# *ELECTROMAGNETISME DANS LE VIDE*

WWW.TALIB24.COM

# Rappels Mathématiques

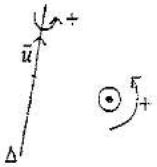
## I-Orientation de l'espace

### A) Convention d'orientation

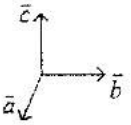
#### 1) Convention 1 (du trièdre direct)

- Rotation autour d'un axe :

On définit (arbitrairement) le sens positif de rotation autour d'un axe $\Delta$ dirigé par $\vec{u}$ :



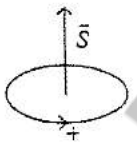

- Trièdre $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ direct :




(c'est-à-dire que $\vec{c}$ est dans le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$)

- Surface limitée par un contour :

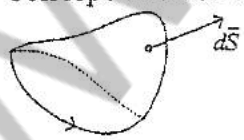
Pour un disque :




On dit alors que la surface et le contour sont orientés compatiblement (choix toujours arbitraire)

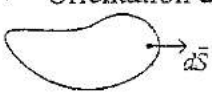
Pour une surface quelconque :

Correspond à une transformation continue du disque




#### 2) Convention 2

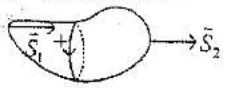
- Orientation d'une surface fermée :




Par convention, les $d\vec{S}$ sont "vers l'extérieur".

WWW.TALIB24.COM

- Attention :




Si on sépare la surface fermée en deux et qu'on oriente le contour,
$\vec{S}_2$ sera vers l'extérieur,
Mais $\vec{S}_1$ sera vers l'intérieur.

## B) Vecteurs vrais et Pseudo–vecteurs

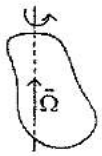
### 1) Vecteurs vrais (polaires)

C'est un vecteur qui ne dépend pas de l'orientation de l'espace choisie (convention 1)

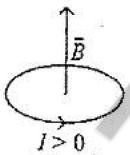
Exemples : les vecteurs vitesse, accélération.

### 2) Pseudo–vecteurs (axiaux)

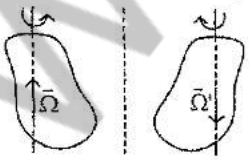
Ces vecteurs dépendent de l'orientation de l'espace.
Exemples :
Vecteur rotation :




Dans l'autre orientation, $\vec{\Omega}$ serait vers le bas.
Champ magnétique :




Particularité : pour les symétries




### 3) Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs vrais donne un pseudo–vecteur,
et celui d'un vecteur vrai par un pseudo–vecteur donne un vecteur vrai.

WWW.TALIB24.COM

Ainsi, avec comme avec la "règle des signes" (en notant + un vecteur vrai, – un pseudo–vecteur) : $\underset{+}{\vec{a}} \wedge \underset{-}{\vec{b}} = \underset{-}{\vec{c}}$ $\quad \begin{matrix} + & - & + \\ + & - & - \end{matrix} \quad \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$

Exemple : $\underset{\text{vrai}}{\vec{F}} = q(\underset{\text{vrai}}{\vec{v}} \wedge \underset{\text{pseudo}}{\vec{B}})$

# II Champs

## A) Champs de scalaires, champs de vecteurs

### 1) Champs de scalaires

Définition :

C'est une application $f : \varepsilon \to \mathbb{R}$ où $\varepsilon$ est un espace affine de dimension 3.

En général, $f$ dépend aussi de $t$ : $f(M,t)$

Choix d'une origine :

On fixe un point $O$, et pour tout point $M$, on note $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

On a ainsi $f(M) = \tilde{f}(\vec{r})$ (pratiquement, on confond $f$ et $\tilde{f}$)

Choix d'un système de coordonnées :

$\vec{r}$ peut s'écrire en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques.

On a ainsi $f(\vec{r}) = \tilde{\tilde{f}}(x,y,z)$ en cartésiennes.

De même, on confondra aussi $\tilde{\tilde{f}}$ et $f$.

### 2) Champs de vecteurs

Définition :

C'est une application de la forme $M \mapsto \vec{A}(M)$ (où $\vec{A}(M)$ appartient à un espace vectoriel de dimension 3)

Comme pour les champs scalaires, on écrira indifféremment $\vec{A}(M)$, $\vec{A}(\vec{r})$ ou $\vec{A}(x,y,z)$.

## B) Opérateurs relatifs aux champs

On trouve pour les champs scalaires le gradient et le Laplacien (scalaire)

Pour les champs de vecteurs, on a aussi le Laplacien (vectoriel), la divergence, et le rotationnel.

### 1) Le gradient

On considère ici l'espace muni d'un repère $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$

- Définition :

Soit $f(x,y,z)$ un champ scalaire.

On pose $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z}$



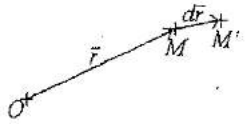
WWW.TALIB24.COM

- Notation nabla :

On note $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$ (notation symbolique)

Ainsi, on a $\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\text{grad}} f$ .

- Définition intrinsèque du gradient :




On considère un champ scalaire $f(x, y, z)$. On a :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

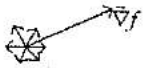
Et $d\vec{r} = dx.\vec{u}_x + dy.\vec{u}_y + dz.\vec{u}_z$

On a donc $\boxed{df = grad\vec{f} \cdot d\vec{r}}$, et cette définition implicite de $\vec{\nabla} f$ est indépendante de la base choisie.

Si de plus $f$ dépend de $t$, on a ainsi $df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t}dt$

- Interprétation :

On cherche les conséquences sur $f$ d'un déplacement élémentaire :




Pour un déplacement (élémentaire) dans le plan orthogonal à $\vec{\nabla} f$ , $f$ ne varie pas : $df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = 0$ .

C'est au contraire en se déplaçant dans la direction de $\vec{\nabla} f$ (dans le même sens ou à l'opposé) que la variation sera la plus importante.

- Gradient en coordonnées cylindriques et sphériques

- Cylindriques :

Expression du gradient :

Avec $f(r, \theta, z)$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Et $d\vec{r} = dr.\vec{u}_r + rd\theta.\vec{u}_\theta + dz.\vec{u}_z$ .

Ainsi, $\boxed{\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z}$

- Sphériques :

Avec $f(r, \theta, \varphi)$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi$$

Et $\boxed{d\vec{r} = dr.\vec{u}_r + rd\theta.\vec{u}_\theta + r\sin\theta.d\varphi.\vec{u}_\varphi}$

Ainsi, $\boxed{\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi}$

WWW.TALIB24.COM

## 2) Divergence

Définition :

Pour un champ de vecteur $\vec{A}$ :

$$\boxed{\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}$$

## 3) Rotationnel

Définition :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \ldots}$$

Propriétés :

- C'est un pseudo–opérateur (il dépend de la convention d'orientation choisie). Si $\vec{A}$ est un vecteur vrai, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ sera un pseudo–vecteur.
- C'est un opérateur linéaire
- Il est indépendant de la base choisie

## 4) Laplacien

- Scalaire

Soit $f$ un champ scalaire.

On pose alors $\boxed{\Delta f = \text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f}$

- Vectoriel

En coordonnées cartésiennes :

Pour $\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$

On pose $\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{\nabla}^2 A_x \vec{u}_x + \vec{\nabla}^2 A_y \vec{u}_y + \vec{\nabla}^2 A_z \vec{u}_z}$

On a une définition intrinsèque :

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\vec{A} - \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})}$$

## 5) Formulaire

- Identités :

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \vec{0}$ $\quad (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{0})$

$\text{div}\,\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = 0$ $\quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0)$

WWW.TALIB24.COM

- Produits :

$$\vec{grad}(fg) = g\,\vec{grad}f + f\,.\vec{grad}\,g$$
$$div(f\vec{A}) = f div\,\vec{A} + \vec{A}.\vec{grad}f$$
$$\vec{rot}\,(f\vec{A}) = f.\vec{rot}\,\vec{A} + \vec{grad}\,f \wedge \vec{A}$$
$$div\,(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{rot}\,\vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{rot}\,\vec{B}$$

## C) Circulation et flux d'un champ de vecteurs

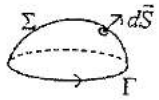
### 1) Circulation

- Définition :

On pose $C = C(P,Q,\Gamma) = \int_P^Q \vec{A} \cdot d\vec{l}$

- Théorème de Stokes :

Enoncé : on considère une surface ouverte $\Sigma$, orientée compatiblement avec son contour $\Gamma$ :




Alors $$\boxed{\oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_\Sigma \vec{rot}\,\vec{A} \cdot d\vec{S}}$$

### 2) Flux d'un champ de vecteur

- Définition :

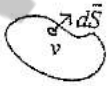
On considère une surface $\Sigma$ :

On définit $\phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{A} \cdot d\vec{S}$

Si la surface est ouverte, le signe de $\phi_\Sigma$ dépend de l'orientation choisie.

- Théorème de Green et Ostrogradski :

On considère un champ $\vec{A}$, une surface $\Sigma$ fermée (orientée vers l'extérieur) délimitant un volume $v$ :




Alors $$\boxed{\oiint_\Sigma \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_v div\vec{A}.d\tau}$$

Cette formule donne aussi une définition intrinsèque de la divergence de $\vec{A}$.

WWW.TALIB24.COM

## III Gradient de 1/r.

On note $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ , $r = PM$

On a : $\frac{1}{r} = f(P,M) = \frac{1}{\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + (z_M - z_P)^2}}$

On s'arrange ici pour avoir $\frac{1}{r} = f(P)$ ou $\frac{1}{r} = f(M)$ (c'est-à-dire qu'on fixe un des points)

Calcul de $\vec{\nabla}_M \frac{1}{r}$ (à $P$ fixé) :

$\vec{\nabla}_M(\frac{1}{r}) = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r}\vec{u}_r = \frac{-1}{r^2}\vec{u}_r$.  $\vec{grad}_M(\frac{1}{r}) = \frac{-1}{r^2}\vec{u}_r$

Ainsi, $\vec{\nabla}_M(\frac{1}{r}) = \frac{-\vec{r}}{r^3}$

Et, de la même façon, $\vec{\nabla}_P \frac{1}{r} = +\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}_M \frac{1}{r}$

C à d :

$$\vec{grad}_P(\frac{1}{r}) = -\vec{grad}_M(\frac{1}{r})$$

$\vec{grad}_M(\frac{1}{r}) = \frac{-\vec{r}}{r^3}$  $\vec{grad}_P(\frac{1}{r}) = \frac{+\vec{r}}{r^3}$

Remarque :

Avec une autre fonction $f(r)$ quelconque, on a toujours $\vec{\nabla}_P f(r) = -\vec{\nabla}_M f(r)$

---

WWW.TALIB24.COM

# Magnétostatique du vide

-La magnétostatique est l'étude des phénomènes magnétiques indépendants du temps.

- les phénomènes magnétiques sont des interactions entre charges électriques en mouvement.

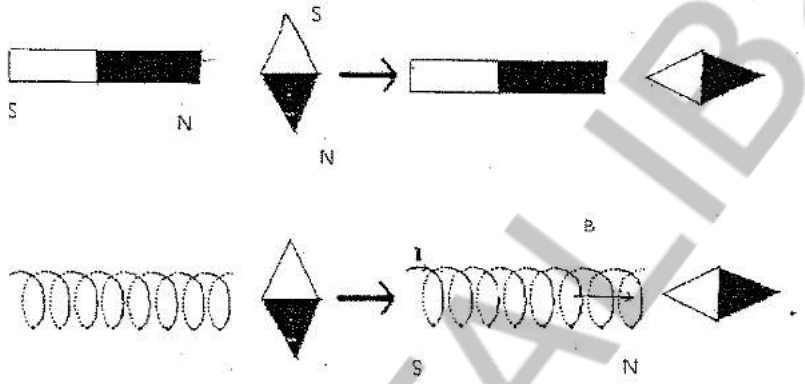
-leur interprétation nous conduira à introduire un champ vectoriel : le champ magnétique $\vec{B}$

Un phénomène magnétique connu depuis l'antiquité est l'interaction du fer par la magnétite ( $Fe_3O_4$ ).

C'est au début du 19ème siècle qu'on trouvera un lien entre l'électricité et le magnétisme.

En 1819 Oersted mit en évidence la première fois l'effet d'un courant électrique sur un aimant.

On montre que l'effet d'un aimant sur une aiguille aimantée est de même nature que l'effet d'une bobine traversée par un courant sur la même aiguille aimantée.

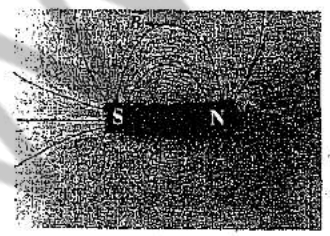


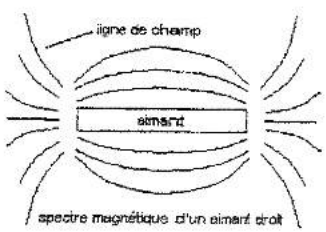

De même l'effet d'un aimant et d'une bobine sont les mêmes sur un circuit électrique, un faisceau d'électrons ou un tube cathodique d'un téléviseur.

**Visualisation du champ magnétique**

Des grains de limaille de fer, saupoudrés autour d'un aimant, vont s'orienter selon les lignes de champ.

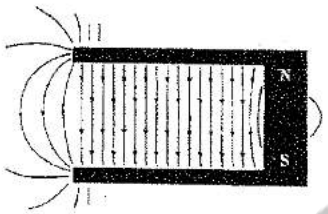
- Les lignes de champs montrent l'orientation du champ magnétique.
- La densité de lignes de champ informe sur l'intensité du champ magnétique.
- La figure formée par la limaille de fer s'appelle un spectre magnétique.




WWW.TALIB24.COM

*Ligne de champ entre les armatures d'un aimant en U.*
*(Toutes les lignes de champ extérieures ne sont pas dessinées)*




**Observation**
A l'intérieur d'un aimant en U le champ magnétique est constant en intensité et en direction. On dit qu'il est uniforme

## I. Champ magnétique créé par une charge en mouvement.

Soit une charge q animée d'une vitesse $\vec{v}$, l'expérience montre que $\vec{B}$ dépend de q $\vec{v}$, en s'annulant avec $\vec{v}$, et obéit à la même loi de variation en r que le champ électrique .

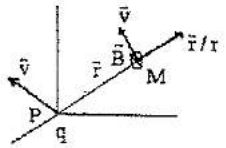



Fig. 1. 1

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{q\vec{v}\wedge\vec{r}}{r^3},$$

Module $$\|B\| = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{qvr\sin\alpha}{r^3};\alpha = (\vec{v},\vec{r})$$

$(\vec{B},\vec{v},\vec{r})$ trièdre direct $\vec{B}$ perpendiculaire au plan formé par $\vec{v}$ et $\vec{r}$.

Unité du champ magnétique dans le système international est le Tesla : [B]= T : Tesla (S.I.)

un sous multiple (Gs) le Gauss : $1Gs = 10^{-4}$ T

A partir du flux $d\phi = B\,dS$ [B] = $W.m^{-2}$ (Weber par mètre carré).

Le facteur $\mu_0$ est la perméabilité du vide : il décrit la capacité du vide à << laisser passer >> le champ magnétique.

Sa valeur dans le système international est :

$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ $H.m^{-1}$ ( H :pour Henry ) ( S.I ) convention.

Le facteur $4\pi$ a été introduit pur simplifier les équations de Maxwell.

WWW.TALIB24.COM

## 2/ Force électromagnétique entre deux charges ponctuelles en mouvement

$$(\vec{F}_{12})_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$= q_2 \vec{E}_1 \qquad q_2 \text{ supposé fixe}$$

Force électromagnétique : force de Laplace

$$(\vec{F}_{12})_m = q_2 \vec{v}_2 \wedge \vec{B}_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} q_2 \vec{v}_2 \wedge \frac{q_1 \vec{v}_1 \wedge \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\left(\vec{F}_{12}\right)_m = \vec{0} \quad \text{si } \vec{v}_2 = 0$$

Ou

$$\vec{v}_1 = \vec{0} \quad (\vec{B}_1 = \vec{0})$$

Ou

$$\vec{B}_1 // \vec{v}_2$$

$$\left(\vec{F}_{12}\right)_e = -\left(\vec{F}_{21}\right)_e$$ principe de l'action et de la réaction

Mais $\left(\vec{F}_{12}\right)_m \neq -\left(\vec{F}_{21}\right)_m$

En général les forces magnétiques n'obéissent pas au principe de l'action et de la réaction.

- Dans le cas général, si une particule q de vitesse $\vec{v}$ est soumise à la fois à un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$, la force globale dite de Lorentz est : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$

## 3/ Loi de Biot et Savart

A/ Champ magnétique produit par des courants stationnaires caractérisés par la densité $\vec{j}$

WWW.TALIB24.COM

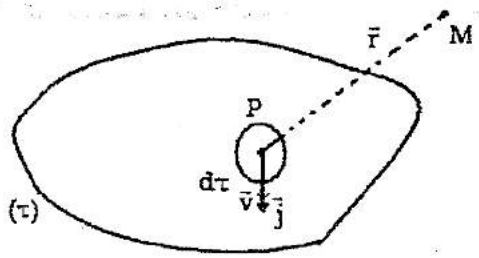



Fig. 1. 2

Soit une distribution volumique de charge $dq = \rho.d\tau$

$\vec{v}.dq = \rho.\vec{v}.d\tau = \vec{j}.d\tau \quad \vec{j} = \rho.\vec{v}$

$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{dq\vec{v}\wedge\vec{r}}{r^3}$ $\mu_o$: perméabilité magnétique absolue du vide

$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\vec{j}\wedge\vec{r}}{r^3}d\tau$

$\vec{B} = \iiint_{\tau}\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\vec{j}\wedge\vec{r}}{r^3}d\tau$

$\varepsilon_o \mu_o c^2 = 1$ c : célérité de la lumière dans le vide

**B/ Circuit filiforme**

Les dimensions transversales des fils sont négligeables.

Ce circuit est parcouru par un courant I continu.

$\vec{v}.dq = \vec{j}.d\tau = \left(\frac{dq}{dt}\right).\vec{v}.dt = I.d\vec{l}$

Champ magnétique créé par l'élément de courant Idl en M :

$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\wedge\vec{r}}{r^3}$ $\qquad P\vec{M} = \vec{r}$

Le trièdre $(\vec{B}, d\vec{l}, \vec{r})$ doit être direct. $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\oint\frac{Id\vec{l}\wedge\vec{r}}{r^3}$

$d\vec{l}$ a le sens du courant I



WWW.TALIB24.COM

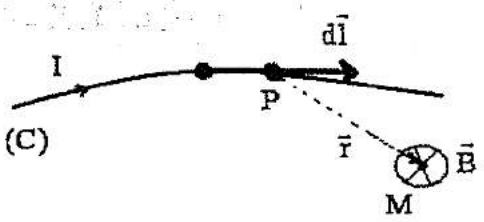



Fig. 1. 3

## a) Application au calcul des inductions créés par des circuits simples

### i/ Fil rectiligne

- longueur finie

Tous les $d\vec{B}$ en M ont même direction et même sens ∀P.

NM = a , PM = r , PN = l

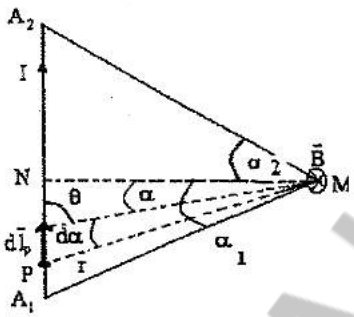



Fig. 1. 4

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\wedge\vec{r}}{r^3} \qquad dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

PN = l = a tg α  dl = (a/cos² α)d α

α+θ = π/2  sin θ = cos α = a/r

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi a}\int_{\alpha 1}^{\alpha 2}\cos\alpha d\alpha = \frac{\mu_o I}{4\pi a}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

$B = \frac{\mu_o I}{4\pi a}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$ pour une longueur indéfinie $\alpha_2 = +\pi/2$ , $\alpha_1 = -\pi/2$

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi a}$$

Lignes de champs : Cercles d'axes Δ

WWW.TALIB24.COM

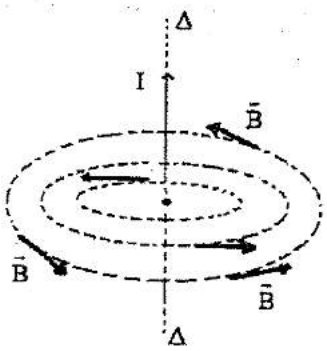



Fig. 1. 5

Règle : Tire bouchon de Maxwell : progresse dans le sens du courant, tournerait dans le sens des lignes du champ

### b) théorème d'Ampère

Considérons un certain nombre de fils parcourus par des courants d'intensités $I_1$, $I_2$, …., $I_n$

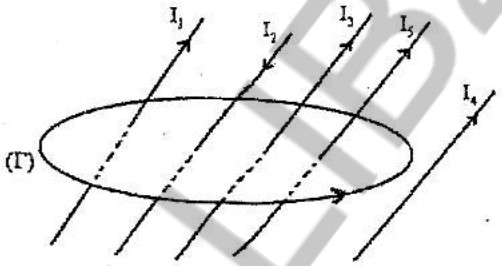



Fig. 1..6

Considérons une courbe fermée (Γ) enlaçant certains de ces courants : $I_1$, $I_2$, .., $I_j$

Choisissons un sens positif de parcours sur (Γ) et le sens correspondant de la normale $\vec{n}$ orientée à (Γ) « règle du tire bouchon »

$I_i > 0$ si $I_i$ est de même sens que $\vec{n}$

$I_i < 0$ si $I_i$ est de sens contraire à $\vec{n}$

Le théorème s'exprime sous la forme :

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_o \sum_i I_i$$

$\sum_i I_i$ somme algébriqueExemple ici $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_o (I1 - I2 + I3 + I5)$

On ne considère que les courants traversant la surface limitée par (Γ)



WWW.TALEB24.COM

Enoncé du théorème d'Ampère :

La circulation du vecteur champ magnétique le long d'une courbe fermée (Γ) est égale au produit par μo de la somme algébrique des courants dont la courbe (Γ) traverse les circuits.

Exemple : fil rectiligne indéfini

$$C = \oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_o I \qquad B 2\pi a = \mu_o I \qquad B = \frac{\mu_o I}{2\pi a}$$

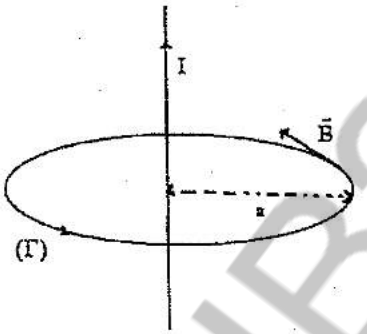



Fig. 1. 7

I > 0, le courant traverse (Γ) de la face sud (-) à la face nord (+)

### c) Conservation du flux magnétique

Le flux de $\vec{B}$ à travers une surface S fermée

$$\phi = \oiint_S \vec{B} d\vec{S} = \iiint_\tau div.\vec{B} d\tau$$

or $div\vec{B} = 0$ car B s'exprime sous la forme d'un rotationnel $\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$

( voir paragraphe suivant )

$\phi$ =Wb : weber

$\phi$=0 : le flux du champ magnétique est conservatif

$\phi = \phi_1 - \phi_2$ $\quad S = S_1 + S_2$

WWW.TALIB24.COM

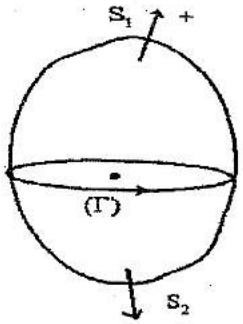



Fig. 1. 8

Le flux sortant de S = flux sortant de S1 + flux sortant de S2

Le flux de B à travers une courbe fermée (Γ), orientée est indépendant de toute surface fermée s'appuyant sur le contour (Γ) et orienté par lui.

## 4/ Potentiel vecteur du champ magnétique

a) Définition :

Pour une distribution volumique de courant caractérisée par une densité de courant $\vec{j}$ .

j ne dépend que des coordonnées de P, les dérivations se font par rapport aux coordonnées de M $\rightarrow r\bar{o}\vec{t}\vec{j} = \vec{0}$

$$\vec{r} = P\vec{M}$$

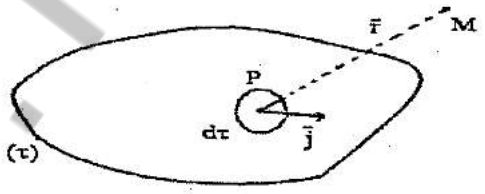



Fig. 1. 9

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\iiint_{\tau}\frac{\vec{j}\wedge\vec{r}}{r^3}d\tau \qquad \text{Or} \qquad \frac{\vec{r}}{r^3} = -gr\bar{a}d_M\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\iiint\vec{j}\wedge\bar{g}rad_M\frac{1}{r}d\tau$$



WWW.TALIB24.COM

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\iiint \vec{grad}_M \frac{1}{r} \wedge \vec{j}\, d\tau$$

Or $$r\vec{o}t\frac{\vec{j}}{r} = \frac{1}{r} ro\vec{t}j + gr\vec{a}d\left(\frac{1}{r}\right) \wedge \vec{j}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\iiint_\tau rot(\frac{\vec{j}}{r}) d\tau \rightarrow \quad \vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$$

avec $\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\vec{j}}{r} d\tau$ potentiel vecteur magnétique

b) Cas particuliers

i- charge ponctuelle de vitesse $\vec{v}$ : $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{q\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3} \rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r}$

ii- courant filiforme $\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\oint \frac{Id\vec{l}}{r}$

le potentiel vecteur joue pour la magnétostatique un rôle analogue à celui du potentiel scalaire en électrostatique.

c) Invariance de Jauge

i- comme le potentiel scalaire de l'électrostatique, le potentiel vecteur n'est pas complètement déterminé par la relation $\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$.

$\vec{A}$ n'est déterminé qu'à un gradient d'une fonction f différentielle près

$$\vec{A} = A' + gr\vec{a}d\, f$$

ce changement s'appelle un changement de Jauge.

$$\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A} = r\vec{o}t\vec{A}' + 0 = \vec{B}'$$

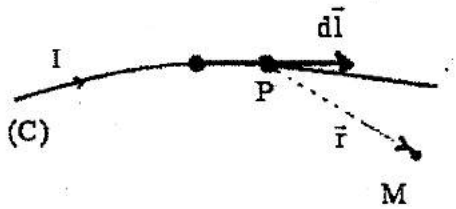



Fig. 1. 10

ii- $div\vec{A} = 0$



WWW.TALIB24.COM

en effet $div.\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\oint div\left(\frac{Id\vec{l}}{r}\right)$

or $div\left(\frac{d\vec{l}}{r}\right) = \frac{1}{r}div.d\vec{l} + d\vec{l}.grad.\frac{1}{r}$

$div.d\vec{l} = 0$ car les dérivations se font par rapport à M

$div.\vec{A} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\oint d\vec{l}.grad_M\left(\frac{1}{r}\right)$

$$div.\vec{A} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\oint d\vec{l}.grad_P\left(\frac{1}{r}\right)$$

$\int d\vec{l}.grad_P\left(\frac{1}{r}\right)$ : circulation de grad (1/r) sur la courbe fermée (C) qui est nulle.

d'où $div.\vec{A} = 0$

on a

$$\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$$

$$r\vec{o}t\vec{B} = r\vec{o}tr\vec{o}t\vec{A} = gr\vec{a}ddiv\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

d'où $r\vec{o}t\vec{B} = -\Delta\vec{A}$

5/ Expression locale du théorème d'Ampère

Soit une surface limitée par (Γ)

Théorème de Stockes : $\oint \vec{B}d\vec{l} = \iint_S r\vec{o}t\vec{B}.d\vec{S}$

Fig. 1. 11

D'une part, dans le cas d'une distribution volumique de courants $\sum_i I_i = \iint_S \vec{j}.d\vec{S}$

$$d\vec{S} = dS.\vec{n}$$



WWW.TALIB24.COM

à partir du théorème d'Ampère on déduit la relation de Maxwell-Ampère :

$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_o \sum I$ et $\iint_S r\vec{o}t\vec{B}.\vec{n}dS = \mu_0 . \iint \vec{j}.\vec{n}.dS$

Alors

$r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0 . \vec{j}$

or $r\vec{o}t\vec{B} = -\Delta\vec{A} \rightarrow$ $\Delta\vec{A} + \mu_0 . \vec{j} = \vec{0}$ analogue à la relation de Poisson.

Dans le vide, on définit l'excitation magnétique $\vec{H}$ en un point par la relation

$$\vec{B} = \mu_0 . \vec{H}$$

$\vec{B}$ champ magnétique en ce point $r\vec{o}t\vec{H} = \vec{j}$

6/ Action des champs magnétiques sur les courants :

Cas d'un circuit de charge volumique de densité $\vec{j}$ placée dans un champ $\vec{B}$ :

$$d\vec{F} = dq.\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{j}.d\tau \wedge \vec{B}$$

$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$ : densité volumique de force

i-conducteur filiforme : $dq.\vec{v} = \frac{dq}{dt}.\vec{v}.dt = I.d\vec{l}$

$d\vec{F} = I.d\vec{l} \wedge \vec{B}$ $\vec{F} = \oint I.d\vec{l} \wedge \vec{B}$

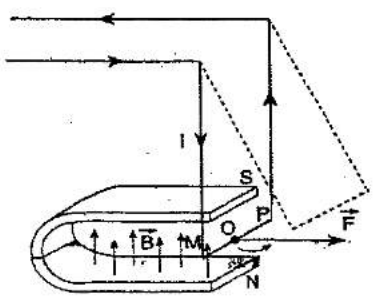
Suspendons un conducteur métallique rectiligne entre les pôles d'un aimant en fer à cheval. Lorsqu'un courant électrique traverse le conducteur, on constate que ce conducteur se déplace. Il subit donc une force appelée : force électromagnétique.

Main droite

-Pouce : courant

-Index : champ

-Majeur : force




WWW.TALIB24.COM

b) Interaction de deux circuits

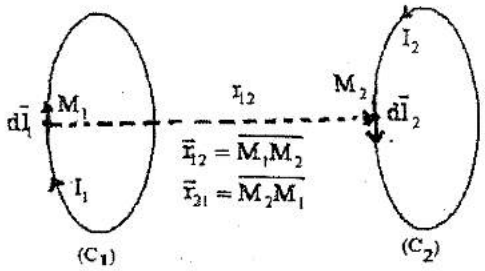



Fig. 1. 12

Soient deux circuits (C1) et (C2) parcourus par $I_1$ et $I_2$ respectivement

en Mj : $d\vec{B}_i = \dfrac{\mu_o I_i}{4\pi} \dfrac{d\vec{l}_i \wedge \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}$ $\qquad d^2\vec{F}_{ij} = I_j d\vec{l}_J \wedge d\vec{B}_i$

bien que $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ $\qquad \left(d^2\vec{F}_{12}\right) \neq -\left(d^2\vec{F}_{21}\right)$

* le principe de l'action et de la réaction [redacted] à l'échelle élémentaire.

* Mais si les courants sont continus (régime stationnaire ou permanant) les actions totales entre circuits fermés obéissent à [redacted] --- ce qui est vérifiable expérimentalement.

[redacted]

* $d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1 = I_2 . d\vec{l}_2 \wedge \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\left(-\vec{k}\right)$ $\qquad d\vec{F}_{12} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_2 \left(-\vec{i}\right)$

* $d\vec{F}_{21} = I_1 d\vec{l}_1 \wedge \vec{B}_2 = I_1 . d\vec{l}_1 \wedge \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\left(\vec{k}\right)$ $\qquad d\vec{F}_{21} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_1 \left(\vec{i}\right)$

WWW.TALEB24.COM

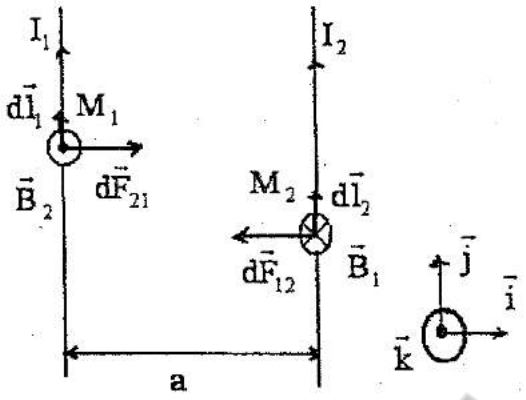



Fig. 1. 13

$$\frac{dF_{12}}{dl_2} = \frac{dF_{21}}{dl_1} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a}$$ force par unité de longueur

**Attraction** si $I_1$ et $I_2$ sont de même sens

**Répulsion** si $I_1$ et $I_2$ sont de sens contraires

$\mu_o = 4\pi 10^{-7}$, si $I_1 = I_2 = 1A$ , a=1 m alors $dF/dl = 2.10^{-7}$ N/m

Ce sont ces valeurs qui ont servi à définir légalement l'unité d'intensité : **l'Ampère**

7/ **Travail des forces électromagnétiques**

a) Champ propre et champ appliqué

$d\vec{F}_a = Id\vec{l} \wedge \vec{B}_a$ : force provenant de l'action du champ extérieur appliqué $\vec{B}_a$

$d\vec{F}_i = Id\vec{l} \wedge \vec{B}_p$ : force intérieure provenant de l'action du champ propre $\vec{B}_p$

créé par tous les éléments du circuit autre que $d\vec{l}$ .

S'il s'agit d'un circuit indéformable le système des forces intérieures est nul $\tau i=0$, il ne reste que $\tau a \neq 0$

**b) Théorème de Maxwell**

Relatif à un circuit indéformable avec I= cste.

$$d^2\tau = d\vec{F}.d\vec{r} = (Id\vec{l} \wedge \vec{B}).d\vec{r} = I\left(d\vec{r} \wedge d\vec{l}\right)\vec{B} = I.d^2\vec{S}.B$$

$d\vec{r} \wedge d\vec{l} = d^2\vec{S}$

WWW.TALIB24.COM

* $d^2S$ : Surface balayée par l'élément $d\vec{l}$ pendant son déplacement $d\vec{r}$.

$d^2\phi_c = B.d^2S$ flux coupé par $d\vec{l}$ dans son deplacement $d\vec{r}$.

$$d^2\tau = I.d^2\phi_c$$

Pour tout le circuit (C) $d\tau = I.d\phi_c$

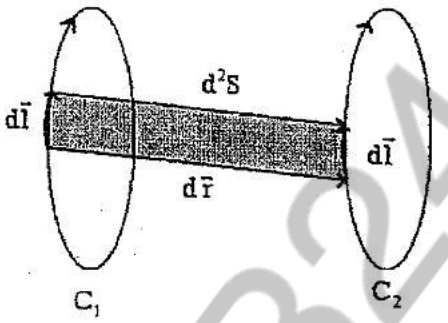



Fig. 1. 14

*Pour un déplacement fini du circuit $\tau = I.\phi_c$

$\phi_c$= flux coupé par le circuit (C) dans son déplacement dans le champ $\vec{B}$ càd le flux à travers la surface balayée par tout le circuit dans son déplacement.

**Enoncé** le travail des forces électromagnétiques au cours du déplacement d'un circuit indéformable parcouru par un courant constant et placé dans un champ magnétique est égal au produit de l'intensité par le flux coupé pendant le déplacement.

Considérons les surfaces ($S_1$) et ($S_2$) qui s'appuient sur les positions ($C_1$) et ($C_2$) de départ et d'arrivée du circuit.

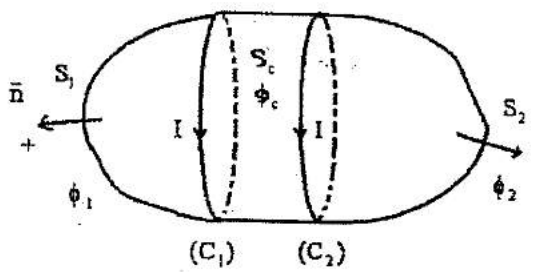



Fig. 1. 15



WWW.TALIB24.COM

Soit $\phi$ le flux total sortant de la surface fermée (S) :

$\phi=\phi_1+\phi_c-\phi_2=0$ flux conservatif $\phi_c = \phi_2 - \phi_1$

$\phi_c$ : orienté par continuité avec S1

ce résultat constitue le théorème de Maxwell.

Conséquence : Puisque $\tau$ ne dépend que des positions de départ et d'arrivée, on peut lui associer une énergie potentielle telle que :

$\tau = -\Delta W$. $W = -I.\phi$

Pour une position actuelle $\phi \rightarrow W$

nécessité du choix pour l'origine des énergies électromagnétiques.

[redacted] :

Considérons un déplacement spontané du circuit, le travail est nécessairement positif, donc $\phi_2 > \phi_1$. Le circuit se déplace de façon à ce que le flux de B le traversant soit maximum

8/ [redacted]

Définition :

- soit un circuit (C) parcouru par un courant I, le flux propre $\phi_p$ du champ $B_p$ créé par ce circuit à travers sa propre surface est indépendant de (S) (car $B_p$ est à flux conservatif ). On l'appelle flux d'auto-induction ou flux propre.
- En chaque point de (S) tous les $dB_p$ créés par les dl de (C) sont proportionnels à I :

~ : proportionnel

$B_p \sim I \rightarrow \phi_p = B_p\, dS \sim I$ d'où $\phi_p = L.I$

L : coefficient d'auto-induction ne dépend que des caractéristiques géométriques de (C).

Unité [L] = H : Henry.

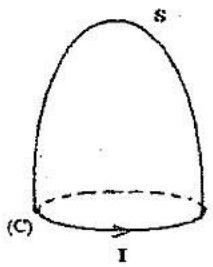
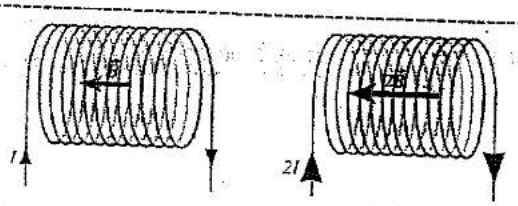



Fig. 1. 16

WWW.TALIB24.COM




***Si le courant double, le champ double.***

- Exemple : solénoïde indéfini de section S avec n spires par unité de longueur : n = N/l $B_p=\mu_o.n.I$ ;

$\phi_1$ : (flux coupé à travers une spire )

$$\phi_1 = B_p .S = \mu_o.n.I .S$$

$\phi_p$ : flux total = $n.l.\phi_1 = \mu_o.n^2.I.l. .S$

D'où $L = \phi_p / I = \mu_o.n^2.l. .S$

9/ Induction mutuelle de deux circuits :

- en l'absence de $I_2$, $I_1$ crée un champ $B_1 \sim I_1$ ;

  le flux à travers $(C_2)$ $\phi_{21} \sim I_1$ $\phi_{21} = M_{21} I_1$

- en l'absence de $I_1$, $I_2$ crée un champ $B_2 \sim I_2$

  le flux à travers $(C_1)$ $\phi_{12} \sim I_2$ $\phi_{12} = M_{12} I_2$

or les interactions entre $(C_1)$ et $(C_2)$ ne dépendent que de leurs positions respectives : $M_{12} = M_{21} = M$.

M : Coefficient d'induction mutuelle de deux circuits.

Si (C1) et (C2) sont parcourus simultanément par $I_1$ et $I_2$, on a :

à travers (C1) $\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = L_1 I_1 + M I_2$

à travers (C2) $\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22} = M I_1 + L_2 I_2$

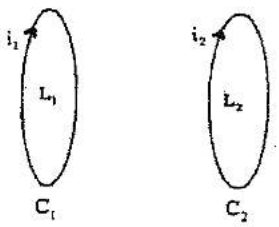



Fig. 1. 17

WWW.TALIB24.COM

Sous forme matricielle $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ . \\ . \\ . \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} & . & . & M_{1n} \\ M_{21} & L_2 & & & M_{2n} \\ . & . & . & & . \\ & & & . & . \\ M_{n1} & . & . & . & L_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ . \\ . \\ I_n \end{pmatrix}$

Pour n circuits $(C_1)$, $(C_2)$, ..$(C_n)$ parcourus par

des courants $I_1, I_2, \ldots, I_n$

on a :

$L_i$ : inductances propres $M_{ij}$ inductances mutuelles

$L_i > 0$ , $M_{ij} >$ ou $< 0$

$M_{ij} = M_{ji}$ sont négligeables si les circuits sont éloignés.

n=2 $M^2 \leq L_1.L_2$

Les inductances propres et mutuelles ne dépendent que de la géométrie des circuits.

WWW.TALIB24.COM

# Phénomènes magnétiques dépendant du temps

## I- Phénomène d'induction magnétique

- il faut définir un régime lentement variable ou quasi-permanant en fonction du temps
- lorsqu'on fait varier par un procédé quelconque le flux d'induction magnétique $\phi$ qui traverse un circuit fermé, celui-ci est le siège d'un courant induit dont l'apparition est expliquée par l'existence d'une force électromotrice (f.e.m.) d'induction.
- L'approximation des régimes lentement variables consiste à considérer le point d'observation assez proche des sources créant le champ pour que la durée de propagation soit négligeable.
- Si le circuit est interrompu par un condensateur, il faut que la distance séparant les armatures soit négligeable devant la longueur d'onde. Dans ces conditions, on peut négliger les phénomènes de propagation et considérer tout le circuit comme fermé, ce qui permet de continuer à appliquer le théorème d'Ampère.

### 1/ Etude expérimentale

1831 : Découverte du phénomène d'induction

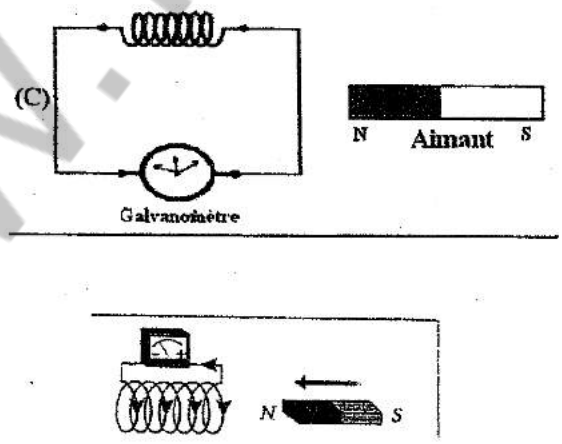



Fig. 2.1

WWW.TALIB24.COM

- Observations :

- le circuit (C) ne comprend aucun générateur.
- En approchant ou en éloignant l'aimant du circuit fermé (C) le galvanomètre dévie et aucune déviation si l'aimant est fixe.
- L'aimant peut être remplacé par un circuit inducteur.
- Toute opération consistant à faire varier le flux d'une induction à travers un circuit a pour effet de créer une f.e.m. d'induction.

## 2/ Mode de production du phénomène d'induction

[redacted] : conducteur dans lequel est créé la f.e.m. d'induction : se comporte comme un générateur en circuit fermé, il est parcouru par un courant induit.

[redacted] : dispositif générateur du champ $\vec{B}$ (circuit ou aimant)

- **Conclusions :**
  - Un courant induit, parcourt une bobine chaque fois que l'on fait varier le champ magnétique dans lequel elle est plongée. Il n'existe que pendant la variation de champ magnétique.
  - Une tension induite apparaît aux bornes de la bobine dans les mêmes conditions.
  - La bobine est l'induit, l'aimant est l'inducteur.
  - Ce phénomène est l'induction électromagnétique.

[redacted]

La bobine soumise à un champ magnétique variable se comporte comme un générateur (tension et intensité débitée), une force électromotrice induite est apparue à ses bornes.

WWW.TALIB24.COM

Le flux $\phi = \iint_S B.dS.\cos\alpha$ peut varier par une action :

Soit sur ■

Soit sur S

Soit sur α

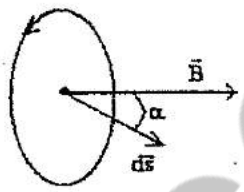



Fig. 2.2

a) Variation de B : variation relative à la position de l'induit par rapport à l'inducteur

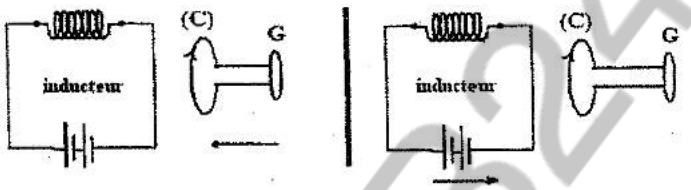



Fig. 2.3

b) Variation de S : le système est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan du barreau et des rails. :

lorsqu'on déplace la barre MN, le galvanomètre G est parcouru par un courant dont le sens change lorsqu'on change le déplacement de la barre MN.

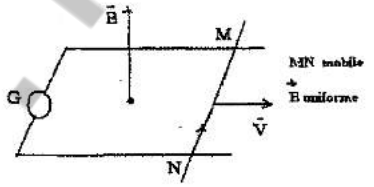
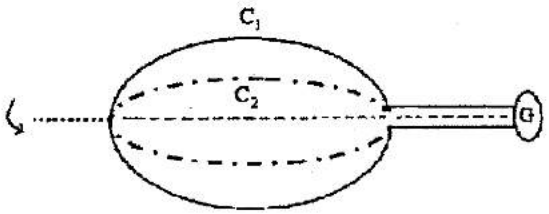



Fig. 2.4

c) **Variation de α** : par rotation du circuit (C).




WWW.TALIB24.COM

Fig. 2.5

d) Induit et inducteur fixes mais variation de B par variation du courant I dans l'inducteur.

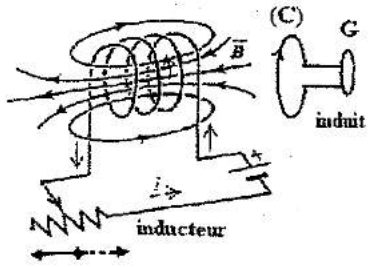



Fig. 2.6

e) Modification de la nature du milieu extérieur aux bobines par l'introduction d'un noyau de fer doux.

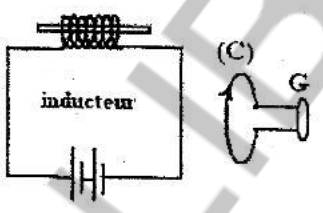



Fig. 2.7

**Conclusion** : Tout conducteur qui coupe un flux d'induction est le siège d'une f.e.m. d'induction.

## II- Interprétation théorique

Dans tous les cas, on définit un champ électromoteur d'induction ou champ électrique tel que : $e = \oint_{(C)} \vec{E}_m d\vec{l} = \iint_S r\vec{o}t\vec{E}_m . d\vec{S}$ $\forall$ S s'appuyant sur (C)

Th. de stokes

a) induit mobile par rapport à un observateur lié à l'induction fixe.

WWW.TALIB24.COM

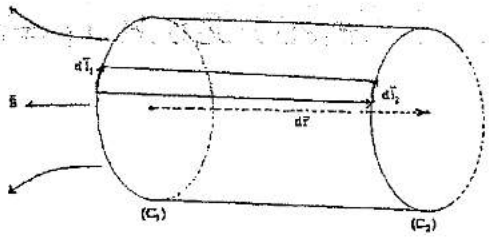


Fig. 2.8

Une charge q de $d\vec{l}$ est entraînée avec la vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ dans le champ variable B. elle est soumise à la force de Laplace : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \equiv q\vec{E}_m$

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$e = \oint_{(C)} \vec{E}_m d\vec{l} = \int_{(c)} (\vec{v} \wedge \vec{B}) d\vec{l} = -\oint_{(c)} \left( \frac{(d\vec{r} \wedge d\vec{l})\vec{B}}{dt} \right) = -\oint_{(c)} \vec{B} \frac{d^2\vec{S}}{dt}$$

où $d\vec{r} \wedge d\vec{l} = d^2\vec{S}$ : surface balayée par $d\vec{l}$ dans son déplacement $d\vec{r}$ .

$d^2\phi_c = \vec{B}.\, d^2\vec{S}$ : flux de $\vec{B}$ à travers la surface $d^2\vec{S}$

$d\phi_c = \oint d^2\phi_c$ : flux de $\vec{B}$ à travers l'ensemble du circuit (C).

or $d\phi_c = d\phi$ : variation du flux d'induction à travers le circuit

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

**III-**

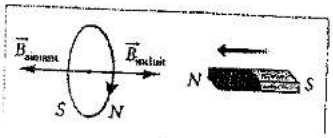
1/ **Loi de Faraday** : $e = -\frac{d\phi}{dt}$ valable dans les systèmes fixes ou mobiles appliquée lorsque le circuit (C) est traversé par un flux $\phi(t)$ qui varie en fonction du temps, $\forall$ la cause de cette variation.

2/ **Loi de Lenz** : le courant induit a un sens tel que par ses effets électromagnétiques il s'oppose au déplacement qui le produit, ou d'une façon plus générale, il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.



WWW.TALIB24.COM

i : courant induit



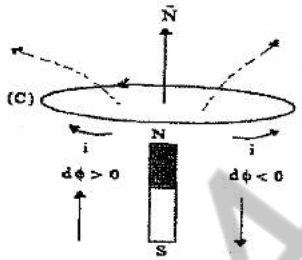




Fig. 2.9

- si $\vec{B}_{aimant}$ augmente, i crée un champ $\vec{B}_{induit}$ opposé à $\vec{B}_{aimant}$
- si $\vec{B}_{aimant}$ diminue, i crée un champ $\vec{B}_{induit}$ dans le même sens que $\vec{B}_{aimant}$

Exemple : la loi de Lenz n'ajoute rien sur le plan théorique par rapport à la loi de Faraday mais elle est très utile dans la pratique pour prévoir le sens du courant induit.

## [redacted]

La principale application est **l'alternateur.**

- Un alternateur permet de générer une tension alternative à partir d'une énergie mécanique.
- Le rotor est mis en mouvement par une source d'énergie mécanique extérieure, il tourne. Il peut être constitué d'aimants ou d'électroaimants. Comme il tourne il génère un Flux variable.
- Le stator ou induit correspond à un ensemble d'enroulements de fils conducteurs (bobines). Soumis au flux variable du rotor, il génère une force électromotrice induite.(généralement sinusoïdale)

WWW.TALIB24.COM

## IV- Champ électrique

En explicitant la f.e.m. e(t) et le flux $\phi$, on obtient : $e(t) = \oint_{(C)} \vec{E}_m d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$

Th de Stokes $\iint_S r\vec{o}t\vec{E}_m . d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.d\vec{S}$

a) Si le circuit induit est fixe et $\vec{B} = \vec{B}(t)$ dépend du temps

d'où

$r\vec{o}t\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ : Champ électromoteur à rotationnel non nul.

Comme $\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$ où $\vec{A}$ est le potentiel vecteur

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = r\vec{o}t\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + gr\vec{a}df$ car $r\vec{o}t(gr\vec{a}df) = \vec{0}$

b) si le circuit est mobile et $\vec{B}$ ne dépend pas du temps :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

c) si le circuit est mobile et $\vec{B} = \vec{B}(t)$ dépend du temps :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

le champ électrique total est $\vec{E} = \vec{E}_m + \vec{E}_s$ ;

$\vec{E}_s = -gr\vec{a}dV$ : Potentiel électrostatique

d'où $\vec{E} = \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - gr\vec{a}dV$

Enfin, trois possibilités pour créer un champ électrique :

- la source est des charges électriques $\vec{E}_s = -gr\vec{a}dV$



WWW.TALIB24.COM

- champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ : se déplacer dans un champ magnétique

- avoir un champ magnétique B qui dépend du temps $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

la charge q est soumise à la force : $\vec{F} = q(\vec{E}_m + \vec{E}_s) = q(\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - gr\vec{a}dV)$

Force de Lorentz $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$

On appelle champ électrique : $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - gr\vec{a}dV$

**Conséquences** : $r\vec{o}t\vec{E} = -\frac{\partial r\vec{o}t\vec{A}}{\partial t} - r\vec{o}t.gr\vec{a}dV$ d'où

$$r\vec{o}t\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ relation de Maxwell-Faraday

## V- inductance propre L et inductance mutuelle M

(voir chapitre : Eléments de la magnétostatique du vide)

l'inductance propre est définie par : $\phi_p = L\,I$

Lorsque I varie en fonction du temps : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$

$e = -L\frac{dI}{dt}$ $\quad U_{AB} = \frac{d\phi}{dt} = -e$

$U_{AB} = L\frac{dI}{dt}$

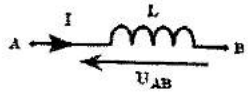



Fig. 2. 10

- Inductance mutuelle :

Signe de M : on a $\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = L_1 I_1 + MI_2$

$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22} = MI_1 + L_2 I_2$

On choisit arbitrairement le sens positif celui des courants dans les deux circuits $C_1$ et $C_2$.



WWW.TALIB24.COM

M positive ( M > 0) lorsqu'un courant >0 dans un circuit crée un flux de même sens qu'un courant >0 dans l'autre circuit.

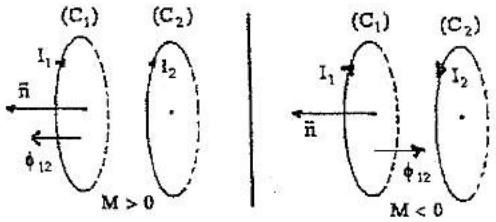



Fig. 2.11

Le signe du coefficient M dépend du choix du sens positif des courants sur les circuits (de leurs orientations).

Le couplage magnétique entre deux circuits joue un rôle capital dans les applications industrielles.

L'exemple des transformateurs est le plus significatif.

Le rapport des tensions aux bornes de deux circuits primaire et secondaire en fonction des nombres de spires : $\frac{u_2(t)}{u_1(t)} \cong \frac{N_2}{N_1}$

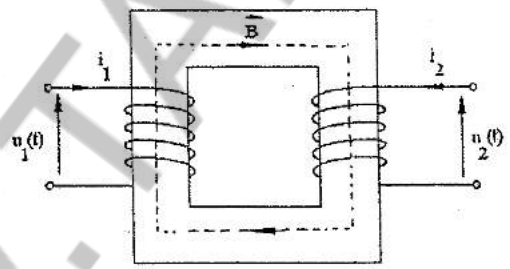



Fig. 2.12

WWW.TALIB24.COM

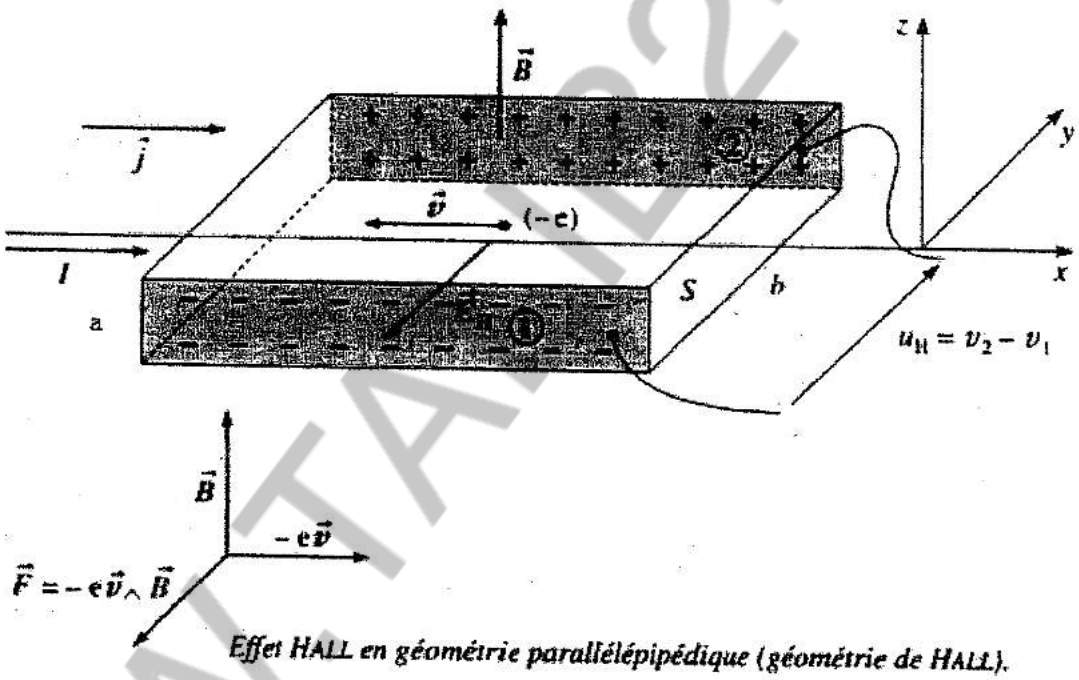
## VI- Effet Hall

Considérons un fil conducteur de section rectangulaire de cotés a et b , ce fil soumis à un champ électrique $\vec{E}_0$ est le siège d'un courant de conduction dirigé selon Ox.

Dans le fil contenant n porteurs de charges mobiles de vitesse $\vec{V}$ et de charge q ( on suppose que les charges mobiles sont des électrons q= - e ),la densité volumique de courant est $\vec{j} = nq\vec{V}$ .

L'effet d'un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ appliqué au conducteur se traduit par l'application d'une force de Lorentz supplémentaire

$$\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B} = -e\vec{V} \wedge \vec{B} = -e\,V\,B\ \vec{e}_y$$




*Effet HALL en géométrie parallélépipédique (géométrie de HALL).*

**Régime transitoire :**

Cette force tend à déplacer les charges ( $e^-$) vers la face 1 qui se charge négativement (-) , alors que la face 2 devient chargée positivement (+) .

Les charges surfaciques créent à leurs tour un champ électrique $\vec{E}_H$ appelé champ de Hall , qui agit à son tour sur les électrons ($e^-$) de conduction .

WWW.TAHIR24.COM

**Régime permanent :**

Ce champ de Hall $\vec{E}_H$ s'oppose à la force de déviation, le système doit tendre vers un nouveau régime permanent où la force de déviation et la force créée par le champ de Hall se compensent .

le mouvement des charges de conduction étant le même qu'en l'absence de champ magnétique $\vec{B}$ :

$$q\vec{E}_H + q\vec{V} \wedge \vec{B} = \vec{0} \qquad \vec{E}_H = -\vec{V} \wedge \vec{B} = R_H \, \vec{B} \wedge \vec{j}$$

où $\vec{R}_H = \frac{1}{nq} = -\frac{1}{ne}$ est la constant de Hall du milieu .

Ordre de grandeur : $R_H = -5.3 \ 10^{-11}$ $m^3/c$ pour le cuivre .

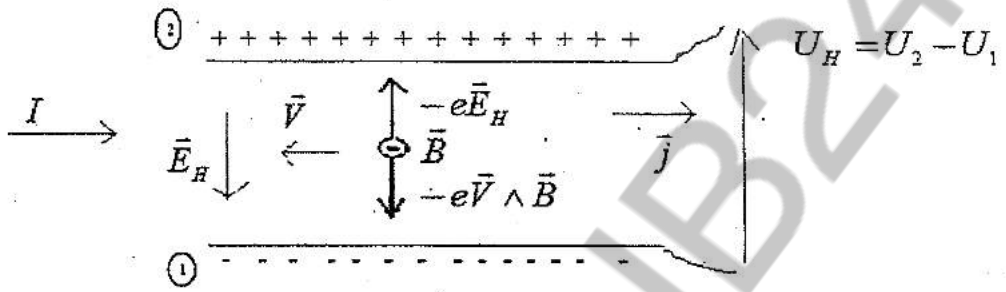



Figure Porteur de charge négative ( q = -e )

**Tension de Hall**

$U_H$ tension entre les faces chargées appelée tension de Hall :

$$U_H = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l} = -R_H \, B \, j \, b = -\frac{1}{nq} B \, j \, b = -\frac{BI}{nq \, a}$$

Puisque $I = jab$

$$U_H = U_2 - U_1 = \frac{BI}{nea}$$

Remarque

Le signe de la tension de Hall est lié au signe des porteurs de charges mobiles.

WWW.TALIB24.COM

## VII- Energie électromagnétique

### a) Circuit unique filiforme :

$$E = R.I + L\frac{dI}{dt}$$

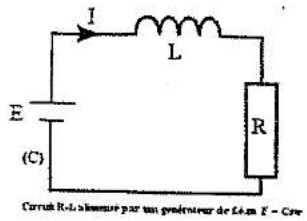



Fig. 2.13

Energie : $$\int_0^t E.Idt = \int_0^t RI^2dt + \int_0^I LIdI$$

énergie fournie par le générateur

= énergie dissipée par effet joule + $W_{em}$

$$W_{em} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\phi$$

Energie électromagnétique emmagasinée par le circuit.

La self est un réservoir d'énergie, elle absorbe une partie de l'énergie du générateur s'il y'a baisse de tension, la self restitue une partie de l'énergie pour lutter contre la baisse d'intensité.

### b) Deux circuits filiformes

Envisageons deux circuits ($C_1$) et ($C_2$) de résistance $R_1$ et $R_2$

d'inductances$L_1$et

$L_2$ de f.e.m. $E_1$ et $E_2$

à t=0 $I_1$=$I_2$=0

$$E_1 = R_1I_1 + L_1\frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt}$$

$$E_2 = R_2I_2 + L_2\frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt}$$

WWW.TALIB24.COM

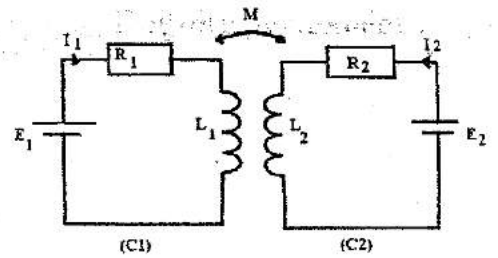



Fig. 2.14

Energie fournie par $E_1$ pendant dt :

$dW_1=E_1I_1dt = R_1 I_1^2 dt + L_1 I_1 dI_1 + M I_1 dI_2$

Energie fournie par $E_2$ pendant dt :

$dW_2=E_2I_2dt = R_2 I_2^2 dt + L_2 I_2 dI_2 + M I_2 dI_1$

$dWm= L_1 I_1 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 + M I_1 dI_2 + M I_2 dI_1$

$$=\frac{1}{2}d\left[L_1I_1^2 + L_2I_2^2 + 2MI_1I_2\right]$$

D'où $W_m = \frac{1}{2}\left[L_1I_1^2 + L_2I_2^2 + 2MI_1I_2\right]$

En fonction des flux $\phi_1=\phi_{11}+\phi_{12}=L_1I_1+MI_2$

$\phi_2=\phi_{21}+\phi_{22}=MI_1+L_2I_2$

$W_m = \frac{1}{2}\left[\phi_1I_1 + \phi_2I_2\right]$ pour deux circuits

$W_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\phi_jI_j$ pour n circuits

Energie dans le cas de circuit non filiforme

$W_m = \frac{1}{2}\iiint_{\tau}\vec{A}.\vec{j}\,d\tau$ ; intégrale étendue au volume total parcouru par les courants.

$\vec{j}$ densité de courant volumique et $\vec{A}$ potentiel vecteur.

WWW.TALIB24.COM

# Circuits en courants alternatifs

Ce chapitre est constitué de deux parties :

La première est constituée de rappels.

La deuxième constitue le programme d'électricité 2

## Première partie

### I- Généralités

### I-1 Approximation des régimes quasi-stationnaires (A.R.Q.S)

Si l'évolution dans le temps des sources ($\rho$,j) est suffisamment lente (régimes lentement variables), c'est-à-dire la durée de propagation $\tau_p$ est très faible devant une durée T caractéristique de cette évolution, on peut admettre que le potentiel et donc le champ suivent instantanément l'évolution des sources. Cette approximation $\tau_p << T$ est appelée l'approximation des régimes quasi-stationnaires : A.R.Q.S.

On peut alors calculer les potentiels à l'aide des mêmes formules qu'en régime stationnaire, valable à chaque instant

$$V(M,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iiint_v \frac{\rho(P,t)}{PM}dv \quad \text{et} \quad \vec{A}(M,t)=\frac{\mu_o}{4\pi}\iiint_v \frac{\vec{J}(P,t)}{PM}dv$$

PM = r

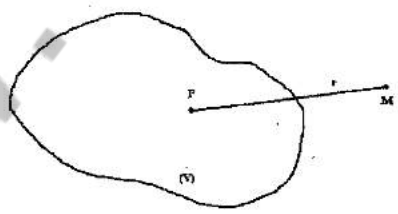



Fig. 3. 1

Explicitons la condition de L'A.R.Q.S. en terme de distance.

$\lambda_o$ étant la longueur d'onde dans le vide, l'ARQS est donc valable pour un tel signal si les distances sont faibles devant la longueur d'onde $\lambda_o$



WWW.TALIB24.COM

**Exemples :**

1) un circuit électrique de dimensions inférieures à 1m ( r < 1m), ce qui est le cas de la plupart des circuits électroniques usuels, et alimenté par un générateur délivrant un signal de fréquence ν , pourra être étudié dans l'A.R.Q.S. si : $r < \frac{c}{\nu} = \frac{3.10^8}{50} = 6.10^6 m = 6000 Km$.

R = 1 m , c= $3.10^8$ $m.s^{-1}$

Cette condition est réalisée dans la grande majorité des applications électroniques usuelles, même de haute fréquence.

2) Dans le cas d'un circuit industriel de fréquence ν=50Hz, l'A.R.Q.S est valable pour des circuits de dimensions importantes.

$$r < \frac{c}{\nu} = \frac{3.10^8}{50} = 6.10^6 m = 6000 Km$$

Cette distance est bien supérieure à la plupart des longueurs des circuits de distribution.

* Si les dimensions du circuit sont petites et les variations sont lentes, les lois d'électrocinétique sont encore applicables.

**I-2 : Dipôles électrocinétiques**

On appelle dipôle électrocinétique, tout système électrique relié à l'extérieur par deux bornes.

Dans le cadre de l'A.R.Q.S. le courant qui entre en A est égal à celui qui sort en B.

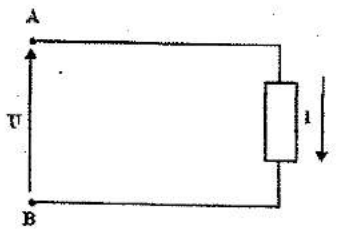



Fig. 3. 2

WWW.TALIB24.COM

Nous compterons positivement l'intensité $i = i_{AB}$ si le courant va de A vers B. ce choix est précisé sur la figure par une flèche dirigée comme $\vec{AB}$ .

Nous appellerons tension du dipôle (ou différence de potentiel aux bornes du circuit) $U= U_{AB}=V_A-V_B$ (potentiel de l'extrémité moins le potentiel de l'origine). Le choix sera précisé par une flèche dirigée comme $\vec{BA}$ . Compte tenu de cette convention, la loi d'Ohm s'écrit :

$U = R.i$ (convention récepteur).

**I-3 : Circuits en régime transitoire :**

Nous nous plaçons dans ce paragraphe dans le cadre de l'A.R.Q.S.

**1) les composants R, L et C**

- résistance morte R:

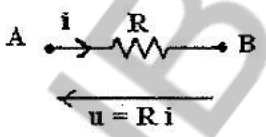



Fig. 3. 3

$U= U_{AB}=V_A-V_B$ $U= Ri$ $U(t) = R\,i(t)$

- inductance L :

c'est une source de tension de f.e.m. [redacted]

(car [redacted]).

Un dipole dont la tension est donnée par : [redacted]

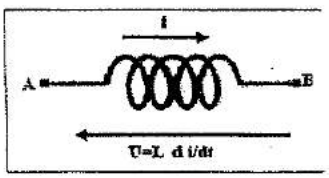



Fig. 3. 4

Rq. : l'intensité dans une inductance est nécessairement une fonction continue de t (une discontinuité de i(t) engendrerait une tension infinie).

- condensateur C :



WWW.TALIB24.COM

C'est un dipôle dont la tension est donnée par : $u(t) = \frac{q(t)}{C}$ avec $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

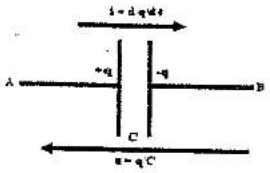


Fig. 3. 5

Dans ces relations q(t) est la charge de l'armature reliée à **A**, borne d'entrée du sens positif. (si l'on choisissait la charge de l'armature B, il faudrait changer +q en –q dans ces relations).

Rq. :

la charge d'un condensateur est une fonction continue de t.

(Une discontinuité de q(t) correspondrait à une intensité infinie)

Une bobine réelle possède toujours une résistance en série

Fig. 3.6

- De même un condensateur réel possède toujours du fait de la conductivité non nulle de son diélectrique, une certaine résistance de fuite.

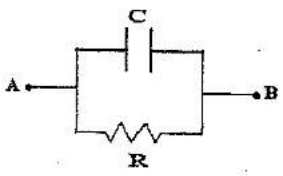



Fig. 3. 7

### 2) Etude générale d'un circuit R.L.C. série

Soit un dipôle assimilé à une résistance R, une inductance L et une capacité C montées en série, ce dipôle est soumis à une tension u(t) :



WWW.TALIB24.COM

$$u(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{c} \qquad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

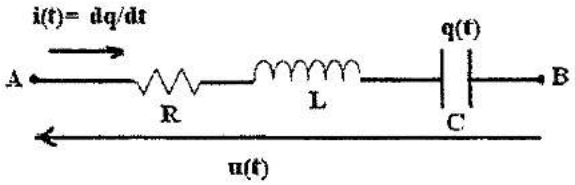



Fig. 3. 8

La charge q vérifie donc : $\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}u(t)$

Toute solution de cette équation différentielle est de la forme : $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$

$q_1(t)$ étant la solution générale de l'équation homogène (sans second membre S.S.M) .

Et $q_2(t)$ étant une solution particulière de l'équation complète.

D'un point de vue physique, $q_1(t)$ correspond à l'évolution du circuit en l'absence de source c.à.d. à son régime libre. $q_1(t)$ tend toujours vers zéro, le régime transitoire $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ tend donc au bout d'un certain temps suffisant vers le régime forcé $q_2(t)$ imposé par la tension u(t).

**I-4 : Point de vue énergétique**

On multiplie par i = dq/dt on obtient $Li\frac{di}{dt} + Ri^2 + \frac{1}{C}q.\frac{dq}{dt} = ui$

où $ui - Ri^2 = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}\right]$.

Le premier terme représente la somme des puissances électrocinétique et Joule reçue par le circuit, Le second la variation de son énergie électromagnétique.

**I-5 : Analogies électromécaniques**

Le système étudié est formellement identique à un oscillateur linéaire soumis à une force f(t) dont l'évolution est caractérisée par l'équation différentielle :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = f(t)$$

Le passage d'un problème à l'autre s'effectue par les substitutions



WWW.TALIB24.COM

m→L, α→R, k→1/C, x→q, v→i

On a également les correspondances :

- énergie cinétique ½ mv² → énergie magnétique ½Li²
- énergie potentielle ½ kx² → énergie électrique q²/2C
- Puissance fournie par la force f.v → puissance électrocinétique ui
- Puissance dissipée par frottement – αv² --- puissance Joule Ri²

## II- Charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance

### 1- Charge :

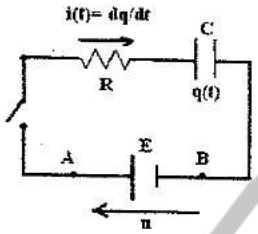



Fig. 3. 9

On place entre A et B une tension continue de f.e.m. e = E.

[redacted]

On ferme K, on a : $R\dot{q} + \frac{1}{C}q = u(t) = V_A - V_B = E$ $\qquad i = \dot{q} = \frac{dq}{dt}$

La solution générale de l'équation homogène (régime libre) est de la forme $q_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ avec [redacted] du circuit RC.

Le régime forcé correspond à la solution particulière

$q_2 = C.E = q_\infty$.

En exprimant la continuité de $q = q_1 + q_2$ à t = 0 , on détermine $A = -q_\infty$ :

$q(t) = q_\infty\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = C.E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ D'où $\qquad i(t) = i_0\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{E}{R}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

WWW.TALIB24.COM

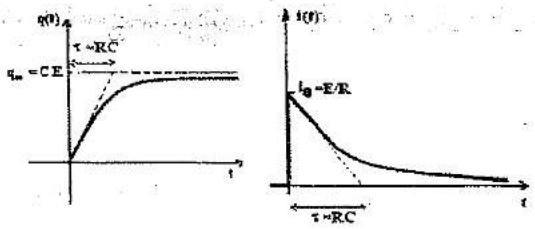


Fig. 3. 10

Remarque : la source de tension a été traversée au total par la charge $q_\infty = C.E$ et a donc fourni une énergie $q_\infty E = C.E^2$.

En fin de charge, l'énergie du condensateur est $\frac{1}{2}.\frac{q_\infty^2}{c} = \frac{1}{2}C.E_s^2$ . L'énergie manquante a été dissipée sous forme de chaleur dans la résistance E ; en effet

$$\int_0^\infty R.i^2.dt = -\frac{\tau.E^2}{2R}\left[e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}.C.E^2$$

Le rendement énergétique de l'opération est toujours [redacted] ,

**2- Décharge :**

Le condensateur portant à la date t = 0 la charge $q_o$.

On ferme K , $R\dot{q} + \frac{q}{c} = U(t) = V_A - V_B = 0$ U(t) = 0.

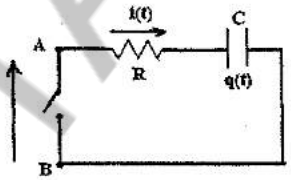



Fig. 3. 11

En tenant compte de la continuité de q(t) pour t = 0. la solution de cette équation différentielle est : [redacted] ; [redacted] $\tau = R.C$



WWW.TALIB24.COM

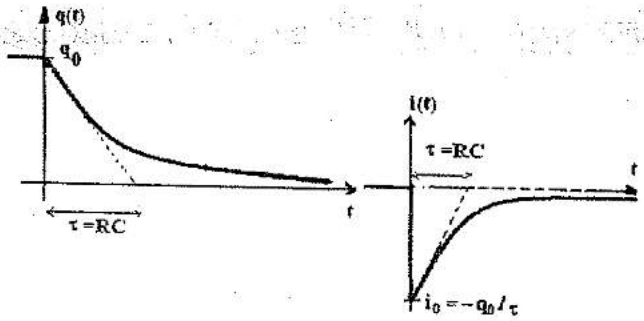



Fig. 3. 12

q(t) et i(t) deviennent complètement [redacted] au bout d'un [redacted]

[redacted]

les tangentes à l'origine coupent l'axe des temps au point d'abscisse [redacted]

Remarque : q(t) est continue mais i(t) présente une discontinuité pour t=0.

Seule l'intensité qui traverse une inductance est nécessairement continue.

## III- Définitions

### 1- régime continu

Le régime continu est celui où toutes les tensions dans un circuit et toutes les intensités qui le parcourent sont indépendantes du temps : I = cste

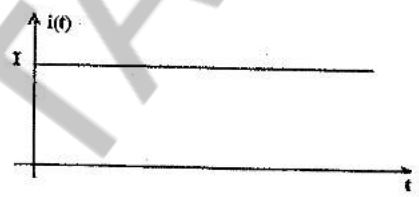



Fig. 3. 13

( I peut être positif ou négatif )

### 2- Courant alternatif

D'une façon générale, une grandeur périodique est une grandeur vérifiant $g(t+T) = g(t)$ où T est la période. Pour une grandeur périodique on définit :

- sa valeur instantanée g(t)
- sa valeur maximale $G_m$ (ou valeur de crête)

WWW.TALIB24.COM

- sa valeur moyenne $G_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt$

- sa valeur efficace $G_{eff} = \frac{G_m}{\sqrt{2}}$ (que l'on justifiera au paragraphe suivant)

i(t) est un courant alternatif si :

- i(t) est périodique de période T  i(t+T) = i(t)
- sa valeur moyenne est nulle (i(t) change de signe à chaque demi période i(t+T/2)= -i(t)).

On définit la fréquence $f = 1/T$ en Hz et la pulsation $\omega = 2\pi f$

- si i(t) est un courant alternatif $i_p(t)$=i(t)+cste est un courant périodique.

**3- Exemples de courants alternatifs**

a) courant sinusoïdal $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$, $I_{moy} = 0$, $I_{eff} = I_m/\sqrt{2}$,

$\phi$ : phase à l'instant $t_o$

b) courant carré

c) courant triangulaire

**4- Décomposition en série de Fourier d'une grandeur périodique**

Toute fonction périodique f(t) de période T peut s'écrire sous la forme suivante, appelée série de Fourier : $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$  avec $\omega_n = n\,\omega = n.2\pi/T$

le terme correspondant à n=1 est appelé terme fondamental.

Les autres ( n > 1) sont les termes harmoniques.

**5- Puissance en courant alternatif**

Un conducteur de résistance R parcouru par un courant alternatif dégagerait de l'énergie par effet Joule de la même manière qu'un courant continu.

L'intensité efficace d'un courant alternatif est égale à l'intensité de courant continu qui produirait dans le même conducteur la même quantité d'énergie par effet Joule pendant le même intervalle de temps.

WWW.TALIB24.COM

Si $i(t) = I_m \cos(\omega.t + \varphi)$, la puissance instantanée est alors :

$P = R.i^2(t) = R.I^2_m \cos^2(\omega t+\varphi)$.

La puissance moyenne de P est :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{R I_m^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{R I_m^2}{2}.$$

Pour faire disparaître dans l'expression de $P_m$ le facteur 1/2 et obtenir une expression semblable à celle obtenue en courant continu ; on définit des grandeurs efficaces intensité $I_{eff}$ et tension $U_{eff}$ par $I_{eff}=I_m/\sqrt{2}$ $V_{eff}=V_m/\sqrt{2}$.

## IV- Loi d'Ohm en courant alternatif

Toutes les lois d'Ohm sont valables aux variables instantanées.

Soit Z l'impédance d'une portion de circuit est $Z=U_m/I_m = U_{eff}/I_{eff}$ qui est une généralisation de la notion de résistance.

Si $i(t) = I_m \cos \omega t$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t+\varphi)$ où $\omega$ est la pulsation, $\varphi$ est le déphasage entre la tension et le courant.

- si $\varphi = 0$ u est en phase avec i.
- si $\varphi > 0$ u est en avance de phase sur i.
- si $\varphi < 0$ u est en retard de phase sur i.
- si $\varphi = +-\pi/2$ i et u sont en quadrature de phase
- si $\varphi = \pi$ i et u sont en opposition de phase

* [redacted] .

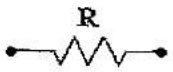



Fig. 3. 14 a

$u(t) = R.i(t)$, $Z = R$ $\varphi = 0$

si $i(t) = I_m \cos \omega t$ alors $u(t)=R.i(t) = U_m \cos \omega t$ ; $Z = U_m/I_m = U_{eff}/I_{eff} = R$

* [redacted]

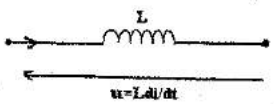



Fig. 3. 14 b



WWW.TALIB24.COM

Si $i(t) = I_m \cos \omega t \rightarrow u(t)=L.\omega.I_m \cos(\omega t + \pi/2)$

$Z_L = U_m/I_m = U_{eff}/I_{eff} = L\,\omega$ et $\varphi = \pi/2$

[redacted]

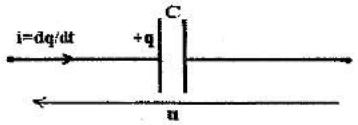



Fig. 3. 14 c

$U=q/C=\int i dt/C$ si $i(t)=I_m \cos \omega t \rightarrow u(t)=(I_m/C\omega) \cos(\omega t-\pi/2)$

$Z_C = U_m/I_m = U_{eff}/I_{eff} = 1/C\omega$ $\varphi = -\pi/2$

[redacted]

En valeurs efficaces, la tension totale [redacted] à la somme des tensions partielles, mais en valeurs instantanées elle lui est toujours égale.

Soient $u_1(t) = U_{m1} \cos(\omega t+\varphi_1)$ et $u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t+\varphi_2)$ deux tensions partielles, on peut calculer la tension totale instantanée $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$.

[redacted] :

- méthode trigonométrique,
- méthode de Fresnel
- ou la méthode des nombres complexes.

[redacted]

$u= u_1+u_2= U_{m1} \cos(\omega t+\varphi_1) + U_{m2} \cos(\omega t+\varphi_2)$

$=(U_{m1} \cos \varphi_1 + U_{m2} \cos \varphi_2) \cos\omega t - (U_{m1} \sin \varphi_1 + U_{m2} \sin \varphi_2) \sin \omega t$

$= U_m \cos(\omega t+\varphi) = U_m \cos \omega t \cos\varphi - U_m \sin \omega t \sin\varphi$ .

$$Um = \sqrt{U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2U_{m1}U_{m2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$tg\varphi = \frac{U_{m1}\sin\varphi_1 + U_{m2}\sin\varphi_2}{U_{m1}\cos\varphi_1 + U_{m2}\cos\varphi_2}$$



WWW.TALIB24.COM

une grandeur scalaire, fonction sinusoïdale x = X cos(ωt+φ) peut toujours être considérée comme la projection, sur un axe fixe dans le plan, d'un vecteur $\overline{OC}$, tournant à la vitesse angulaire ω .

module de $//\overline{OC}// = X$ angle $(\vec{x}, \overrightarrow{OC}) = \omega t + \varphi$

Plusieurs grandeurs évoluant sinusoïdalement à la même fréquence sont alors représentées par un ensemble de vecteurs tournants, les angles qu'ils forment entre eux sont égaux aux différences des phases de grandeurs sinusoïdales et sont donc constants. Ces vecteurs sont représentés géométriquement à l'instant

t=0 d'où angle $(\vec{x}, \overrightarrow{OC}) = \varphi$

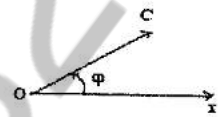



Fig. 3. 15

$$Um = \sqrt{U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2U_{m1}U_{m2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

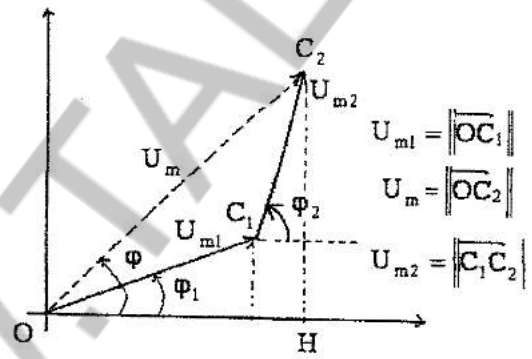



Fig. 3. 16

$$tg\varphi = \frac{HC_2}{OH} \qquad U_m = \left\|\overrightarrow{OC_2}\right\| \qquad U_{m1} = \left\|\overrightarrow{OC_1}\right\| \qquad U_{m2} = \left\|\overrightarrow{C_1C_2}\right\|$$

WWW.TALIB24.COM

# Deuxième Partie :

## Notation complexe

### 1 Introduction

A chaque grandeur physique évoluant sinusoïdalement x , on associe une grandeur complexe $\overline{x}$, dont la partie réelle sera identifiée avec la grandeur physique à décrire et dont l'amplitude complexe $\overline{X}$ , qui en regroupe l'amplitude X et la phase φ, sera la grandeur intéressante.

A x = X cos (ωt + φ) on lui associe $\overline{x} = Xe^{j(\omega t+\varphi)} = \overline{X}e^{j\omega t}$

$= X\left(\cos(\omega t+\varphi)+ j\left(\sin(\omega t+\varphi)\right)\right)$ avec $\overline{X} = Xe^{j\varphi}$ et $j^2=-1$

- on note $x = \mathrm{Re}(\overline{x})$ Re : partie réelle
- calculons l'effet de la dérivation par rapport au temps

  $\frac{dx}{dt} = \frac{d\left(\mathrm{Re}\,\overline{x}\right)}{dt} = \mathrm{Re}\frac{d\overline{x}}{dt}$ les deux opérateurs Re et d/dt commutent.

  La dérivation d/dt est remplacée par la multiplication par jω.

  L'intégrale (par rapport au temps) par la division par jω.

- La linéarité des équations assure l'élimination du facteur $e^{j\omega t}$ des équations ; il suffit donc de travailler avec les amplitudes complexes.

### Impédance complexe

En utilisant la notation complexe ; à l'amplitude complexe $\overline{U}$ correspond l'intensité $\overline{I}$ et la relation linéaire entre ces deux grandeurs s'écrit $\overline{U} = \overline{Z}\overline{I}$ où $\overline{Z}$ : impédance complexe du dipôle entre A et B.

WWW.TALIB24.COM

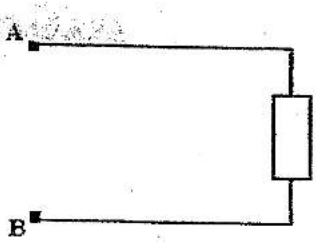



Fig. 3. 17

$i = I_m \cos \omega t$ et $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ $\overline{Z} = \dfrac{\overline{U}}{\overline{I}} = Ze^{j\varphi}$

- $\|\overline{Z}\| = Z$ impédance mesurée en Ohm
- Argument φ est égal au déphasage de l'intensité i par rapport à la d.d.p. u.

La connaissance de $\overline{Z}$ suffit donc à déterminer complètement i pour u donné.

On décompose parfois $\overline{Z}$ en ses parties réelle et imaginaire

$\overline{Z} = R + jS = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi$

R : résistance du dipôle (positive pour un dipôle passif c.à.d. ne comporte pas de générateur)

S : réactance du dipôle

On définit l'admittance complexe $\overline{G}$ par : $\overline{G} = \dfrac{1}{\overline{Z}}$

$\overline{Z} = Ze^{j\varphi} = \|Z\|e^{j\varphi}$

Z impédance réelle $\varphi = \arg \overline{Z}$

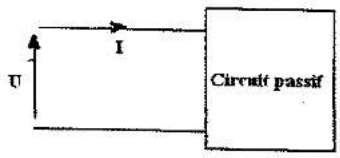



Fig. 3. 18



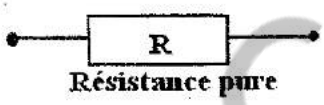
WWW.TALIB24.COM

**Exemples d'impédances**

$I = I_m \cos \omega t \quad u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

- Résistance pure
- $\overline{Z} = R \quad Z = R \qquad \varphi = 0$

aucun déphasage entre ddp et courant



Résistance pure

Fig. 3. 19

- Inductance pure

$$u = L\frac{di}{dt} \qquad \overline{U} = j\omega L\overline{I} \qquad \overline{Z} = jL\omega \qquad Z = L\omega \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

l'impédance est imaginaire pur $\varphi = +\pi/2$, on dit que la tension est en quadrature avance sur l'intensité.

On observe qu'une self limite l'intensité, d'autant plus fortement que la fréquence est élevée, elle s'oppose aux variations d'intensité.

- Capacité

Fig. 3. 21

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$i = C\frac{du}{dt} \quad \overline{U} = \frac{1}{jC\omega}\overline{I} \quad \overline{Z} = 1/jC\omega \quad Z = 1/C\omega \quad \varphi = -\pi/2$$

la tension est en quadrature retard sur l'intensité.

On constate que, contrairement au courant continu, un courant sinusoïdal « traverse » le condensateur. Cela tient au fait que la coupure du circuit due au condensateur n'empêche pas un mouvement va et vient des charges, chargeant et déchargeant périodiquement les armatures. L'effet de coupure apparaît de plus en plus si on diminue la fréquence.

WWW.TALIB24.COM

**b- Associations d'impédances complexes**

les impédances complexes obéissent aux mêmes lois d'associations que celles des résistances en courant continu.

En série les impédances complexes s'ajoutent $\overline{Z} = \sum_i \overline{Z}_i$

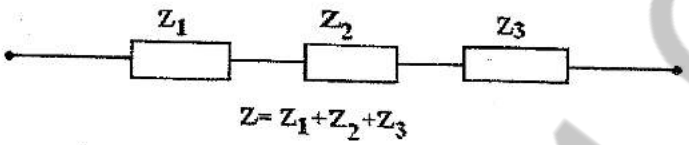



Fig. 3. 22

En parallèle les admittances complexes s'ajoutent $\frac{1}{\overline{Z}} = \sum_i \frac{1}{\overline{Z}_i}$

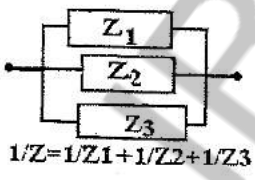



Fig. 3. 23

2) **lois de Kirchhoff** ( Nous supposons A.R.Q.S. )

a- **loi des mailles** : la loi de maille s'exprime à tout instant par la relation $\sum_k u_k = 0$ .

La somme porte sur les ddp instantanées aux bornes des branches successives formant la maille considérée (parcourue dans le sens déterminé). Dans le cas d'un régime harmonique forcé de pulsation ω : $u_k = U_{mk} \cos(\omega t + \varphi k)$

Posons $\overline{u}_k = \overline{U}_{mk} e^{j(\omega t + \varphi_k)}$ s'écrit à tout instant $\sum_k \mathrm{Re}(\overline{u}_k) = 0$

$\mathrm{Re}(\sum_k \overline{u}_k) = 0 \quad \forall t$ d'où $(\sum_k \overline{u}_k) = 0$

cette relation exprime la loi des mailles en notation complexe.

WWW.TALEB24.COM

**b- loi des nœuds**

En un nœud N, la loi des nœuds s'exprime à tout instant par la relation $\sum \varepsilon_k i_k = 0$ ; $\varepsilon_k = +1$ le sens + arrive au nœud N

$\varepsilon_k = -1$ le sens + part du nœud N

en posant $\bar{i}_k = I_{mk} e^{j(\omega t + \varphi'_k)}$, on établit comme, pour la loi des mailles que : $\sum_k \varepsilon_k \bar{i}_k = 0$ qui exprime la loi des nœuds en notation complexe.

Les lois de Kirchhoff sont donc satisfaites en notation complexe.

**3) Etude de l'intensité**

**Résonance pour l'intensité**

Soit un circuit RLC aux bornes de A et B, duquel on impose la ddp sinusoïdale de pulsation ω

$U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

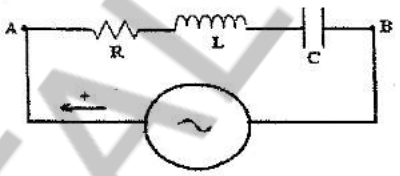



Fig. 3. 24

L'impédance complexe $\bar{Z}_{AB}$

$$\bar{Z}_{AB} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j(L\omega + \frac{1}{C\omega})$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{u}}{\bar{i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi}$$

- module de $\bar{Z}_{AB}$

$Z_{AB} = \|\bar{Z}_{AB}\| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ impédance réelle du circuit

- $\varphi = arctg\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right) = \arg \bar{Z}$ φ : déphasage entre u et i



WWW.TALIB24.COM

• $\varphi(\omega)$ : $\varphi$ dépend de $\omega$ , donc $\varphi$ dépend de la fréquence

$\varphi = 0$ pour $\omega = \omega_r$ $L\omega_r = 1/C\,\omega_r$ $\omega_r = \sqrt{1/LC}$

Étudions les fonctions $I(\omega)$ et $\varphi(\omega)$

* Fonction $I_m(\omega)$

$$I_m(\omega) = \frac{U_m}{Z_{AB}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

est maximale pour $\omega = \omega_r$ telle que $LC\omega_r^2 = 1$ c'est la condition de résonance de l'intensité i

* Fonction $\varphi(\omega)$ $-\pi/2 < \varphi(\omega) < \pi/2$ et $\cos\varphi > 0$

- Si $L\omega > 1/C\omega$ , $0 < \varphi(\omega) < \pi/2$ , $\omega > \omega_r$, u en avance de phase sur i

le circuit est dit inductif.

L'effet de l'inductance l'emporte sur celui de la capacité.

- Si $L\omega < 1/C\omega$ $-\pi/2 < \varphi(\omega) < 0$ $\omega_r > \omega$ , u est en retard de phase sur i

le circuit est dit capacitif.

La capacité l'emporte sur celui de l'inductance.

- Si $L\omega = 1/C\omega$ $\varphi = 0$ $\omega = \omega_r$ : résonance, u et i sont en phase.

Le circuit est dit résistif (Z=R).

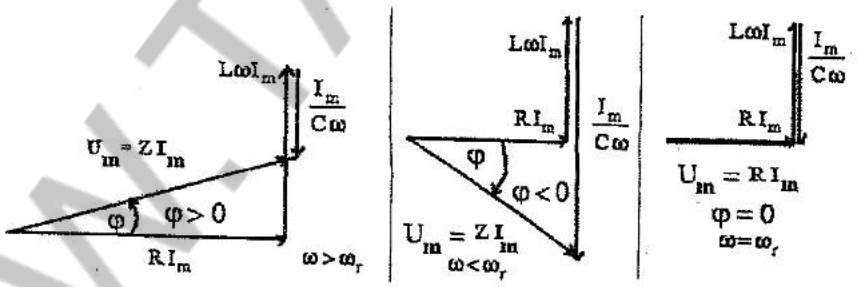
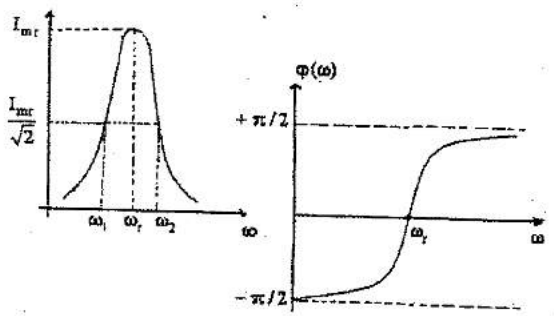



Fig. 3. 25




WWW.TALIB24.COM

Fig. 3. 26

- Acuité de la résonance

à la résonance $I_m = I_{mr} = U_m/R$

l'acuité de la résonance est définie conventionnellement par le rapport Q tel que $Q = \omega_r/(\omega_2-\omega_1)$ : facteur de qualité du circuit (Q>=100)

où $I_m(\omega_1)=I_m(\omega_2)=I_{mr}/\sqrt{2}$

calculons $\omega_1$ et $\omega_2$ :

$$(L\omega-1/C\omega)^2 = R^2 = 2R^2$$

$(L\omega-1/C\omega) = \pm R$ d'où

$$\omega_1 = \frac{-RC+\sqrt{R^2C^2+4LC}}{2LC} \qquad \omega_2 = \frac{+RC+\sqrt{R^2C^2+4LC}}{2LC}$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \qquad \text{d'où} \qquad Q = \frac{L\omega_r}{R} = \frac{1}{RC\omega_r}$$

la résonance est d'autant plus aigue que Q est plus grand.

**4) Puissance en courant alternatif sinusoïdal**

soient $u(t)=U_m \cos(\omega t+\varphi)$ la tension aux bornées du dipôle étudié et $i(t) = I_m \cos \omega t$ l'intensité qui le parcourt. Le dipôle reçoit la puissance électrocinétique instantanée.

(Convention « récepteur ») $i = i_{AB}$ $u = V_A-V_B$

$P = u.i = U_m.I_m\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)$

$= (U_m.I_m/2)(\cos\varphi + \cos(2\omega t+\varphi))$

Cette puissance varie au cours du temps de façon sinusoïdale à la fréquence $2\omega$, autour d'une valeur $P_m$ appelée puissance moyenne :

$$P_{moy} = \frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi$$

or on a déjà défini



WWW.TALIB24.COM

$$P_{moy} = \frac{1}{nT}\int_{t_o}^{t_o+nT} p\,dt$$

$$P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi$$ en watt

le facteur cosφ est appelé facteur de puissance.

φ étant le déphasage entre le courant et la tension.

Pour un circuit passif d'impédance complexe $\overline{Z} = R + jS$

$$P_{moy} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi \quad , \quad \cos\varphi = \frac{R}{Z} \quad , \quad U_m = Z.I_m$$

$$= \frac{1}{2}\frac{U_m}{Z} I_m \cos\varphi$$

$$= \frac{1}{2} R\, I_m{}^2 = R\, I_{eff}^2$$

$$P_{moy} = R\, I_{eff}^2$$

Seule la partie réelle de l'impédance intervient.

On définit une puissance complexe

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\overline{u.i}^*$$ ( * : complexe conjugué )

- La puissance active $P_a = \mathrm{Re}(\overline{P}) = U_{eff}.I_{eff}\cos\varphi$ c'est une puissance moyenne consommée par le circuit.
- La puissance réactive $P_r = \mathrm{Im}(\overline{P}) = U_{eff}.I_{eff}\sin\varphi$

( unité en vars )

WWW.TALIB24.COM

# Equations de Maxwell

## I. Introduction

En 1864, James Clerk Maxwell présenta la théorie de l'électromagnétisme classique, dont les équations lui permettent de décrire la propagation des ondes électromagnétiques.

Grâce à cette théorie, il expose la possibilité de transmettre des signaux par des ondes radio, prédiction confirmée par les expériences de Hertz en 1888.

Cette théorie permet également de prévoir la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide à la vitesse de la lumière c.

Les expériences de Michelson et Morley (1881-1887) confirmeront le caractère universel de cette vitesse.

## II. Les quatre équations de Maxwell dans le vide

- **Champ électromagnétique permanant**

En régime permanant, le champ électromagnétique est lié à ses sources par les lois locales :

$$div.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad div.\vec{B} = 0$$

$$r\vec{o}t.\vec{E} = \vec{0} \qquad r\vec{o}t.\vec{B} = \mu_0.\vec{j}$$

Nous avons étudié indépendamment :

le champ électrique permanant

et

le champ magnétique permanant.

Car ces «équations sont découplées.

## III. Equations de Maxwell



WWW.TALIB24.COM

a) Nous avons montré les insuffisances du système précédent en régime variable et introduit deux modifications de ces lois.

- introduction d'un premier couplage entre champ électrique et magnétique sous la forme de l'équation de Maxwell Faraday
- l'ajout d'un courant de déplacement à l'équation de Maxwell Ampère.

L'expérience montre que ces modifications sont suffisantes pour rendre compte du comportement du champ électromagnétique dans le cas général.

Les quatre équations de Maxwell, qui régissent l'évolution locale du champ électromagnétique dans tout référentiel Galiléen, sont :

$$div.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad \text{Eq. de Maxwell Gauss (M - G)}$$

$$r\vec{o}t.\vec{B} = \mu_o \vec{j} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{Eq. de Maxwell Ampère (M - A)}$$

$$div.\vec{B} = 0 \qquad \text{Eq. du flux magnétique (M - } \phi\text{)}$$

$$r\vec{o}t.\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{Eq. de Maxwell Faraday (M - F)}$$

Les constantes fondamentales $\mu o$ et $\varepsilon o$ vérifient la relation $\varepsilon_o \mu_o c^2 = 1$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

- les deux premières équations (M-G) et (M-A) lient le champ électromagnétique à ses sources $\rho$ et j ; leurs écritures sous formes intégrales sont le théorème de Gauss et le théorème d'Ampère généralisés.

- Les deux dernières équations (M-$\phi$) et (M-F), ne font pas intervenir les sources du champ. Elles traduisent des propriétés intrinsèques du champ électromagnétique.



WWW.TALIB24.COM

- L'équation de conservation de la charge est désormais une loi fondamentale contenue dans le groupe des équations de Maxwell : Nous pouvons la déduire des équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère.

b) Les équations (M-G), (M-$\phi$) et (M-F) ont été déjà montrées dans les chapitres précédents.

- **Equation de Maxwell Ampère**
  - **courant de déplacement de Maxwell**

la conservation de la charge électrique est un fait expérimental, admis comme principe de base de la physique.

Les équations de Maxwell qui décrivent l'évolution du champ électromagnétique doivent donc être compatibles avec l'équation de conservation de la charge électrique : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div.\vec{j} = 0$

à l'équation $r\vec{o}t.\vec{B} = \mu_0.\vec{j}$ on applique la divergence membre à membre $\Rightarrow$

$$div.r\vec{o}t.\vec{B} = \mu_0.div\vec{j} = 0 \qquad \rightarrow \; div\vec{j} = 0$$

Ce résultat [redacted] est incompatible avec la loi de conservation de la charge électrique dans le cas le plus général.

Pour remédier à ce défaut, l'idée de Maxwell est d'introduire un terme supplémentaire au second membre appelé courant de déplacement $\vec{j}_D$.



WWW.TALIB24.COM

L'équation de (M-A) doit donc s'écrire dans le cas le plus général $r\vec{o}t.\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)$ . Cette forme est compatible avec la conservation de la charge électrique si $div(\vec{j} + \vec{j}_D) = 0$ car $div.r\vec{o}t.\vec{B} = 0$

d'où $$div.\vec{j}_D = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

L'équation de (M-G) est inchangée en régime variable, nous indique une forme du courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Enfin cette solution, permet la compatibilité des équations de Maxwell avec le principe fondamental de conservation de la charge électrique.

$$r\vec{o}t.\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D) = \mu_o\vec{j} + \mu_o\varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

## IV. Equations de Maxwell dans la matière

Dans un milieu matériel, nous pouvons utiliser les équations de Maxwell « dans le vide » à condition de tenir compte des densités volumiques de charges de polarisation $\rho_P$ , et de courant de polarisation $\vec{j}_P$ et d'aimantation $\vec{j}_a$ .

L'introduction des vecteurs déplacement électrique



WWW.TALIB24.COM

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}$$

et excitation magnétique $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$,

permet d'écrire les équations de Maxwell, en ne faisant apparaître que les charges libres $\rho_l$ et les courants libres . $\vec{j}_l$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $div.\vec{D} = \rho_l$ | (M - G) | or ⋮ | $\rho_p = -\text{div}.\vec{P}$ |
| $r\vec{o}t.\vec{H} = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ | (M - A) | ⋮ | $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ |
| $div.\vec{B} = 0$ | (M - $\phi$) | ⋮ | |
| $r\vec{o}t.\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | (M - F) | ⋮ | $\vec{j}_a = r\vec{o}t.\vec{M}$ |

Dans un milieu matériel :

- le théorème de Gauss s'applique au vecteur déplacement électrique $\vec{D}$
- le théorème d'Ampère s'applique au vecteur excitation magnétique $\vec{H}$

Dans un milieu quelconque, on a quatre équations générales appelées équations de Maxwell, sur lesquelles repose toute l'électromagnétisme.

WWW.TALIB24.COM

## V. Propriétés des champs à la limite entre deux milieux.

Au passage entre deux milieux 1 et 2, les conditions de continuités à la surface sont les mêmes que le cas des phénomènes indépendants du temps.

(voir cours Electricté3 )

- $\vec{E}_{1T} - \vec{E}_{2T} = \vec{0}$ Continuité de lacomposante tangentielle de $\vec{E}$.

- $\vec{D}_{1N} - \vec{D}_{2N} = \sigma_l . \vec{n}$ Discontinuité de la composante normale de $\vec{D}$ à la surface portant une charge surfacique $\sigma_l$.

- $\vec{B}_{1N} - \vec{B}_{2N} = \vec{0}$ Continuité de la composante normale de $\vec{B}$

- $\vec{H}_{1T} - \vec{H}_{2T} = \vec{j}_{l,S} \wedge \vec{n}$ Discontinuité de la composante tangentielle de $\vec{H}$ , si à la surface existe un courant surfacique de charge libre $\vec{j}_{l,S}$

WWW.TALIB24.COM

# Ondes électromagnétiques dans le vide

## I. Introduction

L'électromagnétisme s'intéresse à l'étude des modifications des propriétés de l'espace, provoquées par des charges électriques en mouvement. Ces modifications sont traduites par un champ électromagnétique défini en tout point par deux vecteurs, un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$. Ces deux vecteurs sont déterminés par les équations de Maxwell, qui montrent que leur évolution spatio-temporelle est de caractère ondulatoire, d'où le nom « Ondes électromagnétiques » qui leur est associé.

La propagation des ondes électromagnétiques n'a été étudiée expérimentalement qu'en 1888 par Hertz. Peu avant, en 1887, Michelson avait mis en évidence l'aspect essentiel des ondes lumineuses qui ne sont qu'un cas particulier d'ondes électromagnétiques ; elles sont caractérisées par l'invariance de leur vitesse de propagation (célérité **c**) par un changement de référentiel Galiléen, et par l'absence de support matériel à cette propagation, ce qui les distingue fondamentalement des ondes mécaniques.

- Le domaine d'application des ondes électromagnétiques est très vaste : il s'étend dans l'échelle des longueurs d'ondes de $10^{-15}$m (ordre de grandeur de la dimension du noyau) à plusieurs Km (ondes radio). Dans cet éventail, les phénomènes lumineux ne concernent qu'un domaine restreint de longueur d'onde $400\text{nm}<\lambda<750\text{nm}$.
- En régime variable, il existe toujours deux champs associés $\vec{E}(M,t)$ : champ électrique et $\vec{B}(M,t)$ champ magnétique, ces deux grandeurs $(\vec{E},\vec{B})$ forment le champ électromagnétique.



WWW.TALB24.COM

## II. Propagation dans un milieu dépourvu de charges et de courants :

Dans un milieu Linéaire Homogène et Isotrope (L.H.I), on a :

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

Les quatre équations de Maxwell deviennent, avec $\rho_L = 0$ et $\vec{J}_L = \vec{0}$:

$$div\ \vec{E} = 0 \qquad div\ \vec{B} = 0$$

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad rot\ \vec{B} = \mu\ \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

## III. Equation de propagation

- **Pour le champ électrique** $\vec{E}$ :

A partir de la relation : $r\vec{o}t\, r\vec{o}t(.) = gr\vec{a}d\, div(.) - \vec{\Delta}(.)$

et des équations de Maxwell : $div\ \vec{E} = 0$ ; $rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

on obtient l'équation de propagation du champ électrique

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}. \qquad (*)$$

- **Pour le champ magnétique** $\vec{B}$ :

Le champ magnétique $\vec{B}$ vérifie également la même équation (*).

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Ces résultats sont généralisés à toute grandeur $\vec{X}(\vec{r},t)$ vérifiant l'équation de propagation, dite aussi équation d'onde :

$$\Delta\vec{X} - k^2 \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial^2 t} = \vec{0}$$

où l'onde $\vec{X}(\vec{r},t)$ se propage à la vitesse $v$ telle que $v^2 = 1/k^2$.

L'équation d'onde peut être condensée en introduisant l'opérateur d'Alembertien :

$$\Box(.) = \Delta(.) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(.)}{\partial^2 t}$$



WWW.TALIB24.COM

Le potentiel scalaire $V$ et le potentiel vecteur $\vec{A}$ obéissent également à la même équation de propagation que les champs : $\Box(\vec{E},\vec{B},\vec{A},ou\ V)=\vec{0}\ ou\ 0$

Dans le vide l'équation de propagation devient

$$\Box(.)=\Delta(.)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(.)}{\partial^2 t}$$

où $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}$ est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

## 1- L'Onde plane

L'OEM est plane si $\vec{E}$ (et donc $\vec{B}$) ne dépend que du temps t et d'une seule coordonnée d'espace, associée à la direction de propagation. Si par exemple, la propagation se fait dans la direction de Ox, à un instant t donné, le champ $\vec{E}(x,t)$ est le même pour tous les points d'un même plan perpendiculaire à Ox appelé plan d'onde.

$$\vec{E}(M,t)=\vec{E}(x,t)$$
$$\vec{B}(M,t)=\vec{B}(x,t)$$

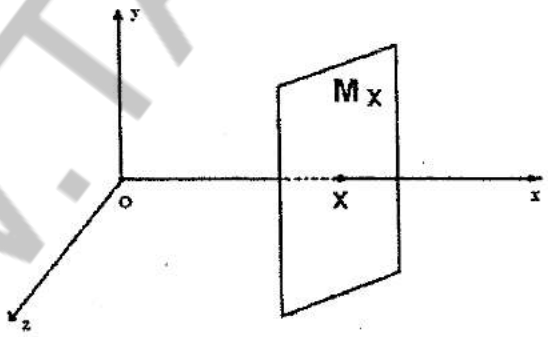



Fig. 5.1

La solution la plus générale pour $\Box(\vec{E},\vec{B})=\vec{0}$ est de la forme :

$$\vec{E}(x,t)=\vec{E}_1(t-\frac{x}{c})+\vec{E}_2(t+\frac{x}{c}) \qquad \vec{B}(x,t)=\vec{B}_1(t-\frac{x}{c})+\vec{B}_2(t+\frac{x}{c}),$$

WWW.TALIB24.COM

où nous excluons toute solution indépendante du temps. Un champ constant est toujours solution de l'équation d'onde (il est sans intérêt).

- le champ $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ correspond à une propagation dans le sens positif de Ox.
- le champ $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ correspond à une propagation dans le sens contraire.

**2- L'onde plane progressive (OPP)**

Chacun des couples $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$, $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ caractérise une onde électromagnétique du type onde plane progressive se propageant parallèlement à Ox, soit dans le sens positif (couple $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ ) soit dans le sens négatif (couple $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$).

Considérons par exemple le champ $\vec{E}_1(t - \frac{x}{c})$ , on note que

$$\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \qquad \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial y} = \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial z} = \vec{0}$$

Sous forme opérationnelle, ces relations peuvent être condensées.

$$\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla} = -\frac{1}{c}\vec{u}_x \frac{\partial}{\partial t}, \text{ où } \vec{u}_x \text{ est le vecteur unitaire de Ox.}$$

On peut généraliser ce résultat à toute onde plane progressive OPP se propageant dans le sens positif d'un axe quelconque défini par le vecteur unitaire $\vec{u}$,

$$\vec{\nabla} = -\frac{1}{c}\vec{u}\frac{\partial}{\partial t} \qquad (*)$$

Cette relation ne s'applique qu'à une onde plane progressive.

**3- Structure de l'O.P.P :**

Soit une O.P.P $(\vec{E}, \vec{B})$ se propageant dans la direction d'un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$. Compte tenu de (*), les équations de Maxwell en l'absence de source $(\rho_L = 0 \ , \vec{j}_L = \vec{0})$ s'écrivent :



WWW.TALIB24.COM

1- $div\vec{E}=0$ $\quad \vec{\nabla}.\vec{E}=0$ $\quad$ soit $-\frac{1}{c}\vec{u}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=0$

2- $div\vec{B}=0$ $\quad \vec{\nabla}.\vec{B}=0$ $\quad$ soit $-\frac{1}{c}\vec{u}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0$

3- $r\vec{o}t\vec{E}=\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad$ soit $-\frac{1}{c}\vec{u}\wedge\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

4- $r\vec{o}t\vec{B}=\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\quad$ soit $-\frac{1}{c}\vec{u}\wedge\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

On ne s'intéresse qu'aux champs variables. Tout champ $\vec{G}$ constant, est considéré nul $(\vec{G}=\vec{0})$, comme il est supposé être avant l'arrivée de l'onde, d'où :

$$\frac{\partial(\vec{u}.\vec{E})}{\partial t}=0 \qquad (1')$$

$$\frac{\partial(\vec{u}.\vec{B})}{\partial t}=0 \qquad (2')$$

$$\frac{\partial(\frac{\vec{u}}{c}\wedge\vec{E}-\vec{B})}{\partial t}=\vec{0} \qquad (3')$$

$$\frac{\partial(\vec{u}\wedge\vec{B}+\frac{\vec{E}}{c})}{\partial t}=\vec{0} \qquad (4')$$

(1') $\Rightarrow$ $\vec{u}.\vec{E}=0$ le champ $\vec{E}$ est transversal

(2') $\Rightarrow$ $\vec{u}.\vec{B}=0$ le champ $\vec{B}$ est transversal

Donc le champ électromagnétique est transversal.

(3') $\Rightarrow \vec{B}=\frac{\vec{u}}{c}\wedge\vec{E}$ donc $\vec{B}\perp\vec{E}$

(4') $\Rightarrow \vec{E}=c\,\vec{B}\wedge\vec{u}$

Ces deux relations montrent que $(\vec{E},\vec{B},\vec{u})$ est un trièdre direct et $\left\|\vec{E}\right\|=c\left\|\vec{B}\right\|$

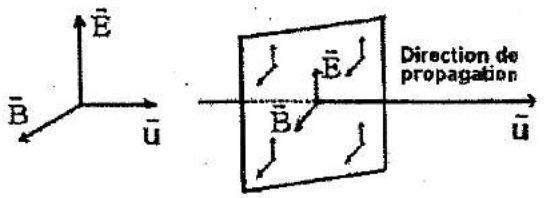



Fig. 5.2



WWW.TALIB24.COM

## IV. Ondes planes progressives monochromatiques dans le vide (OPPM) :

Soit Ox l'axe de propagation. L'onde plane progressive monochromatique, se dirigeant dans la direction positive de Ox, est caractérisée par une dépendance en $cos(kx-\omega t+\varphi_0)$, avec :

k : le module du vecteur d'onde

$\omega$ : la pulsation de l'onde

$\varphi_0$ : la phase à l'origine.

Une telle onde fait apparaître une double périodicité des composantes $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

a) une périodicité temporelle : pour x donnée, les composantes du champ sont des fonctions sinusoïdales du temps, de période $T=\frac{2\pi}{\omega}$, correspondant à la fréquence temporelle $\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$ (en Hertz).

b) une périodicité spatiale : A un instant t donné les composantes du champ sont des fonctions sinusoïdales de la variable d'espace x, de période spatiale, ou longueur d'onde $\lambda=cT=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\omega}c$. La longueur d'onde correspond à la distance parcourue par l'onde pendant une période T. On définit aussi le nombre d'onde $q=\frac{1}{\lambda}$ (en $m^{-1}$).

**Les différents domaines de longueur d'ondes (OEM)**

| | Radio | Micro-ondes | IR | Visible | UV | R-X | R-$\gamma$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda_0$ | $\infty$ 1m | 1mm | 0.75 µm | 0.4 µm | 1nm | $5.10^{-3}$nm | 0 | |
| $\nu=\frac{c}{\lambda_0}$ (Hz) | 0 | $310^8$ | $310^{11}$ | $3.10^{14}$ | $7.510^{14}$ | $310^{17}$ | $610^{19}$ | $\infty$ |

### 1- Champ électromagnétique d'une OEPPM se propageant suivant Ox :



WWW.TALIB24.COM

On sait qu'une onde plane progressive est transversale, c'est-à-dire que la composante de $\vec{E}$ suivant la direction de propagation est nulle.

Pour une pulsation $\omega$ donnée, l'OEPPM se propageant suivant Ox est caractérisée par les composantes de $\vec{E}$ :

$$\vec{E} \quad \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y}\cos(k.x - \omega t + \varphi_1), \\ E_z = E_{0z}\cos(k.x - \omega t + \varphi_2) \end{cases} \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

$\vec{E}_{0y}$ , $\vec{E}_{0z}$ sont des amplitudes, et $\varphi_1$ et $\varphi_2$ les phases à l'origine.

Les composantes de $\vec{B}$ s'en déduisent ainsi :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\E_y\\E_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x = 0 \\ B_y = -\dfrac{E_z}{c} \\ B_z = \dfrac{E_y}{c} \end{pmatrix}, \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

**2- OEPPM de direction de propagation quelconque**

Quelle que soit la direction de propagation de l'onde plane, le champ est uniforme dans un plan d'onde.

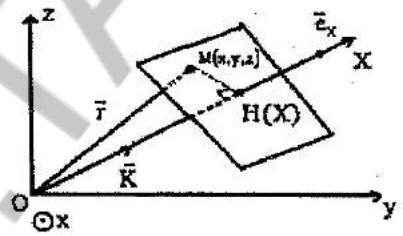



Fig. 5.3

$$E(\vec{r},t) = E(O\vec{H},t) = E_0\cos(K.X - \omega t + \varphi)$$

Avec $X = \vec{r}.\vec{e}_x$ $\qquad \vec{K} = (K_x, K_y, K_z)$

$\vec{K} = K.\vec{e}_x$ $\qquad \vec{r} = (x, y, z)$

$\Rightarrow$

$$E(\vec{r},t) = E(O\vec{H},t) = E_0\cos(\vec{K}.\vec{r} - \omega t + \varphi)$$
$$= E_0\cos(x.K_x + y.K_y + z.K_z - \omega t + \varphi)$$



WWW.TALIB24.COM

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x}{c} \wedge \vec{E} \quad \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{K}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

Le vecteur d'onde $\vec{K}$ est toujours dirigé dans le sens de la propagation. Ses composantes $K_x, K_y, K_z$ sont liés à la pulsation $\omega$ par :

$$K^2{}_x + K^2{}_y + K^2{}_z = \frac{\omega^2}{c^2}$$

## V. Polarisation des ondes planes progressives monochromatiques

### a- position du problème :

Etudier la polarisation d'une onde électromagnétique c'est préciser l'évolution de la direction du champ électrique $\vec{E}$ attaché à cette onde au cours de la propagation. Soit une onde plane progressive se propageant dans le vide suivant Ox décrite par le champ $\vec{E}$

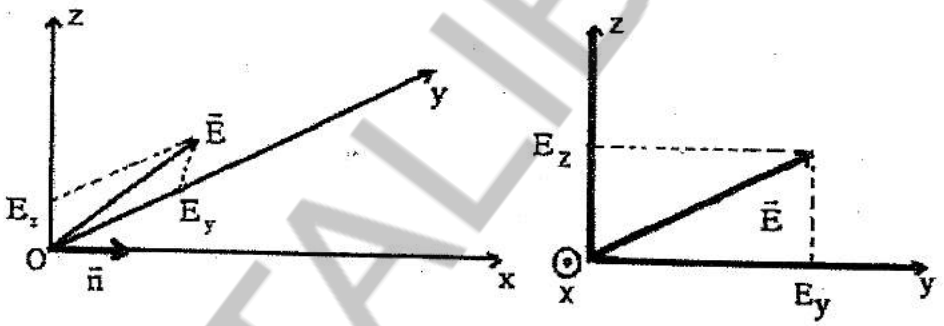



Fig. 5.4

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(k.x - \omega t + \varphi_1) \\ E_z = E_{0z} \cos(k.x - \omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$E_{oy}$, $E_{oz}$, $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont des constantes. Le champ $\vec{B} = \frac{\vec{n}}{c} \wedge \vec{E}$.

Pour décrire l'évolution de la direction du champ $\vec{E}$, on peut :

- Soit fixer **x** et examiner l'évolution de cette direction dans le temps.

WWW.TALIB24.COM

- Soit fixer **t** et observer l'évolution de cette direction le long de Ox, c.à.d. le long de la direction de propagation.

**b- Différents états de polarisation dans un plan d'onde**

Pour la description de champ, on se place dans le plan x=0 (on a fixé x) et on décrit l'évolution du vecteur $\vec{E}$ dans ce plan

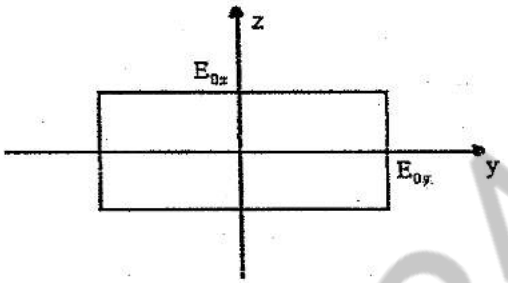



Fig. 5.5

On a : $E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \varphi_1)$ $E_z = E_{0z}\cos(\omega t - \varphi_2)$

En un point donné de ce plan, l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ décrit une courbe comprise dans un rectangle de côtés $2E_{oy}$ et $2E_{oz}$.

Envisageons différents cas

- si $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ ; $\dfrac{E_y}{E_z} = \dfrac{E_{0y}}{E_{0z}}$

le champ $\vec{E}$ garde une direction fixe. On dit que l'onde électromagnétique présente une polarisation rectiligne.

- si $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ ; $\dfrac{E_y}{E_z} = -\dfrac{E_{0y}}{E_{0z}}$

Le champ $\vec{E}$ garde une direction fixe et l'onde est polarisée rectilignement.

- Si $\varphi_2 - \varphi_1$ n'est pas un multiple de $\pi$, on peut écrire :

$\dfrac{E_y}{E_{0y}} = \cos\omega t$ et $\dfrac{E_z}{E_{0z}} = \cos(\omega t - \varphi)$

avec $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$



WWW.TALIB24.COM

En éliminant le temps, on obtient :

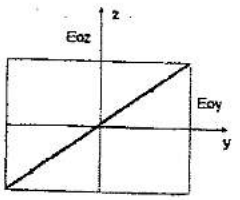
$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2+\left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)^2-2\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)\cos\varphi=\sin^2\varphi,$$

qui est l'équation générale d'une ellipse (*qui couvre aussi les deux cas précédemment cités*).

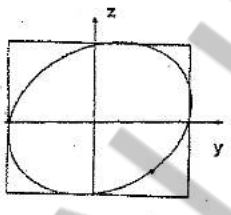
L'extrémité de $\vec{E}$ décrit donc une ellipse ; on dit que l'onde présente une polarisation elliptique.

**c- Définitions des ondes elliptiques gauche et droite**

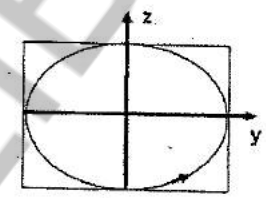
Suivant la valeur de $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$, cette ellipse est décrite dans un sens ou dans un autre. L'onde est elliptique gauche si pour un observateur recevant l'onde, le champ électrique tourne dans le sens positif associé au sens de propagation, si non elle est elliptique droite.



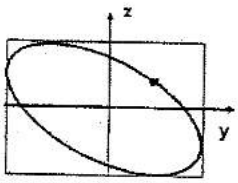

$\varphi=\varphi_2-\varphi_1=0$




$0<\varphi<\pi/2$



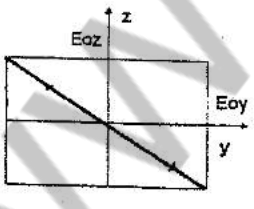

$\varphi=\pi/2$



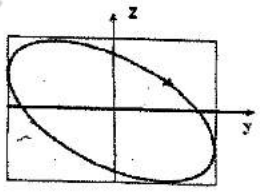

$\pi/2<\varphi<\pi$

Rectiligne

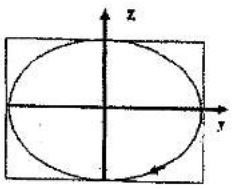
elliptique gauche

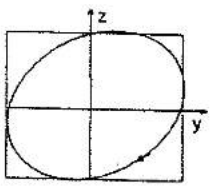



$\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pi$




$\pi<\varphi<3\pi/2$




$\varphi=3\pi/2$

$3\pi/2<\varphi<2\pi$

WWW.TALIB24.COM

Rectiligne elliptique droite

Fig. 5.6 Différents sens de rotation et d'inclinaison

Sens de rotation : le sens de rotation de $\vec{E}$ s'obtient en déterminant le sens de variation de $E_z$.

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)_{t=0} = \omega E_{oz} \sin\varphi$$

Le sens de rotation dépend de **sin** $\varphi$.

Si $\varphi \in ]0,\pi[$ ; $\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)_{t=0} \geq 0$, la polarisation est elliptique gauche $E_z \uparrow$.

Si $\varphi \in ]\pi,2\pi[$ ; $\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)_{t=0} \leq 0$, la polarisation elliptique droite $E_z \downarrow$.

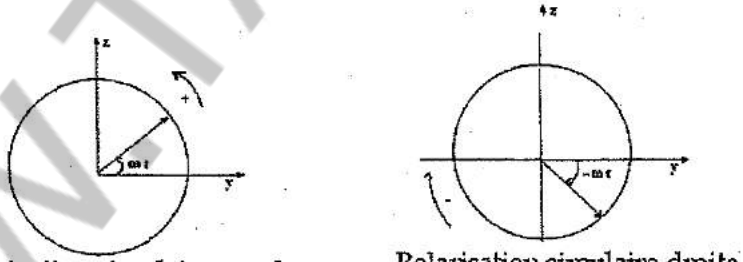
**d- Polarisation circulaire :**

Si $E_{oy}=E_{oz}=E_o$ et $\varphi = \pi/2$ ou $\varphi = 3\pi/2$, la polarisation de l'onde est circulaire.

On obtient :

$$E_y = E_0 \cos\omega t \text{ et } E_z = E_0 \cos(\omega t - \varphi) = \pm E_0 \sin\omega t,$$

d'où $$E_y^2 + E_z^2 = E_0^2$$




Polarisation circulaire gauche $\varphi = \pi/2$

Polarisation circulaire droite $\varphi = 3\pi/2$

Fig. 5.7

Aspect vibratoire temporel et spatial :

-A l'abscisse x, l'extrémité de $\vec{E}$ décrit un cercle de rayon $E_o$ à la vitesse angulaire $\omega$.

- A un instant t, l'extrémité de $\vec{E}$ décrit une hélice circulaire.



WWW.TALIB24.COM

Exercice : Etude d'une antenne réceptrice

Une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale polarisée rectilignement (OPPM-R ) de pulsation $\omega$ se propage dans le vide dans le sens positif de l'axe x'x. Son champ électrique vibre parallèlement à la direction y'y. Comment doit on placer un cadre rectangulaire conducteur fermé de côtés a et b très inférieurs à la longueur d'onde $\lambda_0$ pour obtenir une force électromotrice répartie le long du cadre avec une amplitude maximale que l'on déterminera? Dans ce cas, quelle relation doivent vérifier a et b pour que l'amplitude soit maximale avec un cadre de périmètre imposé ?

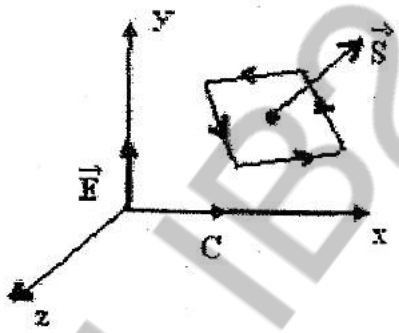



Fig. 5.8

**Solution :**

Les champs sont $\vec{E}_y = E_0 \cos\omega(t-\frac{x}{c})\vec{e}_y$, $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x}{c} \wedge \vec{E} = \frac{E_0}{c}\cos\omega(t-\frac{x}{c})\vec{e}_z$.

D'après la loi de Faraday $e = -\frac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = \iint_S \vec{B}\, d\vec{S}$

$\lambda_0 >>$ a et b, on remplace $\vec{B}$ par sa valeur au centre du cadre (de coordonnées xyz)

$\phi \approx \frac{E_0}{c}\cos\omega(t-\frac{x}{c})\vec{S}\vec{e}_z \Rightarrow \quad e \approx \frac{E_0}{c}\omega\sin\omega(t-\frac{x}{c})\vec{S}\vec{e}_z$

ce qui montre que l'amplitude de f.e.m. est maximale quand le cadre est parallèle au plan xOy, donc perpendiculaire à $\vec{B}$.

L'amplitude $e_0$ est alors maximale et vaut $e_0 = \frac{E_0\,\omega ab}{c}$ : valeur maximale pour a=b (cadre carré) à périmètre imposé.



WWW.TALIB24.COM

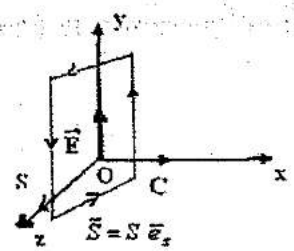



Fig. 5.9

## VI. Représentation complexe du champ électromagnétique :

Considérons une OEPPM se propageant dans la direction de l'axe Oz,

$$\vec{E}(M,t) \quad \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(kz-\omega t+\varphi_1) \\ E_y = E_{0y}\cos(k.z-\omega t+\varphi_2) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

On peut donc lui associer la représentation complexe suivante :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \begin{cases} \underline{E_x} = \underline{E}_{ox}e^{j(kz-\omega t)} \\ \underline{E_y} = \underline{E}_{oy}e^{j(kz-\omega t)} \\ \underline{E_z} = 0 \end{cases},$$

où la grandeur soulignée est le complexe associé à la grandeur réelle.

Avec $\underline{E}_{ox} = E_{ox}e^{j\varphi_1}$ et $\underline{E}_{oy} = E_{oy}e^{j\varphi_2}$

On peut aussi écrire $\underline{\vec{E}}(M,t)$ sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}_0}\ e^{j(Kz-\omega t)}$$

Avec $\underline{\vec{E}_0}\begin{cases} \underline{E_{0x}} \\ \underline{E_{0y}} \\ \underline{0} \end{cases}$ ( les composantes de $\underline{\vec{E}_0}$).

La représentation complexe du champ magnétique s'en déduit à l'aide de la relation :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E}$$



WWW.TALIB24.COM

$$\underline{\vec{B}}(M,t)=\underline{\vec{B}_0}\exp j(Kz-\omega t), \qquad \text{avec } \underline{\vec{B}_0}\begin{cases}-\underline{E}_{0y}/c\\ \underline{E}_{0x}/c\\ 0\end{cases}$$

- **Les opérateurs de l'analyse vectorielle**

Les opérateurs de l'analyse vectorielle appliqués aux grandeurs d'une onde plane sinusoïdale prennent en notation complexe des formes entièrement simples. Soit P l'un des ces opérateurs, par exemple, la dérivée partielle par rapport au temps, div, rot, etc.

L'onde est plane et sinusoïdale si $\vec{S}(\vec{r},t)$ est de la forme : $\vec{S}(r,t)=Re\left[\underline{\vec{S}_0}e^{j(\omega t-\vec{K}\vec{r})}\right]$

$\vec{S}_0$ vecteur constant à composantes éventuellement complexes

$$\vec{S}_0=S_{0x}\vec{e}_x+S_{0y}\vec{e}_y+S_{0z}\vec{e}_z$$

$$\vec{S}_0\begin{cases}S_{0x}=a_x e^{j\varphi_x}\\ S_{0y}=a_y e^{j\varphi_y}\\ S_{0z}=a_z e^{j\varphi_z}\end{cases} \qquad \vec{S}\begin{cases}S_x=a_x\cos(\omega t-\vec{K}\vec{r}+\varphi_x)\\ S_y=a_y\cos(\omega t-\vec{K}\vec{r}+\varphi_y)\\ S_z=a_z\cos(\omega t-\vec{K}\vec{r}+\varphi_z)\end{cases}$$

En notation complexe $\underline{\vec{S}}(\vec{r},t)=\underline{\vec{S}}_o e^{j(\omega t-\vec{k}\vec{r})}$

Ainsi $P\circ \mathrm{Re}(\underline{\vec{S}})=\mathrm{Re}(P\circ\underline{\vec{S}})$

Le résultat de l'application d'un opérateur sur la partie réelle de S est égal à la partie réelle du résultat de l'application de l'opérateur sur S.

- dérivée temporelle

$$\frac{\partial\underline{\vec{S}}(\vec{r},t)}{\partial t}=j\omega\underline{\vec{S}}_o e^{j(\omega t-\vec{k}\vec{r})}=j\omega\underline{\vec{S}}$$

$$\frac{\partial^2\underline{\vec{S}}(\vec{r},t)}{\partial t^2}=-\omega^2\underline{\vec{S}}_o e^{j(\omega t-\vec{k}\vec{r})}=-\omega^2\underline{\vec{S}}$$

- la divergence $div\underline{\vec{S}}=-j\vec{k}\underline{\vec{S}}$
- le rotationnel $r\vec{o}t\underline{\vec{S}}=-j\vec{k}\wedge\underline{\vec{S}}$
- le laplacien vectoriel $\Delta\underline{\vec{S}}=-k^2\underline{\vec{S}}$

WWW.TALIB24.COM

Remarque : Ces identités ne sont valables que pour une OPPM.

- **Ondes sinusoïdales planes, solution des équations de Maxwell**

On se propose de retrouver directement à partir des équations de Maxwell les ondes planes sinusoïdales qui en sont solutions dans le cas d'un milieu LHI.

Soit $(\vec{E},\vec{B})$ le champ électromagnétique

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\ e^{j(\omega t-\vec{k}\vec{r})}$$
$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}_0}\ e^{j(\omega t-\vec{k}\vec{r})}$$

Dans un milieu non chargé et sans courant ($\rho_L = 0$ , $\vec{j}_L = \vec{0}$), les équations de Maxwell s'écrivent :

$$div\underline{\vec{B}} = 0 \qquad div\underline{\vec{D}} = 0$$

$$r\vec{o}t\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \qquad r\vec{o}t\frac{\underline{\vec{B}}}{\mu_0} = \frac{\partial \varepsilon \underline{\vec{E}}}{\partial t}, \text{ soit :}$$

$$-j\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$$

$$-j\varepsilon\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0.$$

On retrouve donc la structure de l'OPPM, càd que les champs **E** et **B** sont transverses.

$$-j\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}} \quad \rightarrow \quad \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\underline{\vec{E}}$$

$$-j\vec{k}\wedge\frac{\underline{\vec{B}}}{\mu_0} = j\omega\varepsilon\underline{\vec{E}} \quad \rightarrow \quad -\frac{\vec{k}}{\mu_0\omega\varepsilon}\wedge\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{E}}$$

Par élimination de B, on obtient la relation : $\frac{k^2}{\mu_0\varepsilon\omega^2} = 1.$

Or, la vitesse de propagation $v$ étant définie par $v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$, le module du vecteur d'onde k et la pulsation sont liées par la relation $\varepsilon\,\mu_0\,v^2 = 1$.

Nous pouvons donc retenir la solution :



WWW.TALIB24.COM

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \qquad \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

## VII. Energie associée à une onde électromagnétique

### 1. Théorème de Poynting dans le vide sans charge et sans courant

En l'absence de charges et de courants le théorème de Poynting s'écrit

localement $$\frac{\partial W^*}{\partial t} = - div.\vec{R}$$

où $W^* = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 + \frac{B^2}{2\mu_o}$ est la densité d'énergie volumique électromagnétique localisée dans l'espace et $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_o}$ le vecteur de Poynting.

L'intégrale de cette relation locale sur un volume $(\tau)$ donne :

$$\iiint_\tau \left( \frac{\partial W^*}{\partial t} + div\vec{R} \right) d\tau = 0 .$$

Cette relation traduit un bilan d'énergie entre l'énergie électromagnétique, $\varsigma_{em} = \iiint_\tau W^* d\tau$, contenue dans le volume $(\tau)$ et celle qui en sort par rayonnement.

La puissance, $P_{rad} = \oiint \vec{R}.\vec{n}_{ex} dS$ , rayonnée vers l'extérieur à travers la surface S qui délimite ce volume.

$$P_{rad} = -\frac{d\varsigma_{em}}{dt}$$

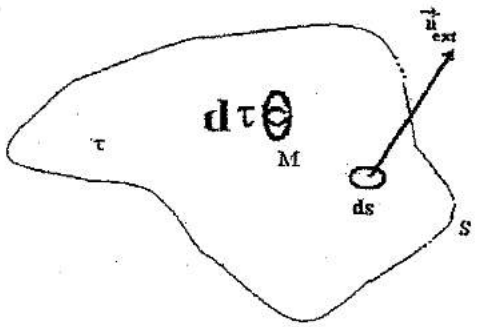



Fig. 5.10



WWW.TALIB24.COM

Dans le vide, une variation d'énergie électromagnétique implique un rayonnement.

**2. flux d'énergie électromagnétique associé à une onde progressive**

Puisque les champs électrique et magnétique sont liés en tout point M et à tout instant **t** par la relation $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$, l'énergie électromagnétique volumique $W^*$ s'écrit : $W^* = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 + \frac{B^2}{2\mu_o} = \varepsilon_o E^2 = \frac{B^2}{\mu_o}$,

d'autre part : $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_o} = \vec{E} \wedge (\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{\mu_0 c}) = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}$

$$\vec{R} = \varepsilon_0 \, c \, E^2 \, \vec{u} = W^* \, c \, \vec{u} \, .$$

Le vecteur de Poynting se présente donc comme un courant volumique d'énergie électromagnétique qui s'écoule dans la direction de propagation (de vecteur unitaire $\vec{u}$) avec la vitesse c. Ainsi le flux du vecteur de poynting $\vec{R}$ à travers un élément de surface **dS,** orienté selon l'unitaire de la normale $\vec{n}$, n'est rien d'autre que la puissance radiative instantanée sortant de cet élément.

$P_{rad} = \iint_S \vec{R}.\vec{n} dS$ $\qquad dP_{rad} = R\,dS\ \vec{u}.\vec{n} = R\ dS\ cos\theta\ ; \quad \theta = angle\ (\vec{u},\vec{n})$.

La puissance traversant une surface dS(M) déposée perpendiculairement à la direction de propagation est donc :

$$dP(M,t) = \frac{E^2(M,t)}{\mu_0 c}\, dS(M) = c\,\varepsilon_0 E^2(M,t)\, dS(M) \, .$$

**a) le vecteur de Poynting complexe**

Le vecteur de Poynting défini pour une onde monochromatique est $\underline{\vec{R}} = \frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\mu_o}$



WWW.TALIB24.COM

B* désigne le complexe conjugué de B avec $\underline{\vec{B}^*} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}^*}$

Le vecteur k étant à composantes réelles.

$$\vec{R} = \frac{1}{2}\underline{\vec{E}} \wedge (\frac{\vec{k}}{\omega\mu_0} \wedge \underline{\vec{E}^*})$$

$$= \frac{1}{2} c\, \varepsilon_0 (E.E^*)\vec{u}$$

Il s'ensuit que le vecteur $\underline{\vec{R}}$ est réel (aussi noté $\vec{R}_m$ ).

**Important** : le flux de $\vec{R}_m$ à travers une surface S est la **puissance moyenne** traversant cette surface.

**VIII. L'Onde scalaire sphérique**

Soit r = OM la distance du point M au point fixe O. L'onde scalaire sphérique S(r,t) est solution de l'équation d'onde :

$$\square S = 0, \text{ ou } \quad \Delta S - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0 .$$

A une date t, S(r,t) ne dépend que de la distance r :

$$\Delta S = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rS)}{\partial r^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 (rS)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (rS)}{\partial t^2} = 0$$

on retrouve l'équation de propagation générale à une dimension, de solution générale : $r\,S(r,t) = f(t - r/c) + g(t + r/c)$,

qui correspond à la somme d'une onde sphérique progressive divergente et d'une onde sphérique convergente. Si elles sont sinusoïdales, les amplitudes sont en 1/r :

$$S(r,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega(t - r/c) - \varphi_o) + \frac{B}{r}\cos(\omega(t + r/c) - \psi_o)$$

On note la différence avec les ondes planes : l'amplitude ici est en 1/r, le vecteur d'onde n'est pas défini pour une onde sphérique et évidemment il ne figure pas de produit scalaire dans l'expression de la phase.

En notation complexe : $$\underline{S}(r,t) = \frac{\underline{A}}{r} e^{-j\omega(t - r/c)} + \frac{\underline{B}}{r} e^{-j\omega(t + r/c)}$$



WWW.TALIB24.COM