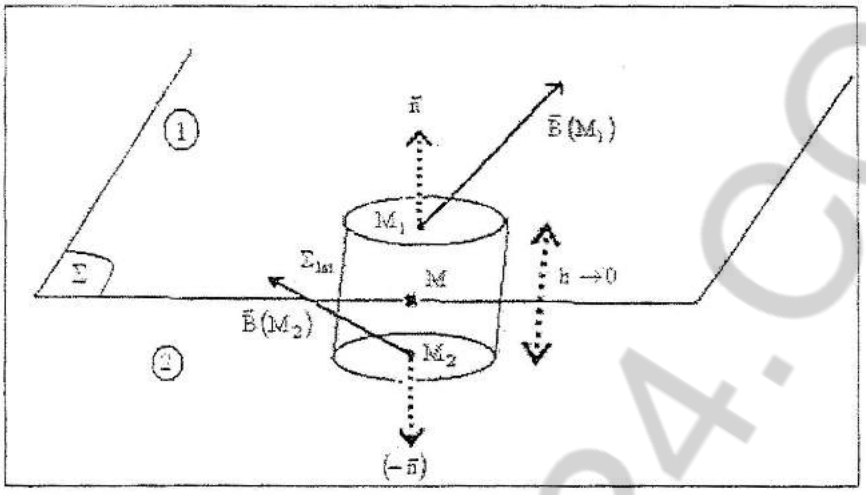


Fig. II.3

<u>Conclusion</u> :

A la traversée d'une interface, la composante normale du champ $\vec{B}$ est conservée.

III.2 Relation de passage pour le champ $\vec{H}$

Appliquons le théorème d'Ampère pour le vecteur $\vec{H}$ en considérant le contour fermé, constitué par le rectangle élémentaire (ABCD) de la figure II.4 :

$$\oint_{(ABCD)} \vec{H}.\overrightarrow{dl} = dI_L^s$$

dI_L^s étant le courant surfacique réel, de vecteur densité $\vec{K}_L$, qui circule sur l'interface et qui passe à traverse le rectangle (ABCD).

$$dI_L^s = \vec{k}_L.dl\,\vec{T}$$

$$\oint_{(ABCD)} \vec{H}.\overrightarrow{dl} = \vec{H}_2.\overrightarrow{AB} + \vec{H}.\overrightarrow{BC} + \vec{H}_1.\overrightarrow{CD} + \vec{H}.\overrightarrow{DA} = dI_L^s$$

$$\oint_{(ABCD)} \vec{H}.\overrightarrow{dl} = dl\left(\vec{H}_2.\vec{t} + 0 - \vec{H}_1.\vec{t} + 0\right) = \vec{k}_L.dl\,\vec{T}$$

$$\vec{H}_2.\vec{t} - \vec{H}_1.\vec{t} = \vec{k}_L.\vec{T}$$

$$\left(\vec{H}_2.\vec{t} - \vec{H}_1.\vec{t}\right).\vec{t} = \left(\vec{k}_L.\vec{T}\right)\vec{t}$$

Si $\vec{k}_L$ est supposé avoir la direction de $\vec{T}$, c. à .d, $\vec{k}_L = k_L\vec{T}$, on peut écrire

WWW.TALIB24.COM

$$\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = k_L.\vec{t} = k_L\left(\vec{n} \wedge \vec{T}\right) = \vec{n} \wedge \vec{k}_L,$$

ou encore

$$\boxed{\vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t} = \vec{k}_L \wedge \vec{n}}$$

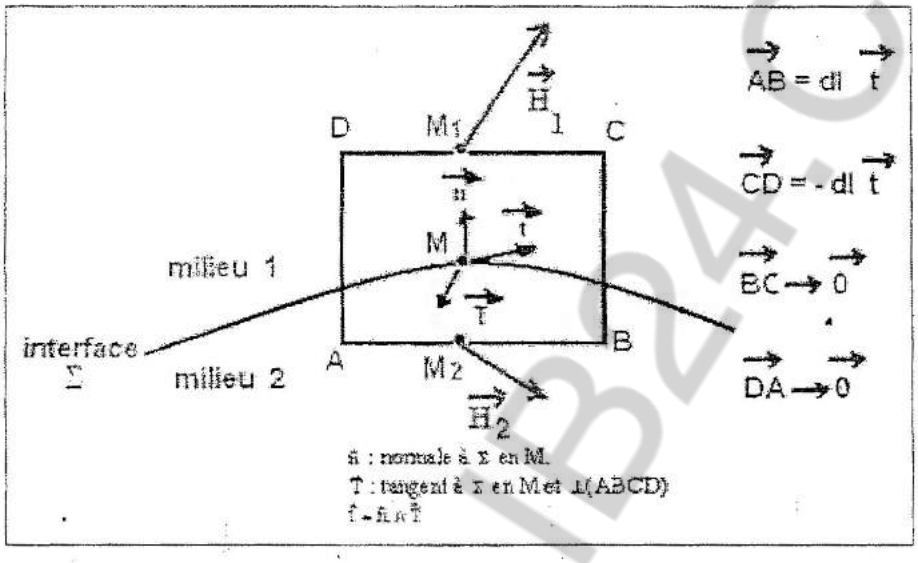


Fig. II.4

Conclusion :

A la traversée d'une interface parcourue par des courants de conduction, la composante tangentielle du vecteur excitation magnétique H_t est discontinue. Cela veut dire que cette composante est conservée dans le cas d'interfaces dépourvues de ces courants.

IV. Milieux Magnétiques Linéaires Homogènes et Isotropes (L.H.I)

IV.1 Définition

Un milieu magnétique est dit linéaire et isotrope, si en tout point P du milieu, l'application qui fait correspondre $\vec{H}(P)$ à $\vec{B}(P)$ est linéaire :

$$\vec{H}(P) = \frac{1}{\mu(P)}\vec{B}(P).$$

$\mu(P)$ est la perméabilité magnétique au point P. Si le milieu est homogène, $\mu(P)$ est indépendante de la position et on a simplement :

$$\vec{B}(P) = \mu\vec{H}(P).$$

μ est la perméabilité magnétique absolue du milieu linéaire homogène et isotrope (L.H.I). $\mu = \mu_r\,\mu_0$, où μ_r est la perméabilité relative.

WWW.TALIB24.COM

IV.2 Susceptibilité magnétique

Dans un milieu magnétique quelconque, on a toujours :

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

Si ce milieu est L.H.I, on a en plus la relation :

$$\vec{B}(P) = \mu \vec{H}(P) \ .$$

Ainsi

$$\mu \vec{H} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

$$\vec{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{H}$$

La susceptibilité magnétique est définie par $\chi_m = \mu_r - 1$, elle représente, comme son nom l'indique, la susceptibilité du milieu à s'aimanter en présence d'une excitation H.

$$\boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{H}}$$

IV.3 Lien entre les courants de conduction et d'aimantation dans un milieu L.H.I

De la relation précédente on a :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{M} = \chi_m \overrightarrow{rot}\ \vec{H},$$

Le théorème d'Ampère local donne :

$$\boxed{\vec{j}_a = \chi_m \vec{j}_L = (\mu_r - 1)\vec{j}_L}$$

Il s'ensuit que le courant volumique total est :

$$\boxed{\vec{j}_{tot} = \vec{j}_a + \vec{j}_L = \mu_r \vec{j}_L = \frac{\mu_r}{\mu_r - 1}\vec{j}_a}$$

<u>Conclusion :</u>

Un milieu aimanté LHI ne peut siéger des courants d'aimantation volumiques en l'absence des courants réels.

Un milieu aimanté LHI, isolé de toute source, ne peut siéger que des courants d'aimantation surfaciques.

WWW.TALIB24.COM

V. Aspects microscopiques du magnétisme :

V.1 Introduction

L'origine du magnétisme réside dans l'existence de moments magnétiques au niveau atomique (Fig. II.5).
- Il provient d'une part du mouvement des électrons autour du noyau (moment magnétique orbital $\vec{\mu}_l$)
- et d'autre part du mouvement des électrons autour d'eux-mêmes (moment magnétique de spin $\vec{\mu}_S$)

Le moment magnétique des électrons est la résultante de ces deux moments, orbital et de spin.
Notons que les moments magnétiques nucléaires dus aux protons à l'intérieur des noyaux sont très faibles devant les moments électroniques.
Ainsi les propriétés magnétiques de la matière sont essentiellement attribuées aux électrons.

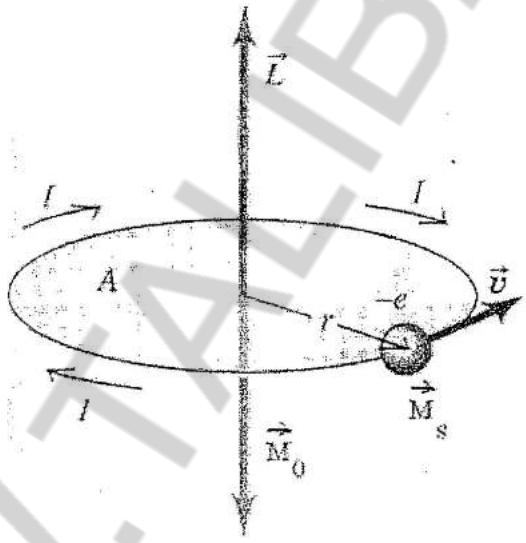


Fig .II.5

V.2 Classification des matériaux de point de vue magnétiques

Les matériaux sont classés en trois catégories, les diamagnétiques, les paramagnétiques et les ferromagnétiques.

V.2.1 Le diamagnétisme

En l'absence du champ magnétique extérieur, le moment magnétique atomique est nul (compensation des moments magnétiques des électrons). Les atomes ne possèdent pas de moment magnétique permanent ; le moment magnétique macroscopique est donc nul.

WWW.TALIB24.COM

Sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, la substance acquiert une aimantation induite $\vec{M}$.

Susceptibilité magnétique en diamagnétisme

$$\chi_m = -\frac{\mu_0 n Z e^2}{m_e} < r^2 > .$$

- Z : le numéro atomique (nombre total d'électrons de l'atome),
- n : le nombre d'atomes par unité de volume de la substance diamagnétique.
- m_e : la masse de l'électron.
- $< r^2 >$: le rayon carre moyen de l'atome.

Il est important de signaler qu'en diamagnétisme :
- Les électrons des couches périphériques jouent un rôle essentiel dans l'aimantation.
- $\chi_m < 0$, donc $\mu_r < 1$; l'aimantation $\vec{M}$ s'oppose au champ $\vec{B}$. En effet on a $(\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu})$. Cela veut dire qu'une substance diamagnétique aimantée crée un champ additionnel qui s'oppose au champ extérieur.
- $\chi_m \sim -10^{-5}$, donc $\mu_r \cong 1$ et $\mu \cong \mu_0$; l'aimantation acquise M est faible.
- χ_m est indépendante de la température.

Exemple de substances diamagnétiques

matériaux	μ_r [1]	matériaux	μ_r [1]
bismuth	$1-16.6 \cdot 10^{-5}$	plomb	$1-1.8 \cdot 10^{-5}$
antimoine	$1-7.0 \cdot 10^{-5}$	NaCl	$1-1.4 \cdot 10^{-5}$
mercure	$1-2.9 \cdot 10^{-5}$	cuivre	$1-1.0 \cdot 10^{-5}$
argent	$1-2.6 \cdot 10^{-5}$	eau	$1-0.88 \cdot 10^{-5}$
carbone	$1-2.1 \cdot 10^{-5}$	hydrogène	$1-0.21 \cdot 10^{-8}$

Pour rappel, les atomes ou molécules de ces matériaux ont un moment magnétique nul.

V.2.2 Le paramagnétisme

Contrairement aux matériaux diamagnétiques, les atomes ou molécules des matériaux paramagnétiques ont un moment dipolaire magnétique intrinsèque. En l'absence du champ extérieur, ces moments sont distribués au hasard dans toutes les directions possibles et l'aimantation macroscopique est nulle. En présence d'un champ magnétique extérieur, ces moments atomiques vont s'aligner plus ou moins collectivement et contribuer à créer un moment magnétique global ayant la direction et le sens du champ extérieur ; ce phénomène étant limité par l'agitation thermique. A l'équilibre thermique, la résultante des moments magnétiques sur un élément de volume n'est plus nulle (phénomène analogue à la polarisation par orientation dans les diélectriques).

WWW.TALIB24.COM

Susceptibilité magnétique en paramagnétisme

Un milieu contenant n dipôles magnétiques par unité de volume et possédant chacun un moment magnétique $\vec{m}$, acquiert sous l'action du champ extérieur $\vec{B}$ une aimantation $\vec{M} = n\ \vec{m}\ L(u)$, où $L(u)$ est la fonction de Langevin

$$L(u) = \coth u - 1/u \ ;$$

$u = \dfrac{mB}{kT}$, où k est la constante de Boltzmann et T la température absolue.

On a $u \ll 1$ alors $\coth u \cong 1/u + u/3 + \ldots$ et $L(u) \cong u/3$, d'où

$$\chi_m = \frac{\mu_0\, n\, m^2}{3kT}$$

On peut conclure que pour les milieux paramagnétiques, on a :
- $\chi_m > 0$; $\chi_m \sim 10^{-3}$, donc $\mu_r \cong 1$ et $\mu \cong \mu_0$; comme pour un diamagnétique, l'aimantation acquise M est faible.

Exemple de substances paramagnétiques

matériaux	μ_r [1]	matériaux	μ_r [1]
oxygène liquide	$1+400 \cdot 10^{-5}$	sodium	$1+0.72 \cdot 10^{-5}$
uranium	$1+40 \cdot 10^{-5}$	oxygène gazeux	$1+0.19 \cdot 10^{-5}$
platine	$1+29 \cdot 10^{-5}$	air	$1+0.036 \cdot 10^{-5}$
aluminium	$1+2 \cdot 10^{-5}$		

Pour rappel, les atomes ou molécules de ces matériaux ont un moment magnétique non nul.

Pour les diamagnétiques et les paramagnétiques, l'aimantation cesse dès que le champ extérieur est supprimé.

V.2.3 Le ferromagnétisme

Les substances ferromagnétiques sont principalement le fer (d'où le nom de ces matériaux), le nickel et le cobalt ainsi que de nombreux alliages contenant ces éléments. Les matériaux ferromagnétiques sont caractérisés par les trois propriétés essentielles suivantes:

$\chi_m \gg 1$; elle est de l'ordre de quelques milliers, voire dizaines de milliers ; $\chi_m \sim 10^{+3}$.
χ_m dépend de la température.

WWW.TALIB24.COM

$\chi_m = \chi_m(H)$; M et B ne sont plus proportionnels à H ; la dépendance est plus complexe. Elle est non linéaire, de plus elle varie d'une substance ferromagnétique à l'autre et dépend aussi de l'histoire de l'échantillon.

Dans ces matériaux, il existe de très fortes interactions entre les moments magnétiques dipolaires qui s'alignent parallèlement les uns aux autres dans des régions appelées domaines magnétiques. En présence d'un champ d'induction magnétique extérieure B même très faible, tous les domaines vont s'aligner les uns sur les autres parallèlement au champ B et contribuer à générer une forte aimantation M.

Domaines magnétiques
Fig. II.6

Exemple de substances ferromagnétiques

Matériaux	Composition
Acier au carbone	98 % Fe ; 0.86 % Co ; 0.9 % Mn
Alnico 2	55 % Fe; 10 % Al; 17 % Ni; 12 % Co; 6 % Cu
Alnico 5	51 % Fe; 8 % Al; 14 % Ni; 24 % Co; 3 % Cu

V.3 Aimantation des substances ferromagnétiques

V.3.1 Courbe de première aimantation

La courbe d'aimantation M = M (H) d' un ferromagnétique non aimanté est dite courbe de première aimantation. Elle s'obtient par expérience. On utilise en général un échantillon de forme torique que l'on place dans un solénoïde de même forme, alimenté par une source de courant réglable. Le solénoïde est formé de N spires parcourues par un courant d'intensité I. A l'aide d'un fluxmètre, on mesure le flux ϕ de $\vec{B}$ à travers une section quelconque du tore en fonction de I. Le matériau étant initialement non aimanté.

WWW.TALIB24.COM

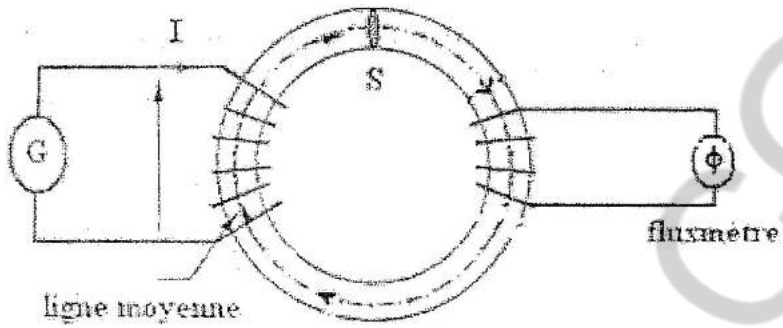


Fig. II.7

$\phi = BS$, $B = \frac{\phi}{S}$, $S = \pi r^2$: Section du tore, $H = \frac{NI}{2\pi R}$.

La variation de I permet de tracer la courbe d'aimantation en associant les couples (H,B). L'aimantation M étant déterminée à partir de la relation

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H$$

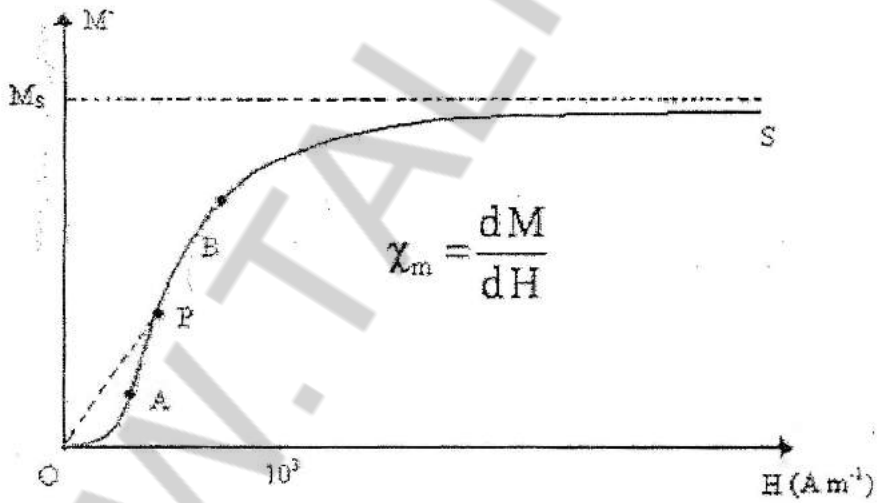


Fig. II.8

Lorsque H est faible, M croit lentement sur la portion OA, et plus rapidement sur la portion (AB).

Lorsque H atteint quelques centaines de Am^{-1}, la croissance de M devient lente (portion BS) et se terminent par une saturation pour des excitations intenses.

Ms : aimantation de saturation. Ms varie avec la nature du corps.

Substance	Fer	Acier trompé	Ni	Co
Ms (Am-1) 300K	1.7×10^6	1.4×10^6	0.5×10^6	1.3×10^6

WWW.TALIB24.COM

Ms dépend de la température

- décroît très rapidement au voisinage de la température de Curie
- Lorsque T>Tc, la substance devient paramagnétique.

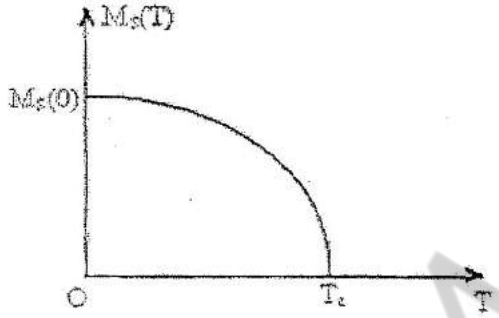


Fig. II.9

$$\vec{M} = \chi_{m(H)}\,\vec{H}$$

χ_m représente la pente de la droite OP (Fig. II.8)

χ_m et μ_r sont pratiquement confondus.

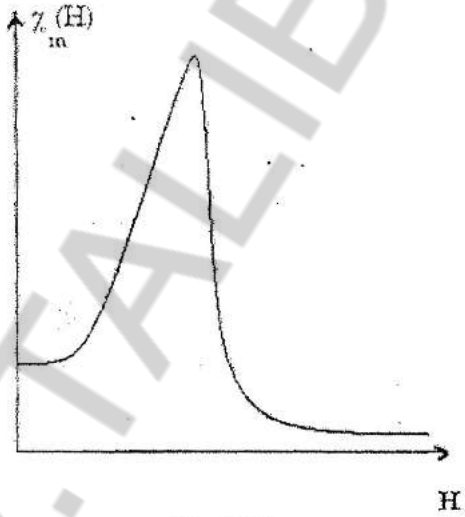


Fig. II.10

Pour un corps ferromagnétique, la susceptibilité magnétique χ_m est donnée pour des températures T> T_c par :

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_c}, \quad \text{ou } C = \text{Cste (loi de Curie Weiss)}$$

WWW.TALIB24.COM

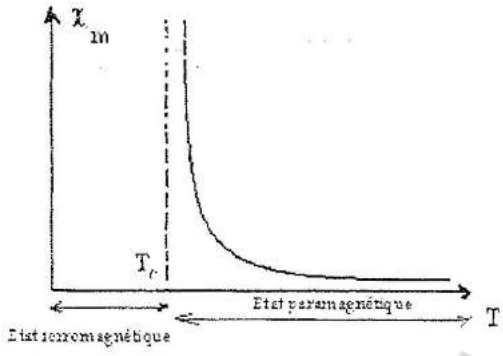


Fig. II.11

Le ferromagnétisme n'existe que dans les corps à l'état condensé. Il n'est pas une propriété atomique ou moléculaire comme le diamagnétisme ou le paramagnétisme, mais il résulte d'une interaction entre les atomes d'une même structure cristalline.

V.3.2 Cycle d'hystérésis

Le phénomène d'hystérésis est le dédoublement de la caractéristique B(H) ou M(H) du matériau ferromagnétique quand celui-ci est soumis à une excitation H périodique. Le champ B dépend non seulement de l'excitation H, mais aussi de l'aimantation antérieure (histoire du matériau). Les substances ferromagnétiques sont donc dotées de mémoire.
Sur la figure II.12 on distingue :

La courbe de première aimantation : courbe B = f(H) lorsque le corps ferromagnétique ne possède aucune aimantation. Celle-ci est obtenue en augmentant H de 0 jusqu' à $H_{max} = H_m$.

Le Cycle d'hystérésis : courbe B = f(H) lorsque le corps ferromagnétique possède déjà une aimantation.

Tracé du cycle :

- On fait décroître H à partir de sa valeur maximale Hm, on constate que le champ B, donc l'aimantation M, ne prend pas les mêmes valeurs que pour H croissant. Ces valeurs sont supérieures et la courbe de désaimantation M(H) est différente. On dit qu'il y a hystérésis.
- Lorsque H=0, l'aimantation M ne s'annule pas, le matériau garde une aimantation M_r appelée aimantation rémanente ; le champ correspondant est le champ rémanent $B_r = \mu_0 M_r$.
- Pour diminuer l'aimantation, on inverse le sens de H, M est nulle pour $H=-H_c$ appelée champ coercitif.
- On continue a augmenter H dans le sens opposée jusqu'à –Hm,
- Ensuite on augmente H jusqu'à Hm.

On obtient une courbe fermée et symétrique par rapport à l'origine, c'est le cycle d'hystérésis.

WWW.TALIB24.COM

La forme du cycle dépend de
- la température
- L'excitation maximale Hm
- La nature du matériau (matériaux durs : Hc fort, Matériaux doux : Hc faible)

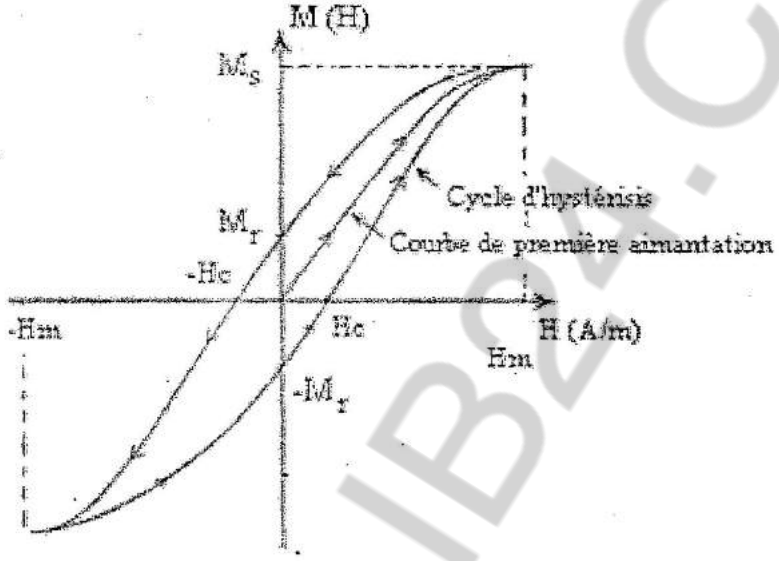


Fig. II.12

• **Matériaux durs :** Certains matériaux, comme l'acier, présentent une forte aimantation rémanente (Hc très grand). Ils sont utilisés pour faire des aimants permanents. *Le cycle est large.*

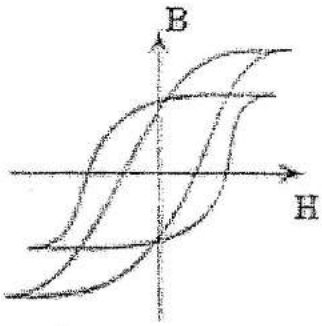
Exemple d'alliages utilisés pour les aimants.
Ferrite (oxyde de fer)
Saturation à ≈ 0,6 T
Br ≈ 0,4 T
Hc ≈ 200 kA/m
Samarium-Cobalt (Sm-Co)
saturation à ≈ 1 T
Br = 0,8 T
Hc = 500 kA/m

• **Matériaux doux :** Possèdent une aimantation rémanente facile à annuler (Hc est petit). Ils sont utilisés pour les moteurs et les tôles des circuits magnétiques des transformateurs. *Leur cycle est étroit (Exp : fer).*

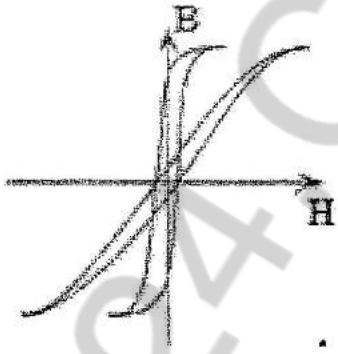
Exemple d'alliages utilisés pour les tôles des transformateurs :
FeSi 3,5% de Si
Saturation à 2 T
Br ≈ 0
Hc ≈ 0
μr ≈ 7000 à 50 Hz
FeSi à grains orientés
saturation à 3 T

WWW.TALIB24.COM

Br = 1,4 T
Hc = 8 A/m
μr > 40 000 à 50 Hz



Matériaux durs :
Le cycle d'hystérésis est large.
Fig. II.13



Matériaux doux :
Le cycle d'hystérésis est étroit.
Fig. II.14

V.3.3 Circuits magnétiques :

Un circuit magnétique est la partie ferromagnétique guidant le flux magnétique d'un système électrique (exemple: le noyau d'un transformateur).
De nombreux circuits magnétiques, entrant dans la constitution des machines électriques, comportent obligatoirement un entrefer. Exemple des moteurs dont le circuit magnétique est composé du stator (partie fixe) et du rotor (partie mobile). L'entrefer est indispensable pour permettre la rotation du rotor.
Les aimants permanents, eux n'ont pas de circuits électriques : ce sont des circuits magnétiques constitués d'un matériau ferromagnétique souvent associé a du fer doux pour canaliser les lignes de champ.

a) Electro-aimants

On cherche relations qui existent entre les paramètres du circuit. Les deux lois fondamentales sont le théorème d'Ampère (pour le vecteur $\vec{H}$) et la conservation du flux pour le vecteur $\vec{B}$.

WWW.TALIB24.COM

a.1 Tore sans entrefer

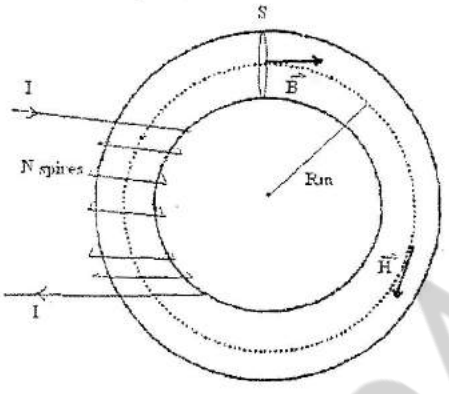


Fig. II.15

D'après le théorème d'Ampère

$$\oint_L \vec{H}.d\vec{l} = NI$$

$$HL = NI$$

H : excitation magnétique (A/m)
L : longueur moyenne des lignes de champ (m)
N : nombre de spires de la bobine
I : courant dans la bobine (A)

D'après la loi de conservation du flux magnétique, on a:

$$\Phi = \iint_S \vec{B}.\overrightarrow{ds} = cste$$

(S) : section quelconque du tore

Si la section est droite :

$$\phi = BS = \mu SH$$

Analogie circuits magnétiques- circuits électriques

Réluctance d'un circuit magnétique :

$$\oint_L \vec{H}.d\vec{l} = \int_L \frac{BS}{\mu S} dl = \phi \int_L \frac{dl}{\mu S} = NI,$$

WWW.TALIB24.COM

d'où la relation d'Hopkinson

$$R\,\phi = F_m$$

$$F_m = NI \text{ : force magnétomotrice}$$

$$R = \frac{1}{\mu}\int_{(C)}\frac{dl}{S} \text{ : Réluctance du circuit magnétique}$$

Connaissant la réluctance R, on détermine le flux magnétique à travers le circuit par application de la relation d'Hopkinson et on en déduit le champ magnétique B.

a.2 Tore avec un entrefer

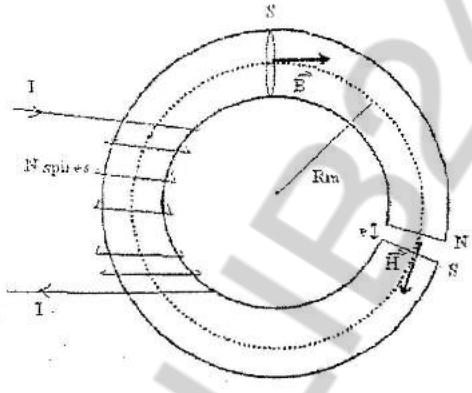


Fig. II.16

- Détermination de H :

Théorème d'Ampère :

$$\oint_L \vec{H}.d\vec{l} = NI = Fm$$

$$H_f(L - e) + H_a\, e = N.I$$

L : longueur moyenne des lignes de champ (m)
e : longueur de l'entrefer (m)
N : nombre de spires de la bobine
I : courant dans la bobine (A)
H_f : excitation magnétique dans la matière (A/m)
H_a: excitation magnétique dans l'entrefer (A/m)

Si e << L, les lignes de champs traversent l'entrefer sans trop de perte, l'entrefer peut être considéré comme un tube du flux magnétique.

$$\phi_{fer} = \phi_{air}$$

$$B_f = B_a \Rightarrow \mu_0.\mu_r.H_f = \mu_0.H_a \Rightarrow \mu_r.H_f = H_a$$

$\mu_r \approx 1000$ pour du fer. H_a est 1000 fois plus important que H_f.
Donc si l'on a besoin d'une excitation donnée dans l'entrefer, on peut calculer le courant qui sera nécessaire. Celui-ci sera d'autant plus faible que μ_r sera grand.

WWW.TAJIR24.COM

$$H_f(L - e) + H_a e = N.I$$

$$H_f(L - e) + \mu_r.H_f e = N.I$$

$$H_f = \frac{NI}{L + e(\mu_r - 1)}$$

$$H_a = \frac{\mu_r NI}{L + e(\mu_r - 1)}$$

D'où

$$B_a = B_f = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{L + e(\mu_r - 1)}$$

On peut retrouver aisément ces mêmes résultats en utilisant la relation d'Hopkinson :

$$R = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{L - e}{\mu_r S} + \frac{e}{S}\right)$$

$$\phi = \frac{F_m}{R} = \frac{N\,I}{\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{L - e}{\mu_r S} + \frac{e}{S}\right)}$$

$$B_{air} = B_{fer} = \frac{\phi}{S}$$

$$H_{air} = \frac{B_{air}}{\mu_0} = \frac{\phi}{\mu_0 S}$$

$$H_{fer} = \frac{B_{fer}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\phi}{\mu_0 \mu_r S}$$

VI. Energie magnétique :

L'énergie magnétique contenue dans un volume (τ) ou règnent les champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ est donnée par :

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{B}.\vec{H}\, d\tau$$

La densité d'énergie magnétique est :

$$w^* = \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\vec{B}.\vec{H}$$

Si le milieu est linéaire homogène et isotrope, on a $\vec{B} = \mu\vec{H}$ et

$$w^* = \frac{1}{2\mu}B^2 = \frac{1}{2}\mu H^2$$

WWW.TALEB24.COM

Cours

ELECTRICITE 3

Troisième partie :

Ondes électromagnétiques

WWW.TALIB24.COM

SOMMAIRE

CHAPITRE 1 : ONDES ELECTROMAGNETIQUES (OEM)

I. INTRODUCTION

II. PROPAGATION DANS UN MILIEU DEPOURVU DE CHARGES ET DE COURANTS

III. EQUATION DE PROPAGATION

IV. ONDES PLANES PROGRESSIVES MONOCHROMATIQUES DANS LE VIDE (OPPM)

V. POLARISATION DES ONDES PLANES PROGRESSIVES MONOCHROMATIQUES

VI. REPRESENTATION COMPLEXE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

VII. ENERGIE ASSOCIEE A UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE

VIII. L'ONDE SCALAIRE SPHERIQUE

CHAPITRE 2 : ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LES MILIEUX DIELECTRIQUES

I. INDICE COMPLEXE, DISPERSION ET ABSORPTION

II. REFLEXION, REFRACTION SUR UN DIOPTRE

WWW.TALIB24.COM

Chapitre 1 : Ondes électromagnétiques (OEM)

I. Introduction

L'électromagnétisme s'intéresse à l'étude des modifications des propriétés de l'espace, provoquées par des charges électriques en mouvement. Ces modifications sont traduites par un champ électromagnétique défini en tout point par deux vecteurs, un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$. Ces deux vecteurs sont déterminés par les équations de Maxwell, qui montrent que leur évolution spatio-temporelle est de caractère ondulatoire, d'où le nom « Ondes électromagnétiques » qui leur est associé.

La propagation des ondes électromagnétiques n'a été étudiée expérimentalement qu'en 1888 par Hertz. Peu avant, en 1887, Michelson avait mis en évidence l'aspect essentiel des ondes lumineuses qui ne sont qu'un cas particulier d'ondes électromagnétiques ; elle sont caractérisées par l'invariance de leur vitesse de propagation (célérité c) par un changement de référentiel Galiléen, et par l'absence de support matériel à cette propagation, ce qui les distingue fondamentalement des ondes mécaniques.

Le domaine d'application des ondes électromagnétiques est très vaste : il s'étend dans l'échelle des longueurs d'ondes de 10^{-15}m (ordre de grandeur de la dimension du noyau) à plusieurs Km (ondes radio). Dans cet éventail, les phénomènes lumineux ne concernent qu'un domaine restreint de longueur d'onde 400nm< λ <750nm.

II. Propagation dans un milieu dépourvu de charges et de courants :

Dans un milieu Linéaire Homogène et Isotrope (L.H.I), on a : $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

Les quatre équations de Maxwell deviennent, avec $\rho_L = 0$ et $\vec{J}_L = \vec{0}$:

$$div\ \vec{E} = 0 \qquad div\ \vec{B} = 0$$

$$\vec{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{rot}\ \vec{B} = \mu\ \varepsilon\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

III. Equation de propagation

- **Pour le champ électrique $\vec{E}$:**

A partir de la relation : $\vec{rot}\,\vec{rot}(.) = \vec{grad}\ div(.) - \vec{\Delta}(.)$

et des équations de Maxwell : $div\ \vec{E} = 0$; $\vec{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

WWW.TALIB24.COM

on obtient l'équation de propagation du champ électrique

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}. \qquad (*)$$

- Pour le champ magnétique $\vec{B}$:

Le champ magnétique $\vec{B}$ vérifie également la même équation (*).

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Ces résultats sont généralisés à toute grandeur $\vec{X}(\vec{r},t)$ vérifiant l'équation de propagation, dite aussi équation d'onde :

$$\Delta\vec{X} - k^2 \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial^2 t} = \vec{0}$$

où l'onde $\vec{X}(\vec{r},t)$ se propage à la vitesse v telle que $v^2 = 1/k^2$.

L'équation d'onde peut être condensée en introduisant l'opérateur d'Alembertien :

$$\Box(.) = \Delta(.) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(.)}{\partial^2 t}$$

Le potentiel scalaire V et le potentiel vecteur $\vec{A}$ obéissent également à la même équation de propagation que les champs : $\Box(\vec{E},\vec{B},\vec{A}, ou\ V) = \vec{0}\ ou\ 0$

Dans le vide l'équation de propagation devient

$$\Box(.) = \Delta(.) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(.)}{\partial^2 t}$$

où $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide .

1- L'Onde plane

L'OEM est plane si $\vec{E}$ (et donc $\vec{B}$) ne dépend que du temps t et d'une seule coordonnée d'espace, associée à la direction de propagation. Si par exemple, la propagation se fait dans la direction de Ox, à un instant t donné, le champ $\vec{E}(x,t)$ est le même pour tous les points d'un même plan perpendiculaire à Ox appelé plan d'onde.

WWW.TALIB24.COM

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}(x,t)$$
$$\vec{B}(M,t) = \vec{B}(x,t)$$

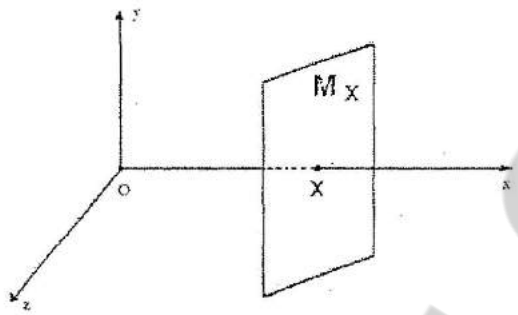


Fig. 5.1

La solution la plus générale pour $\Box(\vec{E},\vec{B}) = \vec{0}$ est de la forme :

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_1(t-\frac{x}{c}) + \vec{E}_2(t+\frac{x}{c}) \qquad \vec{B}(x,t) = \vec{B}_1(t-\frac{x}{c}) + \vec{B}_2(t+\frac{x}{c}),$$

où nous excluons toute solution indépendante du temps. Un champ constant est toujours solution de l'équation d'onde (il est sans intérêt).

- le champ $(\vec{E}_1,\vec{B}_1)$ correspond à une propagation dans le sens positif de Ox.
- le champ $(\vec{E}_2,\vec{B}_2)$ correspond à une propagation dans le sens contraire.

2- L'onde plane progressive (OPP)

Chacun des couples $(\vec{E}_1,\vec{B}_1)$, $(\vec{E}_2,\vec{B}_2)$ caractérise une onde électromagnétique du type onde plane progressive se propageant parallèlement à Ox, soit dans le sens positif (couple $(\vec{E}_1,\vec{B}_1)$) soit dans le sens négatif (couple $(\vec{E}_2,\vec{B}_2)$).

Considérons par exemple le champ $\vec{E}_1(t-\frac{x}{c})$, on note que

$$\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \qquad \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial y} = \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial z} = \vec{0}$$

Sous forme opérationnelle, ces relations peuvent être condensées.

$$\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \text{soit} \qquad \vec{\nabla} = -\frac{1}{c}\vec{u}_x\frac{\partial}{\partial t},$$ où $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire de Ox.

WWW.TALIB24.COM

Ces deux relations montrent que $(\vec{E},\vec{B},\vec{u})$ est un trièdre direct et $\|\vec{E}\| = c\,\|\vec{B}\|$

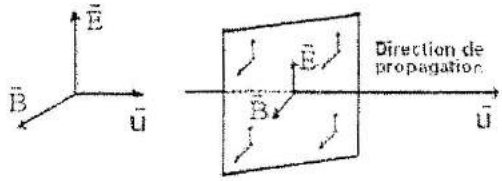


Fig. 5.2

IV. Ondes planes progressives monochromatiques dans le vide (OPPM) :

Soit Ox l'axe de propagation. L'onde plane progressive monochromatique, se dirigeant dans la direction positive de Ox, est caractérisée par une dépendance en $cos(k\,x - \omega t + \varphi_0)$, avec :

k : le module du vecteur d'onde

ω : la pulsation de l'onde

φ_0 : la phase à l'origine.

Une telle onde fait apparaître une double périodicité des composantes $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

a) une périodicité temporelle : pour x donnée, les composantes du champ sont des fonctions sinusoïdales du temps, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, correspondant à la fréquence temporelle $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (en Hertz).

b) une périodicité spatiale : A un instant t donné les composantes du champ sont des fonctions sinusoïdales de la variable d'espace x, de période spatiale, ou longueur d'onde $\lambda = cT = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega}c$. La longueur d'onde correspond à la distance parcourue par l'onde pendant une période T. On définit aussi le nombre d'onde $q = \frac{1}{\lambda}$ (en m^{-1}).

Les différents domaines de longueur d'ondes (OEM)

WWW.TALIB24.COM

On peut généraliser ce résultat à toute onde plane progressive OPP se propageant dans le sens positif d'un axe quelconque défini par le vecteur unitaire $\vec{u}$,

$$\vec{\nabla} = -\frac{1}{c}\vec{u}\frac{\partial}{\partial t} \qquad (*)$$

Cette relation ne s'applique qu'à une onde plane progressive.

3- Structure de l'O.P.P :

Soit une O.P.P $(\vec{E},\vec{B})$ se propageant dans la direction d'un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$. Compte tenu de (*), les équations de Maxwell en l'absence de source $(\rho_L = 0 \ , \vec{j}_L = \vec{0})$ s'écrivent :

1- $div\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \qquad$ soit $-\frac{1}{c}\vec{u}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$

2- $div\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad$ soit $-\frac{1}{c}\vec{u}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

3- $r\vec{o}t\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad$ soit $-\frac{1}{c}\vec{u}\wedge\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

4- $r\vec{o}t\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad$ soit $-\frac{1}{c}\vec{u}\wedge\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

On ne s'intéresse qu'aux champs variables. Tout champ $\vec{G}$ constant, est considéré nul $(\vec{G} = \vec{0})$, comme il est supposé être avant l'arrivée de l'onde, d'où :

$$\frac{\partial(\vec{u}.\vec{E})}{\partial t} = 0 \qquad (1') \qquad\qquad \frac{\partial(\frac{\vec{u}}{c}\wedge\vec{E} - \vec{B})}{\partial t} = \vec{0} \qquad (3')$$

$$\frac{\partial(\vec{u}.\vec{B})}{\partial t} = 0 \qquad (2') \qquad\qquad \frac{\partial(\vec{u}\wedge\vec{B} + \frac{\vec{E}}{c})}{\partial t} = \vec{0} \qquad (4')$$

(1') $\Rightarrow \quad \vec{u}.\vec{E} = 0 \qquad$ le champ $\vec{E}$ est transversal

(2') $\Rightarrow \quad \vec{u}.\vec{B} = 0 \qquad$ le champ $\vec{B}$ est transversal

Donc le champ électromagnétique est transversal.

(3') $\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{u}}{c}\wedge\vec{E} \qquad$ donc $\vec{B}\perp\vec{E}$

(4') $\Rightarrow \vec{E} = c\,\vec{B}\wedge\vec{u}$

WWW.TALIB24.COM

	Radio	Micro-ondes	IR	Visible	UV	R-X	R-γ
λ_0	∞ 1m	1mm	0.75 µm	0.4 µm	1nm	5.10^{-6}nm	0
$\nu = \frac{c}{\lambda_0}$ (Hz)	0	3.10^{8}	3.10^{11}	3.10^{14}	$7.5.10^{14}$	3.10^{17}	6.10^{18}	∞

1- Champ électromagnétique d'une OEPPM se propageant suivant Ox :

On sait qu'une onde plane progressive est transversale, c'est-à-dire que la composante de $\vec{E}$ suivant la direction de propagation est nulle.

Pour une pulsation ω donnée, l'OEPPM se propageant suivant Ox est caractérisée par les composantes de $\vec{E}$:

$$\vec{E} \quad \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y}\cos(k.x - \omega t + \varphi_1), \quad \text{avec } k = \dfrac{\omega}{c} \\ E_z = E_{0z}\cos(k.x - \omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$\vec{E}_{0y}$, $\vec{E}_{0z}$ sont des amplitudes, et φ_1 et φ_2 les phases à l'origine.

Les composantes de $\vec{B}$ s'en déduisent ainsi :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\E_y\\E_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x = 0 \\ B_y = -\dfrac{E_z}{c} \\ B_z = \dfrac{E_y}{c} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

2- OEPPM de direction de propagation quelconque

Quelle que soit la direction de propagation de l'onde plane, le champ est uniforme dans un plan d'onde.

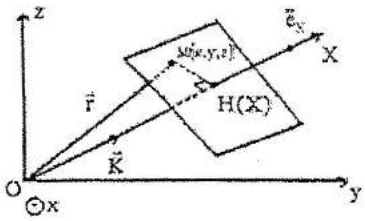


Fig. 5.3

$$E(\vec{r},t) = E(\vec{OH},t) = E_0\cos(K.X - \omega t + \varphi)$$

WWW.TALIB24.COM

$$\text{Avec} \quad \begin{matrix} X = \vec{r}.\vec{e}_x \\ \vec{K} = K.\vec{e}_x \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vec{K} = (K_x, K_y, K_z) \\ \vec{r} = (x, y, z) \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

$$E(\vec{r},t) = E(\vec{OH},t) = E_0 \cos(\vec{K}.\vec{r} - \omega t + \varphi)$$
$$= E_0 \cos(x.K_x + y.K_y + z.K_z - \omega t + \varphi)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x}{c} \wedge \vec{E} \qquad \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{K}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

Le vecteur d'onde $\vec{K}$ est toujours dirigé dans le sens de la propagation. Ses composantes K_x, K_y, K_z sont liés à la pulsation ω par :

$$K^2{}_x + K^2{}_y + K^2{}_z = \frac{\omega^2}{c^2}$$

V. Polarisation des ondes planes progressives monochromatiques

a- position du problème :

Etudier la polarisation d'une onde électromagnétique c'est préciser l'évolution de la direction du champ électrique $\vec{E}$ attaché à cette onde au cours de la propagation. Soit une onde plane progressive se propageant dans le vide suivant Ox décrite par le champ $\vec{E}$

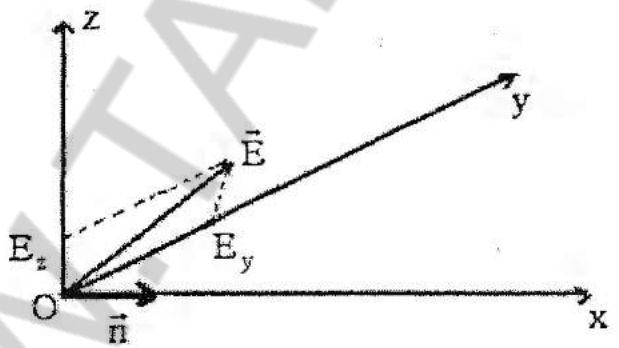


Fig. 5.4

$$\vec{E} \quad \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(k.x - \omega t + \varphi_1) \\ E_z = E_{0z} \cos(k.x - \omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

E_{oy}, E_{oz}, φ_1 et φ_2 sont des constantes. Le champ $\vec{B} = \frac{\vec{n}}{c} \wedge \vec{E}$.

WWW.TALIB24.COM

Pour décrire l'évolution de la direction du champ $\vec{E}$, on peut :

- Soit fixer x et examiner l'évolution de cette direction dans le temps.
- Soit fixer t et observer l'évolution de cette direction le long de Ox, c.à.d. le long de la direction de propagation.

b- Différents états de polarisation dans un plan d'onde

Pour la description de champ, on se place dans le plan x=0 (on a fixé x) et on décrit l'évolution du vecteur $\vec{E}$ dans ce plan

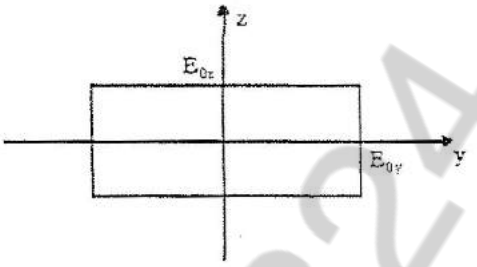


Fig. 5.5

On a : $E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \varphi_1)$ $\quad E_z = E_{0z}\cos(\omega t - \varphi_2)$

En un point donné de ce plan, l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ décrit une courbe comprise dans un rectangle de côtés $2E_{0y}$ et $2E_{0z}$.

Envisageons différents cas

- si $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$; $\quad \dfrac{E_y}{E_z} = \dfrac{E_{0y}}{E_{0z}}$

le champ $\vec{E}$ garde une direction fixe. On dit que l'onde électromagnétique présente une polarisation rectiligne.

- si $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$; $\quad \dfrac{E_y}{E_z} = -\dfrac{E_{0y}}{E_{0z}}$

Le champ $\vec{E}$ garde une direction fixe et l'onde est polarisée rectilignement.

- Si $\varphi_2 - \varphi_1$ n'est pas un multiple de π, on peut écrire :

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos\omega t \qquad \text{et} \qquad \frac{E_z}{E_{0z}} = \cos(\omega t - \varphi) \qquad \text{avec} \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

En éliminant le temps, on obtient :

WWW.TALIB24.COM

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2+\left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)^2-2\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)\cos\varphi=\sin^2\varphi,$$

qui est l'équation générale d'une ellipse (*qui couvre aussi les deux cas précédemment cités*).

L'extrémité de $\vec{E}$ décrit donc une ellipse ; on dit que l'onde présente une polarisation elliptique.

c- Définitions des ondes elliptiques gauche et droite

Suivant la valeur de $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$, cette ellipse est décrite dans un sens ou dans un autre. L'onde est elliptique gauche si pour un observateur recevant l'onde, le champ électrique tourne dans le sens positif associé au sens de propagation, si non elle est elliptique droite.

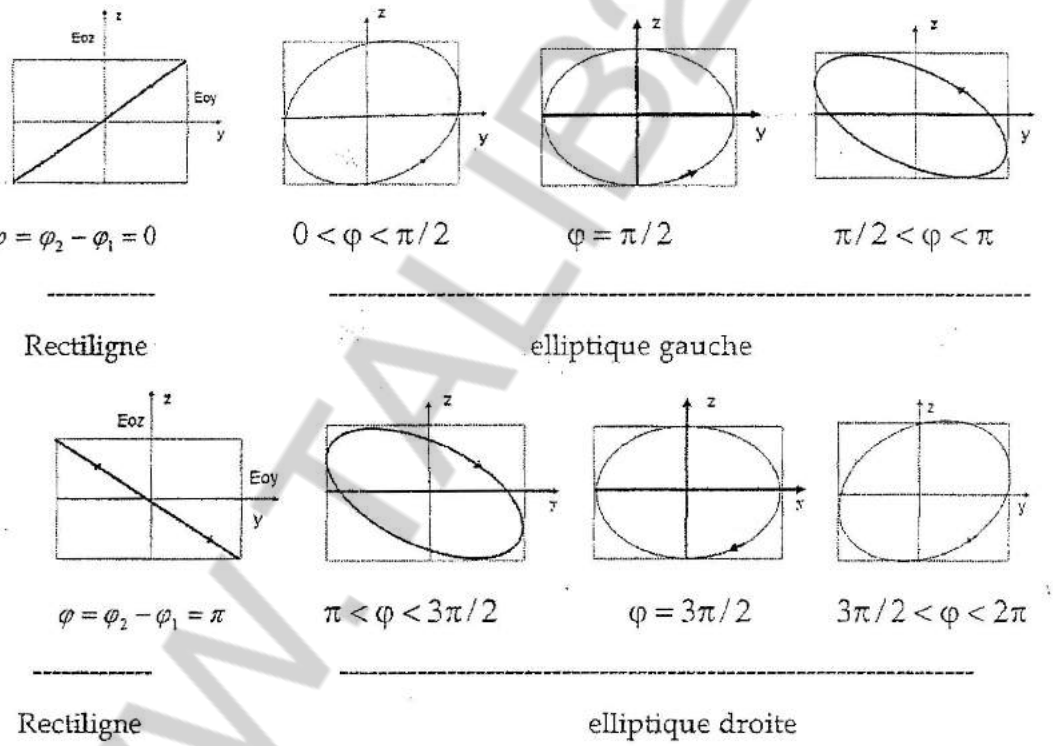


Fig. 5.6 Différents sens de rotation et d'inclinaison

<u>Sens de rotation</u> : le sens de rotation de $\vec{E}$ s'obtient en déterminant le sens de variation de E_z.

WWW.TALIB24.COM

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)_{t=0} = \omega E_{oz} \sin\varphi$$

Le sens de rotation dépend de $\sin\varphi$.

Si $\varphi \in]0,\pi[$; $\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)_{t=0} \geq 0$, la polarisation est elliptique gauche $E_z \uparrow$.

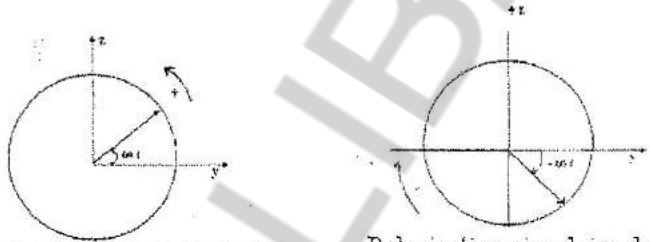
Si $\varphi \in]\pi,2\pi[$; $\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)_{t=0} \leq 0$, la polarisation elliptique droite $E_z \downarrow$.

d- Polarisation circulaire :

Si $E_{oy}=E_{oz}=E_o$ et $\varphi = \pi/2$ ou $\varphi = 3\pi/2$, la polarisation de l'onde est circulaire. On obtient :

$$E_y = E_0 \cos\omega t \text{ et } E_z = E_0 \cos(\omega t - \varphi) = \pm E_0 \sin\omega t,$$

d'où $$E_y^{\,2} + E_z^{\,2} = E_0^{\,2}$$



Polarisation circulaire gauche $\varphi = \pi/2$ Polarisation circulaire droite $\varphi = 3\pi/2$

Fig. 5.7

Aspect vibratoire temporel et spatial :

-A l'abscisse x, l'extrémité de $\vec{E}$ décrit un cercle de rayon E_o à la vitesse angulaire ω.

- A un instant t, l'extrémité de $\vec{E}$ décrit une hélice circulaire.

Exercice : Etude d'une antenne réceptrice

Une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale polarisée rectilignement (OPPM-R) de pulsation ω se propage dans le vide dans le sens positif de l'axe x'x. Son champ électrique vibre parallèlement à la direction y'y.

Comment doit on placer un cadre rectangulaire conducteur fermé de côtés a et b très inférieurs à la longueur d'onde λ_0 pour obtenir une force électromotrice répartie le long du cadre avec une amplitude maximale que l'on déterminera? Dans ce cas,

WWW.TALIB24.COM

quelle relation doivent vérifier a et b pour que l'amplitude soit maximale avec un cadre de périmètre imposé ?

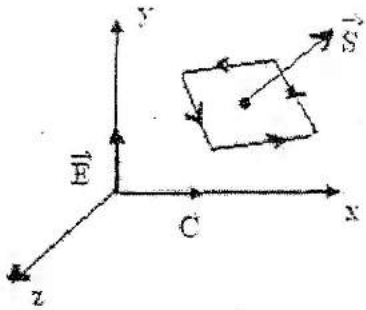


Fig. 5.8

Solution :

Les champs sont $\vec{E}_y = E_0 \cos\omega(t - \frac{x}{c})\vec{e}_y$, $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x}{c} \wedge \vec{E} = \frac{E_0}{c}\cos\omega(t - \frac{x}{c})\vec{e}_z$.

D'après la loi de Faraday $e = -\frac{d\phi}{dt}$ *avec* $\phi = \iint_S \vec{B}\, d\vec{S}$

λ_0 >> a et b, on remplace $\vec{B}$ par sa valeur au centre du cadre (de coordonnées xyz)

$\phi \approx \frac{E_0}{c}\cos\omega(t - \frac{x}{c})\vec{S}\,\vec{e}_z \Rightarrow \qquad e \approx \frac{E_0}{c}\omega \sin\omega(t - \frac{x}{c})\vec{S}\,\vec{e}_z$

ce qui montre que l'amplitude de f.e.m. est maximale quand le cadre est parallèle au plan xOy, donc perpendiculaire à $\vec{B}$.

L'amplitude e_0 est alors maximale et vaut $e_0 = \frac{E_0\,\omega ab}{c}$: valeur maximale pour a=b (cadre carré) à périmètre imposé.

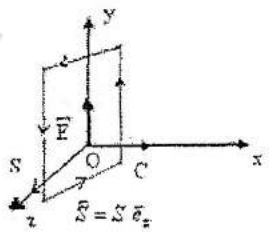


Fig. 5.9

WWW.TALIB24.COM

VI. Représentation complexe du champ électromagnétique :

Considérons une OEPPM se propageant dans la direction de l'axe Oz.

$$\vec{E}(M,t) \quad \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(kz-\omega t+\varphi_1) \\ E_y = E_{0y}\cos(kz-\omega t+\varphi_2) \\ E_z = 0 \end{cases}.$$

On peut donc lui associer la représentation complexe suivante :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \begin{cases} \underline{E_x} = \underline{E}_{0x}e^{j(kz-\omega t)} \\ \underline{E_y} = \underline{E}_{0y}e^{j(kz-\omega t)} \\ \underline{E_z} = 0 \end{cases},$$

où la grandeur soulignée est le complexe associé à la grandeur réelle.

Avec $\underline{E}_{0x} = E_{0x}e^{j\varphi_1}$ et $\underline{E}_{0y} = E_{0y}e^{j\varphi_2}$.

On peut aussi écrire $\underline{\vec{E}}(M,t)$ sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}_0}\ e^{j(Kz-\omega t)}$$

Avec $\underline{\vec{E}}_0 \begin{cases} \underline{E_{0x}} \\ \underline{E_{0y}} \\ \underline{0} \end{cases}$ (les composantes de $\underline{\vec{E}}_0$).

La représentation complexe du champ magnétique s'en déduit à l'aide de la relation :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E}$$

$$\underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{B}_0}\exp j(Kz-\omega t), \text{ avec } \underline{\vec{B}}_0 \begin{cases} -\underline{E}_{0y}/c \\ \underline{E}_{0x}/c \\ 0 \end{cases}$$

- **Les opérateurs de l'analyse vectorielle**

Les opérateurs de l'analyse vectorielle appliqués aux grandeurs d'une onde plane sinusoïdale prennent en notation complexe des formes entièrement simples. Soit P l'un des ces opérateurs, par exemple, la dérivée partielle par rapport au temps, div, rot, etc.

L'onde est plane et sinusoïdale si $\vec{S}(\vec{r},t)$ est de la forme : $\vec{S}(r,t) = Re\left[\underline{\vec{S}_0}e^{j(\omega t-\vec{K}\vec{r})}\right]$

$\vec{S}_0$ vecteur constant à composantes éventuellement complexes

$$\vec{S}_0 = S_{0x}\vec{e}_x + S_{0y}\vec{e}_y + S_{0z}\vec{e}_z$$

WWW.TALIB24.COM

$$\vec{S}_0 \begin{cases} S_{0x} = a_x e^{j\varphi_x} \\ S_{0y} = a_y e^{j\varphi_y} \\ S_{0z} = a_z e^{j\varphi_z} \end{cases} \qquad \vec{S} \begin{cases} S_x = a_x \cos(\omega t - \vec{K}\vec{r} + \varphi_x) \\ S_y = a_y \cos(\omega t - \vec{K}\vec{r} + \varphi_y) \\ S_z = a_z \cos(\omega t - \vec{K}\vec{r} + \varphi_z) \end{cases}$$

En notation complexe $\underline{\vec{S}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{S}}_o e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$

Ainsi $\qquad P \circ \mathrm{Re}(\underline{\vec{S}}) = \mathrm{Re}(P \circ \underline{\vec{S}})$

Le résultat de l'application d'un opérateur sur la partie réelle de S est égal à la partie réelle du résultat de l'application de l'opérateur sur S.

- dérivée temporelle

$$\frac{\partial \underline{\vec{S}}(\vec{r},t)}{\partial t} = j\omega \underline{\vec{S}}_o e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = j\omega \underline{\vec{S}}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\vec{S}}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{S}}_o e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -\omega^2 \underline{\vec{S}}$$

- la divergence $\qquad div\underline{\vec{S}} = -j\vec{k}\underline{\vec{S}}$
- le rotationnel $\qquad r\vec{o}t\underline{\vec{S}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{S}}$
- le laplacien vectoriel $\qquad \Delta\underline{\vec{S}} = -k^2 \underline{\vec{S}}$

Remarque : Ces identités ne sont valables que pour une OPPM.

- **Ondes sinusoïdales planes, solution des équations de Maxwell**

On se propose de retrouver directement à partir des équations de Maxwell les ondes planes sinusoïdales qui en sont solutions dans le cas d'un milieu LHI.

Soit $(\vec{E},\vec{B})$ le champ électromagnétique

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\ e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}_0}\ e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Dans un milieu non chargé et sans courant ($\rho_L = 0$, $\vec{j}_L = \vec{0}$), les équations de Maxwell s'écrivent :

$$div\underline{\vec{B}} = 0 \qquad\qquad div\underline{\vec{D}} = 0$$

$$r\vec{o}t\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \qquad\qquad r\vec{o}t\frac{\underline{\vec{B}}}{\mu_0} = \frac{\partial \varepsilon \underline{\vec{E}}}{\partial t}\text{, soit :}$$

$$-j\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$$

$$-j\varepsilon\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0.$$

WWW.TALIB24.COM

On retrouve donc la structure de l'OPPM, càd que les champs E et B sont transverses.

$$-j\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}=-j\omega\underline{\vec{B}} \qquad \rightarrow \qquad \underline{\vec{B}}=\frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\underline{\vec{E}}$$

$$-j\vec{k}\wedge\frac{\underline{\vec{B}}}{\mu_0}=j\omega\varepsilon\underline{\vec{E}} \qquad \rightarrow \qquad -\frac{\vec{k}}{\mu_0\omega\varepsilon}\wedge\underline{\vec{B}}=\underline{\vec{E}}$$

Par élimination de B, on obtient la relation : $\dfrac{k^2}{\mu_0\varepsilon\omega^2}=1$.

Or, la vitesse de propagation v étant définie par $v^2=\dfrac{\omega^2}{k^2}$, le module du vecteur d'onde k et la pulsation sont liées par la relation $\varepsilon\,\mu_0\,v^2=1$.

Nous pouvons donc retenir la solution :

$$\underline{\vec{E}}=\underline{\vec{E}}_0e^{j(\omega t-\vec{k}\vec{r})} \qquad \underline{\vec{B}}=\frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}.$$

VII. Energie associée à une onde électromagnétique

1. Théorème de Poynting dans le vide sans charge et sans courant

En l'absence de charges et de courants le théorème de Poynting s'écrit localement

$$\frac{\partial W^*}{\partial t}=-\,div.\vec{R}$$

où $W^*=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\dfrac{B^2}{2\mu_0}$ est la densité d'énergie volumique électromagnétique localisée dans l'espace et $\vec{R}=\dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ le vecteur de Poynting.

L'intégrale de cette relation locale sur un volume (τ) donne :

$$\iiint_{\tau}\left(\frac{\partial W^*}{\partial t}+div\,\vec{R}\right)d\tau=0.$$

Cette relation traduit un bilan d'énergie entre l'énergie électromagnétique, $\varsigma_{em}=\iiint_{\tau}W^*d\tau$, contenue dans le volume (τ) et celle qui en sort par rayonnement. La puissance, $P_{rad}=\oiint\vec{R}.\vec{n}_{ex}dS$, rayonnée vers l'extérieur à travers la surface S qui délimite ce volume.

$$P_{rad}=-\frac{d\varsigma_{em}}{dt}$$

WWW.TALIB24.COM

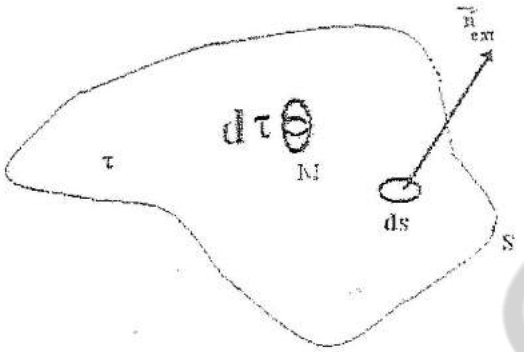


Fig. 5.10

Dans le vide, une variation d'énergie électromagnétique implique un rayonnement.

2. flux d'énergie électromagnétique associé à une onde progressive

Puisque les champs électrique et magnétique sont liés en tout point M et à tout instant t par la relation $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$, l'énergie électromagnétique volumique W^* s'écrit :

$$W^* = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 + \frac{B^2}{2\mu_o} = \varepsilon_o E^2 = \frac{B^2}{\mu_o},$$

d'autre part :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_o} = \vec{E} \wedge (\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{\mu_0 c}) = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}$$

$$\vec{R} = \varepsilon_0 \, c \, E^2 \, \vec{u} = W^* \; c \; \vec{u} \, .$$

Le vecteur de Poynting se présente donc comme un courant volumique d'énergie électromagnétique qui s'écoule dans la direction de propagation (de vecteur unitaire $\vec{u}$) avec la vitesse c. Ainsi le flux du vecteur de poynting $\vec{R}$ à travers un élément de surface **dS**, orienté selon l'unitaire de la normale $\vec{n}$, n'est rien d'autre que la puissance radiative instantanée sortant de cet élément.

$$P_{rad} = \iint_S \vec{R}.\vec{n} dS \qquad d\,P_{rad} = R\,dS \;\; \vec{u}.\vec{n} = R \; dS \; cos\,\theta \; ; \qquad \theta = angle \;\; (\vec{u},\vec{n}).$$

La puissance traversant une surface dS(M) déposée perpendiculairement à la direction de propagation est donc :

$$d\,P(M,t) = \frac{E^2(M,t)}{\mu_0 c} \, dS(M) = c\,\varepsilon_0 \, E^2(M,t) \; dS(M) \, .$$

WWW.TALIB24.COM

a) le vecteur de Poynting complexe

Le vecteur de Poynting défini pour une onde monochromatique est $\underline{\vec{R}} = \frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\mu_o}$

B* désigne le complexe conjugué de B avec $\underline{\vec{B}}^* = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}^*$

Le vecteur k étant à composantes réelles.

$$\vec{R} = \frac{1}{2}\underline{\vec{E}} \wedge (\frac{\vec{k}}{\omega\mu_0} \wedge \underline{\vec{E}}^*)$$
$$= \frac{1}{2} c\, \varepsilon_0 (E.E^*)\vec{u}$$

Il s'ensuit que le vecteur $\underline{\vec{R}}$ est réel (aussi noté $\vec{R}_m$).

<u>Important</u> : le flux de $\vec{R}_m$ à travers une surface S est la <u>puissance moyenne</u> traversant cette surface.

VIII. L'Onde scalaire sphérique

Soit r = OM la distance du point M au point fixe O. L'onde scalaire sphérique S(r,t) est solution de l'équation d'onde :

$$\Box S = 0, \text{ ou } \Delta S - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0.$$

A une date t, S(r,t) ne dépend que de la distance r :

$$\Delta S = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rS)}{\partial r^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 (rS)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (rS)}{\partial t^2} = 0$$

on retrouve l'équation de propagation générale à une dimension, de solution générale : $r\,S(r,t) = f(t - r/c) + g(t + r/c)$,

qui correspond à la somme d'une onde sphérique progressive divergente et d'une onde sphérique convergente. Si elles sont sinusoïdales, les amplitudes sont en 1/r :

$$S(r,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega(t - r/c) - \varphi_o) + \frac{B}{r}\cos(\omega(t + r/c) - \psi_o)$$

On note la différence avec les ondes planes : l'amplitude ici est en 1/r, le vecteur d'onde n'est pas défini pour une onde sphérique et évidemment il ne figure pas de produit scalaire dans l'expression de la phase.

En notation complexe : $\underline{S}(r,t) = \frac{\underline{A}}{r} e^{-j\omega(t - r/c)} + \frac{\underline{B}}{r} e^{-j\omega(t + r/c)}$

WWW.TALIB24.COM

Chapitre 2 : Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

I. Indice complexe, dispersion et absorption :

Le milieu de propagation considéré est un diélectrique, non magnétique ($\mu = \mu_0$), avec une densité de charge libre nulle ($\rho_L = 0$). Pour généraliser, on suppose que le diélectrique est non parfait (peut éventuellement être siège de courants de fuite). Dans ce milieu, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{rot}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \qquad div\ \underline{\vec{B}} = 0$$

$$\vec{rot}\,\underline{\vec{H}} = \sigma \underline{\vec{E}} + \frac{\partial \underline{\vec{D}}}{\partial t} \qquad div\ \underline{\vec{D}} = 0,$$

Soit en notation complexe avec facteur de phase en $e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$:

$$\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega.\vec{B} \qquad \underline{\vec{k}}\,.\vec{B} = 0$$

$$\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = -\left(\frac{\omega \varepsilon_r}{c^2} + i\,\sigma\,\mu_0\right)\underline{\vec{E}} \qquad \underline{\vec{k}}\,.\,\underline{\vec{E}} = 0$$

- **Relation de dispersion :**

Elle permet le calcul du vecteur d'onde complexe en fonction de ω.

$$\underline{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\varepsilon_r + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}\right) \quad (**)$$

- **Permittivité relative complexe :**

$$\underline{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \underline{\varepsilon}_r \qquad ; \qquad \underline{\varepsilon}_r = \left(\varepsilon_r + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}\right)$$

- **Indice complexe :**

$$\underline{n} = c\underline{k}/\omega \qquad ; \qquad \underline{n}^2 = \underline{\varepsilon}_r$$

.....

(**)Remarque : Avec facteur de phase en $e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$, on obtient $\underline{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\left(\varepsilon_r - i\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}\right)$ avec partie imaginaire négative, et il en est de même pour toutes les grandeurs physiques qui en découlent, comme la constante diélectrique ou l'indice complexes.

WWW.TALIB24.COM

Pour un conducteur parfait (métal), $\sigma \to \infty$, la partie réelle de ε_r peut être négligée devant la partie imaginaire, et $\underline{\varepsilon}_r = \underline{n}^2$ est imaginaire pur.

Pour un diélectrique parfait $\sigma = 0$, et donc $\underline{\varepsilon}_r = \underline{n}^2$ est réel.

- Coefficient d'adsorption, profondeur de pénétration et vitesse de phase

Si la propagation se fait dans la direction et sens x'x :

$\underline{\vec{k}} = (k' + ik'')\vec{e}_x \qquad E = E_0\, e^{-k''x} \cos(\omega t - k'x - \varphi_0)$

$\vec{k}'$ est le vecteur d'onde.

La vitesse de phase est $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}$ est positive donc k' est positif.

k'' est le coefficient d'adsorption, positif car l'onde est forcément amortie, $\delta = \dfrac{1}{k''}$ est la profondeur caractéristique de pénétration de l'onde dans le milieu.

- **Indices de réfraction et d'extinction**

Par définition, l'indice de réfraction n' est la partie réelle de l'indice complexe. n'' : indice d'extinction (partie imaginaire de l'indice complexe)

$n = n' + i\,n'' \qquad n' = \dfrac{ck'}{\omega} \quad n'' = \dfrac{ck''}{\omega} \quad v_\varphi = \dfrac{c}{n'}$

On définit également la permittivité diélectrique relative complexe ε_r et la susceptibilité électrique complexe χ_e.

$\underline{\varepsilon_r} = \varepsilon_r' + i\,\varepsilon_r'' \qquad \underline{\chi_e} = \chi_e' + i\,\chi_e''$

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e \qquad$ alors $\varepsilon_r' = 1 + \chi_e' \qquad \varepsilon_r'' = 1 + \chi_e''$

La polarisation $\underline{\vec{P}}$ définie en régime sinusoïdal permanant comme en régime stationnaire $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \chi_e \underline{\vec{E}}$ et le vecteur induction électrique complexe $\underline{\vec{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{\vec{E}}$.

II. Réflexion, réfraction sur un dioptre

Soit une interface plane et illimitée (constituant un dioptre plan) entre deux diélectriques (1) et (2) transparents, ou peu absorbants, d'indices respectifs n_1 et n_2. On considère une onde incidente plane progressive, de pulsation ω, issue du milieu (1). L'expérience montre qu'à l'onde incidente (OI) correspondent des ondes réfléchie (OR) et transmise (OT) planes progressive (Fig. 5.12).

WWW.TALIB24.COM

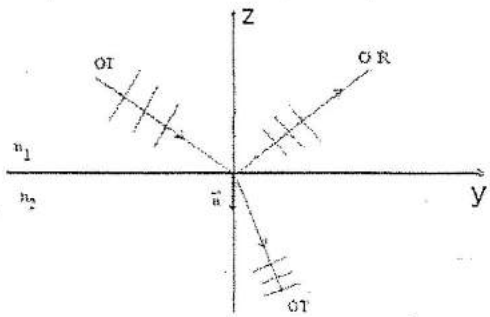


Fig. 5.12

- Les lois de Descartes

Les équations de continuité sont linéaires ce qui permet l'utilisation de la notation complexe en régime sinusoïdal permanant. Au milieu (1), l'onde résultante est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, alors qu'en milieu (2) l'onde transmise est la seule qui existe.

Soient $\vec{k}_i, \vec{k}_r$ *et* $\vec{k}_t$ les vecteurs d'onde des OI, OR et OT ainsi ω_i, ω_r *et* ω_t leur pulsations. Les champs électriques et magnétiques sont :

$$\underline{\vec{E}}_\alpha = \underline{\vec{E}}_{o\alpha} e^{j(\vec{k}_\alpha . \vec{r} - \omega_\alpha t)}$$

$$\underline{\vec{B}}_\alpha = \frac{\vec{k}_\alpha}{\omega_\alpha} \wedge \underline{\vec{E}}_\alpha \quad ; \qquad \alpha = i, r, t$$

En z = 0, les équations de continuité donnent les combinaisons linéaires du type :

$$\underline{A}_i e^{j(\vec{k}_i . \vec{r} - \omega_i t)} + \underline{A}_r e^{j(\vec{k}_r . \vec{r} - \omega_r t)} = \underline{A}_t e^{j(\vec{k}_t . \vec{r} - \omega_t t)}$$

Les solutions sont <u>non</u> nulles si :

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega \, (valeur\ commune).$$

C/C : Les trois ondes, incidente, réfléchie et transmise ont la même fréquence.

$\vec{k}_i . \vec{r} = \vec{k}_r . \vec{r} = \vec{k}_t . \vec{r} = \vec{k}_T . \vec{r} \quad \forall \vec{r}$ dans le plan du dioptre z = 0 (Voir Fig. 5. 13).

$\vec{k}_i, \vec{k}_r$ *et* $\vec{k}_t$ ont la même projection $\vec{k}_T$ sur le dioptre.

C/C : Les plans d'incidence, de réflexion et de réfraction sont confondus (On démontre ainsi la première loi de Descartes, relative a la réflexion et la réfraction).

D'autre part, les normes des vecteurs d'onde s'expriment en fonction de la pulsation et des indices de réfractions comme suit :

WWW.TALIB24.COM

$$\left\|\vec{k}_i\right\| = \frac{\omega_i}{v_{\varphi_i}} = \frac{\omega n_1}{c} \qquad \left\|\vec{k}_r\right\| = \frac{\omega_r}{v_{\varphi_i}} = \frac{\omega n_1}{c} \qquad \left\|\vec{k}_t\right\| = \frac{\omega_t}{v_{\varphi_t}} = \frac{\omega n_2}{c}$$

- $\left\|\vec{k}_i\right\| = \frac{\omega n_i}{c} = \left\|\vec{k}_r\right\| \Rightarrow i = i'$, l'angle d'incidence est égal a l'angle de réflexion (Seconde loi de Descartes).

- Enfin $k_T = k_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = k_t \cos\left(\frac{\pi}{2} - r\right)$, d'où on retrouve la troisième loi de Descartes

$$n_1 . \sin i = n_2 \sin r$$

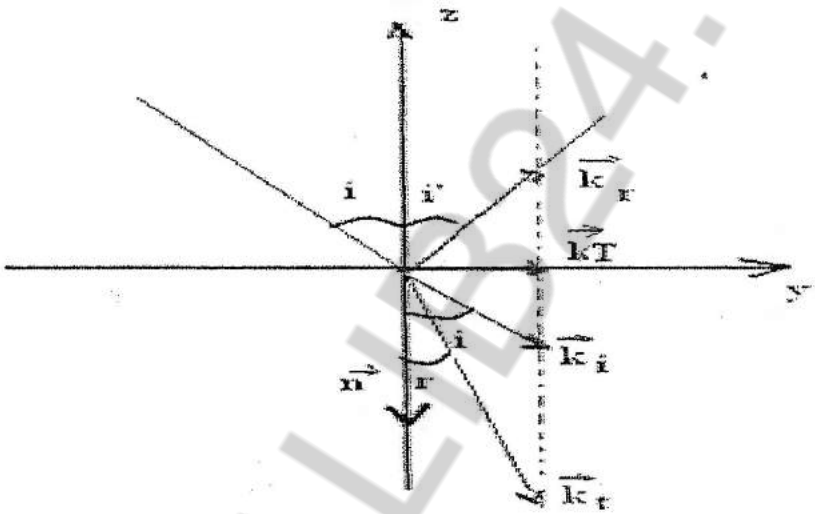


Fig. 5.13

- **Réfraction limite, réflexion totale**

Le milieu le plus réfringent a l'indice de réfraction le plus grand.

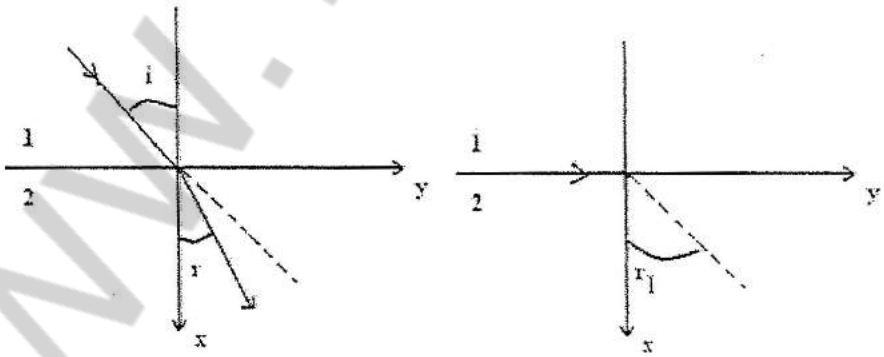


Fig. 5.14

- réfraction limite ($n_1 < n_2$) le milieu (2) est plus réfringent. Le rayon, réfracté se rapproche de la normale.

WWW.TALIB24.COM

- Si i= $\pi / 2$, l'incidence est rasante et correspond à l'angle de réfraction limite r_ℓ telle que : $\sin r_\ell = \frac{n_1}{n_2}$.

- Réflexion totale (n1>n2) : le milieu (2) est moins réfringent. Le rayon réfracté s'éloigne de la normale.

- Si r= $\pi / 2$, l'émergence est rasante, l'angle de réflexion totale i_ℓ est $\sin i_\ell = \frac{n_2}{n_1}$

- Si i> i_ℓ, il n'y a plus de rayon réfracté, le rayon incident est totalement réfléchi. C'est la réflexion totale.

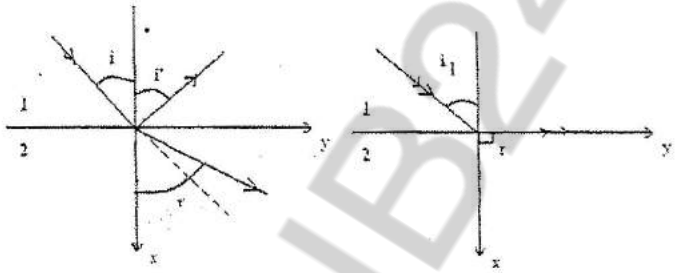


Fig. 5.15

- **Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude sous incidence normale**

Soit un dioptre plan entre deux milieux transparents d'indice n_1 et n_2. Une onde plane progressive incidente et polarisée selon y'y et se propage selon x'x normale au plan du dioptre yoz.

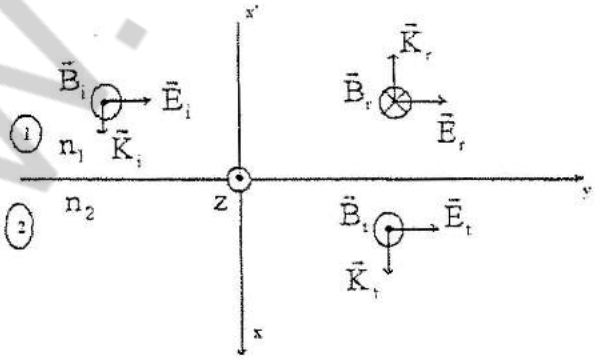


Fig. 5.16

WWW.TALIB24.COM

Les champs électriques et magnétique des ondes réfléchie et transmise sont polarisés comme ceux de l'onde incidente ; i=0 et i'=r=0. Dans le cas étudié E et B sont continus en x=0 (Plan du dioptre).

$$\underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r = \underline{\vec{E}}_t \qquad \underline{\vec{B}}_i + \underline{\vec{B}}_r = \underline{\vec{B}}_t \qquad \frac{\underline{\vec{k}}_i}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}_i + \frac{\underline{\vec{k}}_r}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}_r = \frac{\underline{\vec{k}}_t}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}_t$$

En introduisant les projections des champs électriques sur y'y, on a :

$$\underline{E}_i + \underline{E}_r = \underline{E}_t \qquad \underline{E}_i - \underline{E}_r = \frac{n_2}{n_1}\underline{E}_t$$

En tenant compte de $\vec{k}_i = -\vec{k}_r$; $\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\| = k$; $\|\vec{k}_t\| = k\frac{n_2}{n_1}$,

on définit coefficient de réflexion $\underline{r}$ et transmission $\underline{t}$

$$\underline{r} = \frac{\underline{E}_r}{\underline{E}_i} \quad ; \quad \underline{t} = \frac{\underline{E}_t}{\underline{E}_i}$$

on obtient : $1 + \underline{r} = \underline{t}$; $1 - \underline{r} = \frac{n_2}{n_1}\underline{t}$

d'où $\underline{r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$; $\underline{t} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$

- par réflexion sur un milieu plus réfringent, E_r est déphasé de π par rapport à E_i. Il n'est pas déphasé par réflexion sur un milieu moins réfringent.
- E_t est toujours en phase avec E_i.

- **Coefficients de réflexion et de transmission en énergie**

Dans le vide, la puissance surfacique moyenne transportée par une OEPPS à travers une surface orthogonale à la direction de propagation est $P = \varepsilon_0 c \frac{E^2}{2}$.

Dans un diélectrique transparent on l'obtient par la substitution : $P = n\varepsilon_0 c \frac{E^2}{2}$.

Les puissances surfaciques moyenne incidente, réfléchie et transmise sont :

$$P_i = n_1\varepsilon_0 c\frac{E_i^2}{2} \quad P_r = n_1\varepsilon_0 c\frac{E_r^2}{2} \quad P_t = n_2\varepsilon_0 c\frac{E_t^2}{2}$$

On définit les coefficients de réflexion et transmission en énergie par :

$$R = \frac{P_r}{P_i} \qquad T = \frac{P_t}{P_i} \qquad R = r^2 \qquad T = \frac{n_2}{n_1}t^2$$

WWW.TALIB24.COM

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \text{ et } \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

La relation $T + R = 1$ traduit la conservation de l'énergie : la puissance moyenne incidente se trouve dans les puissances moyenne réfléchie et transmise.

Pour le dioptre air-verre :

$$n_1=1,\ n_2=1.5,$$

d'où

$$R = 0.04 \text{ et } T=0.96.$$

WWW.TALIB24.COM