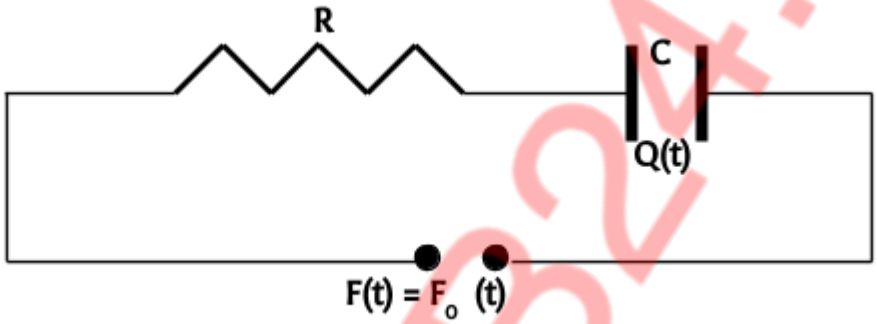
SOLUTION DU CONRÔLE FINAL DE LA MATIERE :VIBRATIONS

****

Sujet :

On considère un circuit électrique à « **un seul degré de liberté** », « **Amorti et Forcé** », comme le montre la figure ci-dessous :



Le circuit est composé d'une résistance R montée en série avec un condensateur de capacité C et de charge Q(t). Il est soumis à une f.é.m $F(t) = F_0\,\delta(t)$ d'amplitude F0 avec δ (t) est la fonction impulsion de Dirac.

1°] Donner les expressions **(Remarques : Ces formules sont données dans le cours et elles sont utilisées dans les TD)** :

1.1) de l'énergie magnétique E_m :

Réponse (1 point)

$$E_m = \frac{1}{2} L\, \dot{Q}^2(t)$$

Comme Il n'y a pas de bobine dans le circuit, alors L = 0, d'où : $E_m = 0$

1.2) de l'énergie électrique E_e :

Réponse (1 point)

$$E_e = \frac{1}{2C} Q^2(t) - Q(t)F(t) = \frac{1}{2C} Q^2(t) - F_0\delta(t)Q(t)$$

1.3) du lagrangien L du circuit :

Réponse (1 point)

$$L = E_m - E_e = 0 - E_e = -E_e = -\frac{1}{2C} Q^2(t) + Q(t)F(t) = -\frac{1}{2C} Q^2(t) + F_0\delta(t)Q(t)$$

1.4) de la fonction de dissipation G :

Réponse (1 point)

$$G = -\frac{1}{2} R\, \dot{Q}^2(t)$$

WWW.TALIB24.COM

2°] Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de la charge Q(t) en fonction du temps t.

Réponse (2.5 points)

L équations d'Euler-Lagrange d'un oscillateur harmonique amorti et forcé s'écrit (voir cours et TD) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q} - \frac{\partial G}{\partial \dot{Q}} = 0$$

Elle donne : $R\,\dot{Q} + \frac{Q}{C} = F(t) = F_0\,\delta(t)$

Ou encore : $\dot{Q} + \omega_0^2 Q = f_0\,\delta(t)$

Avec : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{RC}}$ *et* $f_0 = \frac{F_0}{R}$

3°] Calculer la transformation de Carson-Laplace de la fonction : x(t) = exp(- a t) où a ∈ C et t la variable temps . (voir cours, compléments de mathématiques comment on calcule la transformée de Carson-Laplace d'une fonction temporelle f(t))

Réponse (2.5 points)

On définit la transformation de Cason-Laplace d'une fonction x(t) qui dépend du temps t par l'intégrale : $CL[x(t)] = x(p) = p\int_0^{+\infty} x(t)e^{-p\,t}\,dt$

Prenons x(t) = exp(-at), d'où : $CL[e^{-at}] = p\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-p\,t}\,dt$

Calculons l'intégrale :

$$p\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-pt}dt = p\int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}\,dt = p\left[\frac{-1}{(p+a)}e^{-(p+a)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{p}{(p+a)}$$

D'où :

$$CL[exp(-at)] = \frac{p}{(p+a)}$$

On en déduit la transformée inverse de Carson-Laplace de exp(-at):

$$CL^{-1}\left[\frac{p}{(p+a)}\right] = e^{-at}$$

4°] 4.1) Déterminer l'expression de la transformée de Carson-Laplace Q(p) de la charge électrique Q(t) en fonction de p, R, C, F_0 et Q_0 avec Q_0 est la valeur de la charge électrique Q à l'instant t = 0. On rappelle que la transformée de Carson-Laplace de la fonction impulsion de Dirac δ (t) est égale à p. (voir cours et TD)

Réponse (4.5 points)

Pour déterminer la transformée de Carson-Laplace, on utilise l'équation différentielle qui régit l'évolution de la charge Q(t) obtenue dans la question 2°], donnée par :

$$\dot{Q} + \omega_0^2 Q = f_0\,\delta(t) \qquad (1)$$

Avec : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{RC}}$ *et* $f_0 = \frac{F_0}{R}$

Prenons la transformée de Carson-Laplace de l'équation différentielle (1) : $\dot{Q} + \omega_0^2 Q = f_0\,\delta(t)$, soit :

$$CL[\dot{Q}] + \omega_0^2\,CL[Q] = f_0\,CL[\delta(t)] \qquad (2)$$

WWW.TALIB24.COM

En utilisant la formule donnant la transformée de Carson-Laplace de : $\dot{Q}$ *qui est exprimée par :*

$$CL[\dot{Q}] = p\,Q(p) - pQ(t=0) = pQ(p) - pQ_0 \qquad (3)$$

Et la valeur de la transformée de Carson-Laplace de l'impulsion de Dirac δ (t) qui :

$$CL[\delta(t)] = p$$

L'équation (2), devient :

$$pQ(p) - pQ_{0+}\omega_0^2 Q(p) = f_0\,p \qquad (4)$$

On en déduit :

$$Q(p) = (Q_0 + f_0)[\frac{p}{(p+\omega_0^2)}] = (Q_0 + \frac{F_0}{R})[\frac{p}{(p+\frac{1}{RC}}] \qquad (5)$$

4.2) En déduire la solution Q(t) de l'équation différentielle obtenue dans 2°].

Réponse (2.5 points)

La charge Q(t) s'obtient en prenant la transformée inverse de Carson-Laplace de l'expression (5) :

$$Q(t) = CL^{-1}[Q(p)] = (Q_0 + f_0)CL^{-1}[\frac{p}{(p+\omega_0^2)}] = (Q_0 + \frac{F_0}{R})CL^{-1}[\frac{p}{(p+\frac{1}{RC}}]$$

D'après la quesion 3°], on a trouvé que : $CL^{-1}[\frac{p}{(p+a)}] = e^{-at}$

En prenant : $a = \omega_0^2 = \frac{1}{RC}$

On trouve : $CL^{-1}[\frac{p}{(p+\frac{1}{RC}}] = e^{\frac{-t}{RC}}$

On donc :

$$Q(t) = (Q_0 + \frac{F_0}{R}e^{\frac{-t}{RC}}$$

5°] Tracer l'allure de la courbe Q(t) en fonction de t/ τ où τ = RC est le temps de relaxation

Réponse (2 points)

L'allure donnant la courbe Q(t), se trace en étudiant brièvement la fonction obtenue dans 4.2°]:

$$Q(t) = (Q_0 + \frac{F_0}{R}e^{\frac{-t}{\tau}}$$

Où

$$\tau = RC \;:\; \textit{est le temps de relaxation}$$

On a :

Le domaine de définition de Q(t) est : $[0, +\infty[$

1) *La fonction Q(t) est continue sur son domaine de définition*

   Limites : $Q(t=0) = (Q_0 + \frac{F_0}{R})$ *et* $\lim Q(t) = 0$ *quand t tend vers* $+\infty$

2) *La dérivée première Q'(t) est négative, donc la fonction Q(t) est décroissante.*
3) *La dérivée seconde Q''(t) est positive, donc la courbe Q(t) tourne sa concavité vers les y positifs.*

JE VOUS LAISSE LE SOIN DE TRACER CETTE SIMPLE COURBE EN SE BASANT SUR CE QUI PRECEDE !

6°] Le mouvement est-il oscillatoire ? Conclure.

Réponse (2 points)

A partir de l'expression de Q(t) ou de son allure (courbe), on en déduit que :

- Le mouvement n'est jamais oscillatoire.

WWW.TALIB24.COM

- La charge Q(t) tend vers zéro quand le temps devient grand.

WWW.TALIB24.COM