- $\underline{\beta < 0}$, le potentiel a seulement trois points fixes $x = -x_2, 0, x_2$.

CHAPITRE 3

Formalisme de Hamilton-Jacobi

3.1 Exercices

3.1.1 Exercice

Considérons une particule M soumise à une force centrale attractive de type $\vec{F} = -k\vec{r}/r^3$. On utilise les coordonnées polaires (r, θ) comme coordonnées généralisées.

1. Calculer la vitesse de M. En déduire son énergie cinétique.
2. Calculer le potentiel $V(r)$. En déduire le Langrangien de M.
3. Calculer les moments conjugués p_r et p_θ. En déduire le Hamiltonien de M.
   On cherche à résoudre le problème en utilisant le formalisme de Hamilton-Jacobi.
4. Rappeler l'équation de Hamilton-Jacobi. En déduire l'équation vérifiée par la fonction génératrice $S(r, \theta, t) = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_t(t)$.
5. Montrer que le Hamiltonien est conservé et déduire l'expression de $S_t(t)$.
6. Montrer que p_θ est conservée. En déduire que $S_\theta = p_\theta \theta$.
7. Etablir l'équation vérifiée par $S_r(r)$ et déduire que

$$S_r(r) \quad = \quad \pm \int \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}} dr.$$

8. Soient Q_r, Q_θ, P_r et P_θ les nouvelles coordonnées généralisées. Rappeler les équations de Hamilton vérifiées par chacune d'elles.
9. En utilisant la fonction génératrice $S(r, \theta, t)$, calculer Q_r et Q_θ.

10. En déduire que l'équation vérifiée par $r(\theta)$ est donnée par

$$\pm \int \frac{p_\theta dr}{r^2\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}}} \quad = \quad \pm\theta + \gamma_r$$

γ_r étant une constante.

11. En utilisant le changement de variable, $\sqrt{\alpha}X = \frac{p_\theta}{r} - \frac{mk}{p_\theta}$, avec $\alpha = 2mE + (\frac{mk}{p_\theta})^2$, montrer que la solution $r(\theta)$ est une conique d'équation

$$r(\theta) \quad = \quad \frac{p}{1 + e\cos(\theta + \theta_0)}.$$

En déduire les expressions du paramètre de la conique p, et de son exentricité e.

12. Discuter la nature de la conique en fonction de l'énergie E.

3.1.2 Exercice

Considérons une particule M soumise à une force centrale attractive de type $\vec{F} = -k\vec{r}/r^3$ et animée d'un mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}(O, xyz)$ que l'on considère galiléen.

1. Montrer que le mouvement est plan. On utilise les coordonnées polaires (r, θ) comme coordonnées généralisées.
2. Etablir l'expression du Hamiltonien $H(r, \theta, p_r, p_\theta)$ de M. En déduire que $H(r, \theta, p_r, p_\theta)$ et p_θ sont des intégrales premières.
3. On cherche à établir l'équation de mouvement de M en utilisant le formalisme de Hamilton-Jacobi.

a- Etablir l'équation de HJ associée au mouvement de M et déduire l'équation caractéristique de HJ.

b- On cherche des solutions, par séparation des variables, de la forme $S_0(r, \theta; \alpha_r, \alpha_\theta) = S_r(r; \alpha_r, \alpha_\theta) + S_\theta(\theta; \alpha_r, \alpha_\theta)$ où α_r et α_θ sont des constantes d'intégration.

— Etablir l'expression de $S_\theta(\theta; \alpha_\theta, \alpha_r)$ et celle de $S_r(r; \alpha_r, \alpha_\theta)$.

— On choisit $\alpha_\theta = p_\theta$ et $\alpha_r = E$. Justifier ces choix et déduire Q_θ et Q_r.

— En déduire que l'équation de la trajectoire $r(\theta)$ est donnée par

$$\pm \int_0^r \frac{p_\theta dr'}{r'^2\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}}} = \pm\theta + \text{Constante}$$

— Résoudre l'équation précédente et montrer que la solution est une conique $r(\theta) = p/(1 + e\cos(\theta - \theta_0))$ où l'on détermine les expressions de p, e et de θ_0.

3.1.3 Exercice

Soit une particule de masse m soumise au potentiel :

$$V(x) \quad = \quad -\frac{V_0}{\cosh^2(x)} \text{ où } V_0 > 0 \text{ est une constante positive}$$

1. Calculer le minimum de $V(x)$. Représenter graphiquement l'allure du potentiel $V(x)$.
2. Exprimer le Lagrangien de la particule. En déduire son Hamiltonien $H(x,p)$.
3. On s'intéresse dans cette question aux petites oscillations autour du minimum du potentiel $V(x)$.
   — Etablir que $V(x)$ peut se mettre au voisinage de son minimum sous la forme
   $$V(x) \quad = \quad -V_0 + V_0 x^2.$$
   — Etablir l'équation du mouvement et déduire l'expression de la fréquence des petites oscillations

   Dans la suite on considère les trajectoires de la particule où $-V_0 < E < 0$ dont on veut déterminer les fréquences d'osillations. Comme le mouvement est périodique, on se propose de retrouver la fréquence d'oscillation en utilisant le formalisme de HJ angle-action (ω, J).
4. Résoudre l'équation de HJ et déterminer l'expression de $W(x;\alpha)$, α étant la constante d'intégration.
5. Rappeler l'expression de J en fonction de $W(x;\alpha)$.
6. Etablir les bornes de variations de x.
7. Montrer que l'expression de J est donnée par
   $$J \quad = \quad \sqrt{2mV_0}\left(1 - \sqrt{\frac{-E}{V_0}}\right)$$
   En déduire la fréquence d'oscillation du mouvement de la particule.

3.2 Corrigés

3.2.1 Corrigé

1. On utilise la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Ainsi, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ et
   $$\vec{V} \quad = \quad \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$
   et l'énergie cinétique est égale à
   $$T \quad = \quad \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

2. la force est centrale, elle est est conservative :

$$\begin{aligned} dV &= -\overrightarrow{F}\overrightarrow{dM} \\ &= \frac{k}{r^2}\overrightarrow{e}_r(dr\overrightarrow{e}_r + rd\theta\overrightarrow{e}_\theta) \\ &= k\frac{dr}{r^2} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que le potentiel est nul à l'infini, la force variant en r^{-2},

$$V(r) = k\int\frac{1}{r^2} \to V(r) = -\frac{k}{r}.$$

Ce qui donne pour le Lagrangien

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}.$$

3. Calcul des moments conjugés :

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}. \end{aligned}$$

Ce qui donne pour le Hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L \\ &= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \end{aligned}$$

4. On cherche à utiliser le formalisme de Hamilton-Jacobi : Changement de variables tel que le nouvel Hamiltonien soit nul et les nouvelles variables soient cycliques. L'équation de HJ est alors

$$H(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

On cherche une solution à variables séparées de la forme $S(r,\theta,t) = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_t(t)$.

5. Comme H ne dépend pas explicitement du temps, alors il est conservé : $H = E$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(r,\theta,t)}{\partial t} &= \frac{\partial S_t}{\partial t} = -E \\ \Rightarrow S_t(t) = -Et. \end{aligned}$$

6. p_θ est une variable cyclique alors elle est conservée. Or

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_\theta(\theta)}{\partial \theta} &= p_\theta = Cte \\ \Rightarrow S_\theta(\theta) &= p_\theta \theta.\end{aligned}$$

7. En remplaçant

$$p_r = \frac{\partial S_r(r)}{\partial r}$$

dans l'equation de HJ, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_r(r)}{\partial r}\right)^2 + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} - E &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dS_r(r)}{dr} &= \pm\sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{2mk}{r}} \\ \Rightarrow S_r(r) &= \pm\int\sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{2mk}{r}}dr\end{aligned}$$

8. Les nouvelles variables sont cycliques, ainsi

$$\dot{Q}_r = \dot{Q}_p = \dot{P}_r = \dot{P}_\theta = 0.$$

9. On pose $P_r = E$ et $P_\theta = p_\theta$ alors

$$Q_r = \frac{\partial S}{\partial P_r} = \frac{\partial S}{\partial E} = \pm\int \frac{m}{\sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{2mk}{r}}}dr - t$$

et

$$\begin{aligned}Q_\theta &= \frac{\partial S}{\partial P_\theta} = \frac{\partial S}{\partial p_\theta} \\ &= \frac{\partial S_r(r)}{\partial p_\theta} + \theta \\ &= \pm\int \frac{-p_\theta}{r^2\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}}}dr + \theta\end{aligned}$$

10. Comme $\dot{Q}_\theta = 0 \Rightarrow Q_\theta = Cte$, alors on a

$$\int \frac{-p_\theta}{r^2\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}}}dr = \pm\theta \pm Cte = \pm\theta + \gamma_r$$

11. On a

$$\begin{aligned}2mE+\frac{2mk}{r}-\frac{p_\theta^2}{r^2} &= 2mE-p_\theta^2(\frac{1}{r^2}-\frac{2mk}{p_\theta^2}\frac{1}{r})\\ &= 2mE+p_\theta^2\frac{m^2k^2}{p_\theta^4}-p_\theta^2(\frac{1}{r}-\frac{mk}{p_\theta^2})^2\\ &= 2mE+\frac{m^2k^2}{p_\theta^2}-(\frac{p_\theta}{r}-\frac{mk}{p_\theta})^2\\ &= \alpha-\alpha X^2\end{aligned}$$

avec $\alpha=2mE+\frac{m^2k^2}{p_\theta^2}$ et $\sqrt{\alpha}X=\frac{p_\theta}{r}-\frac{mk}{p_\theta}$; nous avons aussi $\sqrt{\alpha}dX=-\frac{p_\theta dr}{r^2}$. En utilisant ces dernières expressions dans l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{\alpha}dX}{\sqrt{\alpha}\sqrt{1-X^2}} &= \pm\theta+\gamma_r\\ \int\frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} &= \pm\theta+\gamma_r\\ \Rightarrow \arcsin(X) &= \pm\theta+\gamma_r+Cte\\ \Rightarrow X &= \sin(\pm\theta+\gamma_\mathrm{r}+\mathrm{Cte})\\ &= \cos(\frac{\pi}{2}\mp\theta-\gamma_\mathrm{r}+\mathrm{Cte})\\ &= \cos(\theta+\theta_0)\end{aligned}$$

avec $\theta_0=\pm\frac{\pi}{2}\mp\gamma_r+Cte$ (Attention $\pm$ peut être absorbé dans la constante !). En restituant r, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{mk}{p_\theta^2}+\frac{\sqrt{\alpha}}{p_\theta}\cos(\theta+\theta_0)\\ \Rightarrow \frac{p_\theta^2}{mk}\frac{1}{r} &= \frac{p_\theta\sqrt{\alpha}}{mk}\cos(\theta+\theta_0)+1\end{aligned}$$

or

$$\frac{p}{r} = 1+e\cos(\theta+\theta_0)$$

$\Rightarrow p=\frac{p_\theta^2}{mk}$ et $e^2=\frac{2mEp_\theta^2+m^2k^2}{m^2k^2}=1+\frac{2p_\theta^2}{mk^2}E$

12. En partant de l'expression de l'excentricité, on déduit que

$$\Rightarrow\begin{cases}E = 0\Rightarrow e=1\Rightarrow \textit{une parabole}\\ E < 0\Rightarrow 0<e<1\Rightarrow \textit{une ellipse}\\ E > 0\Rightarrow e>1\Rightarrow \textit{une hyperbole}\end{cases}$$

3.2.2 Corrigé

Considérons une particule M soumise à une force centrale attractive de type $\vec{F} = -k\vec{r}/r^3$ et animée d'un mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}(O, xyz)$, muni de la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ que l'on considère galiléen.

1. Le mouvement est plan car la force est centrale et donc son moment par rapport à O est nul ce qui implique que le moment cinétique de M par rapport à O, $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = mr^2\dot{\theta}\vec{k} =$ est constant $\Longrightarrow$ le mouvement est plan.
2. En coordonnées polaires
$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \quad \text{et} \quad V(r) = -\frac{k}{r} \Longrightarrow L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{k}{r}.$$
Les moments conjugués sont donnés par
$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_\theta} = mr^2\dot{\theta}$$
L'expression du hamiltonien est ainsi égale à
$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}.$$
Comme H ne dépend pas explicitement du temps alors H est une intégrale première. De même, comme θ est une variable cyclique alors p_θ est conservée et donc une intégrale première.

a- L'équation de HJ est donnée par
$$H(r, \theta, \frac{\partial S}{\partial r}, \frac{\partial S}{\partial r}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$
Comme H est une intégrale première, l'équation caractéristique est alors
$$S(r, \theta; \alpha_r, \alpha_\theta, t) = S_0(r, \theta; \alpha_r, \alpha_\theta) - Et.$$

b- On cherche des solutions de la forme $S_0(r, \theta, \alpha_r, \alpha_\theta) = S_r(r; \alpha_r, \alpha_\theta) + S_\theta(\theta; \alpha_r, \alpha_\theta)$.

— Comme θ est cyclique alors $S_\theta = \alpha_\theta\theta = p_\theta\theta$. Nous avons
$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial S_r}{\partial r}$$
$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}.$$

En injectant ces deux expressions dans H, nous obtenons
$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{k}{r} = E$$
$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = E$$
$$\Longrightarrow S_r(r; \alpha_r, \alpha_\theta = p_\theta) = \pm\int_0^r \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r'} - \frac{p_\theta^2}{r'^2}}dr'$$

— Le choix des constantes d'intégration est dicté par les intégrales premières. Nous avons donc établi que $\alpha_\theta = p_\theta$, il reste $\alpha_r = E$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \frac{\partial S}{\partial p_\theta} = \theta \pm \int_0^r \frac{p_\theta dr'}{r'^2\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r'} - \frac{p_\theta^2}{r'^2}}} \\ Q_r &= \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial S_r}{\partial r} = \pm\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}} \end{aligned}$$

— Sachant que $\dot{Q}_\theta = 0 \Longrightarrow Q_\theta = K$, alors

$$\int_0^r \frac{p_\theta dr'}{r'^2\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r'} - \frac{p_\theta^2}{r'^2}}} = \pm(\theta + K)$$

— Posons $u = 1/r' \Longrightarrow du = -dr'/r'^2$ ce qui implique

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{p_\theta dr'}{\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r'} - \frac{p_\theta^2}{r'^2}}} &= -\int_0^{1/r} \frac{p_\theta du}{\sqrt{2mE + 2mku - p_\theta^2 u^2}} \\ &= -\int_0^{1/r} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\theta^2} + \frac{2mk}{p_\theta^2}u - u^2}} \\ &= -\int_0^{1/r} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\theta^2} + \frac{m^2k^2}{p_\theta^4} - \left(u - \frac{mk}{p_\theta^2}\right)^2}} \end{aligned}$$

On pose $\alpha^2 = \frac{2mE}{p_\theta^2} + \frac{m^2k^2}{p_\theta^4}$ et $v = (u - \frac{mk}{p_\theta^2})/\alpha$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{p_\theta dr'}{\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r'} - \frac{p_\theta^2}{r'^2}}} &= -\int_{-mk/p_\theta^2\alpha}^{(1/r - \frac{mk}{p_\theta^2})/\alpha} \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} \\ &= \arccos\left[\left(\frac{1}{r} - \frac{mk}{p_\theta^2}\right)/\alpha\right] - \arccos\left(-\frac{mk}{p_\theta^2\alpha}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} \arccos\left[\left(\frac{1}{r} - \frac{mk}{p_\theta^2}\right)/\alpha\right] - \arccos\left(-\frac{mk}{p_\theta^2\alpha}\right) &= \pm(\theta + K) \\ \Longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{mk}{p_\theta^2} + \alpha\cos(\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

où $\theta_0 = \pm K + \arccos\left(-\frac{mk}{p_\theta^2\alpha}\right)$. Aussi,

$$r(\theta) = \frac{\frac{p_\theta^2}{mk}}{1 + \frac{\alpha p_\theta^2}{mk}\cos(\theta - \theta_0)}$$

qui est l'équation d'une conique de paramètre $p = p_\theta^2/mk$ et d'excentricité $e = \alpha/p$.

3.2.3 Corrigé

1. On dérive le potentiel par rapport à x

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x)}{\partial x} &= 2V_0\frac{\sinh(x)}{\cosh^3(x)}\\ &= 0 \Rightarrow \sinh(x) = 0 \Rightarrow x = 0.\end{aligned}$$

et $V(x=0) = -V_0$. Pour montrer que c'est un minimum, il suffit de calculer la dérivée seconde au point $x = 0$ et de montrer que $V''(0) > 0$:

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = 2V_0\left(\frac{\cosh^2(x) - 3\sinh^2(x)}{\cosh^4(x)}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}|_{x=0} = 2$$

ce qui est bien le cas.
Or $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = 0$.

2. Le lagrangien de la particule est

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot{x}, x, t) &= T - V(x)\\ &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{V_0}{\cosh^2(x)}.\end{aligned}$$

Le moment conjugué est

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\\ &= m\dot{x}\end{aligned}$$

ce qui donne pour le Hamiltonien

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x,p) &= p_x\dot{x} - \mathcal{L}\\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{V_0}{\cosh^2(x)}.\end{aligned}$$

3. On s'intéresse aux petites oscillations, $x \to 0$,
— alors on fait un développement limité à l'ordre 2 autour de $x = 0$:

$$\begin{aligned}V(x) &= V(0) + x\frac{\partial V(x)}{\partial x}|_{x=0} + \frac{x^2}{2!}\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}|_{x=0} + \mathcal{O}(x^3)\\ &= -V_0 + V_0 x^2\end{aligned}$$

car $V'(0) = 0$ et $V''(0) = 2$.

— Pour établir l'équation du mouvement, on peut utiliser soit les équations de Lagrange soit celles de Hamilton :

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= -\frac{\partial \mathcal{H}(x,p)}{\partial x}\\ m\ddot{x} &= -2V_0 x\\ \Rightarrow \ddot{x} &+ \frac{2V_0}{m}x = 0\end{aligned}$$

qui est l'équation d'un mouvement d'oscillations autours de $x = 0$ avec la pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{2V_0}{m}} \Rightarrow \nu = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2V_0}}$$

4. Le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps alors il est conservé. Or l'équation de HJ donne

$$\mathcal{H}(x,p) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

avec comme solution (variables séparées) $W(x,t) = W_x(x) + W_t(t)$ et $p_x = \partial W/\partial x = \partial W_x(x)/\partial x$. Comme $\mathcal{H}$ est conservé alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial W_t(t)}{\partial t} = -\mathcal{H}(x,p) = -E\\ \Longrightarrow W_t(t) = -Et.\end{aligned}$$

Quant à $W_x(x)$, en remplaçant p_x par $\partial W_x(x)/\partial x$ dans l'expression de HJ, on obtient, sachant que dans ce cas la constante d'intégration $\alpha = E$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x,p) &= \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_x(x)}{\partial x}\right)^2 - \frac{V_0}{\cosh^2(x)} = E\\ \Rightarrow \frac{\partial W_x(x)}{\partial x} &= \pm\sqrt{2m(E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)})} \Longrightarrow W_x(x) = \pm\int\sqrt{2m(E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)})}dx\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement

$$W(x,t) = -Et \pm \int\sqrt{2m(E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)})}dx.$$

5. Comme le mouvement est périodique, l'on peut utiliser la méthode de HJ des variables conjuguées angle-action. Aussi, nous avons

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial W}{\partial x}dx.$$

6. Comme le mouvement est périodique, lorsque la particule atteint les bornes en x, son énergie cinétique est nulle et donc son énergie mécanique est réduite à son énergie potentielle, ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{H}(x = x_b, p_x = 0) = \alpha = E \Longrightarrow \cosh^2(x_b) = -\frac{V_0}{E} \Longrightarrow x_{b\pm} = \pm \mathrm{argcos}\sqrt{-\frac{V_0}{E}}.$$

Rappelons que $E < 0$ et donc la racine carrée est bien définie.

7. Calculons l'expression de J. En effet,

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial W}{\partial x}dx \\
J &= \frac{1}{2\pi}\left[+\int_{x_{b-}}^{x_{b+}} \sqrt{2m\left(E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)}\right)}dx - \int_{x_{b+}}^{x_{b-}} \sqrt{2m\left(E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)}\right)}dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x_{b-}}^{x_{b+}} \sqrt{2m\left(E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)}\right)}dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{x_{b+}} \sqrt{2m\left(E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)}\right)}dx \\
&= \frac{2}{\pi}\sqrt{-2mE}\int_{0}^{x_{b+}} \sqrt{\frac{V_0}{-E}\frac{1}{\cosh^2(x)} - 1}dx
\end{aligned}$$

or

$$\int_0^{\mathrm{argcos}(a)} \sqrt{\frac{a}{\cosh^2(x)} - 1}dx = \frac{\pi}{2}(a - 1)$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned}
J &= \frac{2}{\pi} \times \sqrt{-2mE} \times \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{V_0}{-E}} - 1\right) \\
&= \sqrt{-2mE}\left(\sqrt{\frac{V_0}{-E}} - 1\right) = \sqrt{2m}\left(\sqrt{V_0} - \sqrt{-E}\right) = \sqrt{2mV_0}\left(1 - \sqrt{\frac{-E}{V_0}}\right).
\end{aligned}$$

Pour déterminer la pulsation propre, il suffiet d'inverser la relation précédente, ce qui donne

$$E = -\left(\sqrt{V_0} - \frac{J}{\sqrt{2m}}\right)^2$$

et d'utiliser la définition

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{\partial E}{\partial J} = 2\left(\sqrt{V_0} - \frac{J}{\sqrt{2m}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2m}} \\
&= \sqrt{\frac{2V_0}{m}} - J\sqrt{\frac{2}{m}}
\end{aligned}$$

On note que cette pulsation tend vers celle des petites oscillations si $J \to 0$.

CHAPITRE 4

Contrôles

4.1 Contrôle Novembre 2013

Questions de cours (3 points)

1. Montrer que deux lagrangiens différant par une dérivée totale d'une fonction par rapport au temps,
$$\mathcal{L}'(q_k, \dot{q}_k, t) = \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{df(q_k)}{dt}$$
décrivent la même dynamique.
2. Rappeler la démonstration du théorème de Noether
$$I(q_k, \dot{q}_k) \quad = \quad \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds}\bigg|_{s=0}$$
où chacune de ces grandeurs est définie dans le cours.

Exercice 1 (3 points)

Considérons une particule qui se déplace dans le plan (OXY). Sachant que l'énergie cinétique $T = T(\dot{x}, \dot{y})$ et que $\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = T - V$, dire quelle est la loi de symétrie à laquelle obéit le lagrangien et quelle grandeur est conservée dans les cas suivants :

1. $V(x, y, t) = ax$;
2. $V(x, y) = at(x^2 + y^2)$;
3. $V(x, y) = a(x - y)$.

Exercice 2 (6 points)

Une particule de masse m et de charge q se dépalce dans une région où règne un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$. La position de la particule est repérée par les coordonnées $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et sa vitesse est donnée par $\vec{v} = (v_1 = \dot{x}_1, v_2 = \dot{x}_2, v_3 = \dot{x}_3,)$. Les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées coincident avec les coordonnées et les composantes de la vitesse de la particule. On rappelle que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(x_i, t) - \frac{\partial \vec{A}(x_i,t)}{\partial t}$ et $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x_i, t)$, $\varphi(x_i, t)$ et $\vec{A}(x_i, t)$ sont respectivement les potentiels scalaire et vectoriel. $\vec{\nabla}$ est l'opérateur différentiel nabla [1].

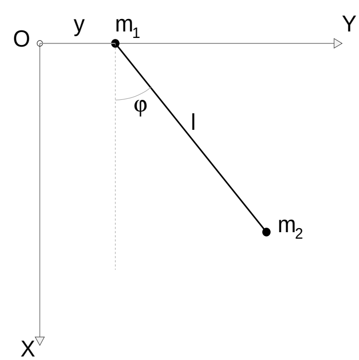
1. Calculer la dérivée totale par rapport au temps de $\vec{A}$, $\frac{d\vec{A}}{dt}$.
2. Montrer que les composantes [2] de la force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, à laquelle la particule est soumise, peuvent se mettre sous la forme

$$F_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial V(x_i, \dot{x}_i, t)}{\partial v_i} - \frac{\partial V x_i, \dot{x}_i, t)}{\partial x_i}$$

   où $V(x_i, \dot{x}_i, t) = q(\varphi(x_i, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_i, t))$.
3. En déduire le lagrangien de la particule $\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t)$. Ecrire les équations du mouvement de la particule.
4. Calculer les moments conjugués (p_x, p_y, p_z).
5. En déduire le hamiltonien $\mathcal{H}(x_i, p_{ix}, t)$ de la particule. Que représente-t-il ? Commenter son expression.

Exercice 3 (8points)

Soit un pendule de longueur l inextensible et de masse m_2 soumis à l'action de son poids. Son point de suspension de masse m_1 est astreint à se déplacer sans frottement le long de l'axe horizontal OY. La position de m_1 est repérée par y. Le mouvement du système (S) ainsi formé par m_1 et m_2 a lieu dans le plan vertical (OXY), voir figure ci-contre.



1. $\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi) = \vec{\nabla}(\varphi)$ et $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$. On rappelle que $\vec{u} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z}) = (\vec{u} \cdot \vec{z})\,\vec{w} - (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{z}$.
2. $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

1. Montrer que (S) a deux degrés de liberté.
   On utilise y et φ comme coordonnées généralisées.
2. Calculer les coordonnées des masses m_1 et de m_2 en fonction de y, φ et l. En déduire leurs vitesses et leurs énergies cinétiques. Calculer l'énergie cinétique de (S).
3. Dénombrer les forces qui s'appliquent sur (S) en précisant celle(s) qui travaille(nt). En déduire l'énergie potentielle de (S).
4. Montrer que le lagrangien de (S) est donné par
$$\mathcal{L}(y,\varphi,\dot{y},\dot{\varphi}) = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{y}^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2 gl\cos\varphi$$
   Calculer les moments conjugués p_y et p_φ.
5. Etablir les équations de Lagrange. Déterminer les intégrales premières du système et préciser leurs lois de symétrie.
6. En utilisant l'une des intégrales premières, exprimer $y = f(\varphi)$ et déduire l'équation de mouvement en φ. Les conditions initiales sont $y(t=0) = 0$, $\dot{y}(t=0) = v_0$, $\dot{\varphi}(t=0) = 0$ et $\varphi(t=0) = \varphi_0$.
7. En se plaçant dans le cadre de l'approximation des faibles oscillations, $\varphi \to 0$, et de celle des oscillations lentes,[3] montrer que l'équation du mouvement en φ s'écrit comme suit
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\frac{m_1+m_2}{m_1}\varphi = 0.$$
   Déterminer la solution $\varphi = \varphi(t)$.
8. Déduire la solution $y = y(t)$.

4.2 Corrigé du contrôle Novembre 2013

Questions de cours(3pts)

1. Montrons que deux lagrangiens différant par une différentielle totale par rapport au temps d'une fonction décrivent la même dynamique, c'est à dire donnent les mêmes équations du mouvement $\boxed{\text{2pts}}$
$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{df(q_i,t)}{dt} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{df}{dt}\right] \quad \textbf{0.5pt}$$
or
$$\frac{d}{dt} = \dot{q}_i\frac{\partial}{\partial q_i} + \ddot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial t} \quad \textbf{0.5pt}$$
$$\Longrightarrow \quad \textbf{0.5pt} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{df}{dt}\right] = \dot{q}_i\frac{\partial^2 f}{\partial^2 q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} \\ \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{df}{dt} = \dot{q}_i\frac{\partial^2 f}{\partial^2 q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t} \end{cases}$$

3. on néglige le terme de l'équation différentielle en $\dot{\varphi}$.

ce qui implique que

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \quad = \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \textbf{0.5pt}$$

et donc les équations de Lagrange restent invariantes.

2. Démonstration du théorème de Noether
Ennoncé Soit un jeu de coordonnées généralisées $\tilde{q}_k(s)$ dépendant continument d'un paramètre s et tel que $\tilde{q}_k(0) = q_k$. Si le lagrangien est invariant par rapport à la transformation $q_k \to \tilde{q}_k$, c'est à dire $L(\tilde{q}_k, \dot{\tilde{q}}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t)$, alors

$$I(q_k, \dot{q}_k) \quad = \quad \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\tilde{q}_k}{ds}\bigg|_{s=0}$$

est une constante du mouvement.
Démonstration L est indépendant de s, implique

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{ds} &= \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_k}\frac{d\tilde{q}_k}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{d\dot{\tilde{q}}_k}{ds} \right) \\
&= \sum_k \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{d\tilde{q}_k}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{d}{dt}\frac{d\tilde{q}_k}{ds} \right) \\
&= \frac{d}{dt}\sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k}\frac{d\tilde{q}_k}{ds} \right) = 0 \qquad \textbf{1.0pt}
\end{aligned}$$

ce qui en évaluant l'expression obtenue en $s = 0$ prouve le théorème.

Exercice 1 (3points)

Nous avons $T = T(\dot{x}, \dot{y})$ et comme $\mathcal{L} = T - V$, alors la dépendance de $\mathcal{L}$ en fonction des coordonnées (x, y) est celle du potentiel. Ainsi

1. $V(x, y, t) = ax$ est indépendant de y et donc $\mathcal{L}$ est indépendant aussi de y ce qui implique que $\mathcal{L}$ est invariant par rapport à toute transformation de y, en particulier la translation selon OY. La loi de symétrie est ainsi la translation selon OY. **0.5pt**
La grandeur conservée est p_y, le moment conjugué de y qui est la composante de la quantité de mouvement selon OY. **0.5pt**
On remarque aussi que le potentiel ne dépend pas explicitement du temps ce qui implique aussi que $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du temps et donc invariant par rapport à une translation dans le temps. La quantité conservée est l'énergie. **0.25pt**

2. $V(x,y) = at(x^2+y^2)$: puisque V dépend de $x^2+y^2 = r^2$ et donc sa valeur ne change pas si l'on effectue une rotation, puisque le module d'un vecteur est invariant par rapport à une rotation. La symétrie concerne ainsi les rotations. **0.5pt**

   La quantité conservée est le moment cinétique, selon le théorème de Noether. **0.5pt**

3. $V(x,y) = a(x-y)$: ce potentiel dépend de la différence entre x et y et donc sa valeur reste la même si l'on fait une translation simultannée selon OX, $x \to x' + \epsilon$ et selon OY, $y \to y' = y + \epsilon$, alors $V(x',y') = a(x'-y') = a(x-y)$ et donc invariant par rapport à une translation selon $\vec{i}+\vec{j}$. **0.25pt**
   La symétrie est donc la translation dans la direction $\vec{i}+\vec{j}$. La grandeur conservée est la quantité de mouvement selon la direction $\vec{i}+\vec{j}$. **0.25pt**
   On remarque aussi que le potentiel ne dépend pas explicitement du temps ce qui implique aussi que $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du temps et donc invariant par rapport à une translation dans le temps. La quantité conservée est l'énergie. **0.25pt**

Exercice 2 (6points)

1. Calculons la dérivée totale par rapport au temps de $\vec{A}(x_k,t)$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{A}(x_k,t)}{dt} &= \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial t} \qquad \textbf{1.0pt} \\
&= \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial x_i}v_i + \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial \vec{x}}\cdot\vec{v} + \frac{\partial \vec{A}(x_k,t)}{\partial t}
\end{aligned}$$

2. Exprimons les composantes de $\vec{F}$

$$\begin{aligned}
\frac{F_i}{q} &= E_i + (\vec{v} \wedge \vec{B})_i \\
&= -\nabla_i(\varphi(x_k,t)) - \frac{\partial A_i(x_k,t)}{\partial t} + \left[\vec{v} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x_k,t)\right)\right]_i \\
&= -\nabla_i(\varphi(x_k,t)) - \frac{\partial A_i(x_k,t)}{\partial t} + \left[\nabla_i \left(\vec{v} \cdot \vec{A}(x_k,t)\right) - \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) A_i(x_k,t)\right] \\
&= -\nabla_i(\varphi(x_k,t)) + \nabla_i \left(\vec{v} \cdot \vec{A}(x_k,t)\right) - \frac{dA_i(x_k,t)}{dt} \\
&= -\nabla_i \left(\varphi(x_k,t)) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_k,t)\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\varphi(x_k,t)) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_k,t)\right) \\
&= -\nabla_i V(x_k,t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_i} V(x_k,t) \qquad \textbf{2.0pts}
\end{aligned}$$

qui est la relation recherchée.

3. L'énergie cinétique de la particule est $T = \frac{1}{2}mv^2$, ce qui donne pour le lagrangien

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x_k, \dot{x}_k) &= T(\dot{x}_k) - V(x_k, \dot{x}_k, t) \\
&= \frac{1}{2}mv^2 - q\left(\varphi(x_k,t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_k,t)\right). \qquad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont données par les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(mv_i) + q\frac{d}{dt}A_i(x_k,t) = -q\left(\nabla_i \varphi(x_k,t) - \vec{v} \cdot \nabla_i \vec{A}(x_k,t)\right)$$

en remplaçant $d\vec{A}(x_k,t)/dt$ par son expression, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(mv_i) &= -q\vec{v} \cdot \vec{\nabla}(A_i(x_k,t)) - q\frac{\partial A_i(x_k,t)}{\partial t} - q\left(\nabla_i \varphi(x_k,t) - \vec{v} \cdot \nabla_i \vec{A}(x_k,t)\right) \\
&= -q\left(\nabla_i \varphi(x_k,t) + \frac{\partial A_i(x_k,t)}{\partial t}\right) + q\left(\nabla_i(\vec{A}(x_k,t)) \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(A_i(x_k,t))\right) \\
&= qE_i + q\left[\vec{v} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x_k,t)\right)\right]_i \\
&= F_i \qquad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

et dont la forme vectorielle est

$$m\ddot{\vec{x}} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) = \vec{F}$$

4. Les moments conjugués sont

$$
\begin{aligned}
p_{x_1} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 + aA_1(x_k,t) \quad \textbf{0.25pt} \\
p_{x_2} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 + aA_2(x_k,t) \quad \textbf{0.25pt} \\
p_{x_3} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} = m\dot{x}_3 + aA_3(x_k,t) \quad \textbf{0.25pt}.
\end{aligned}
$$

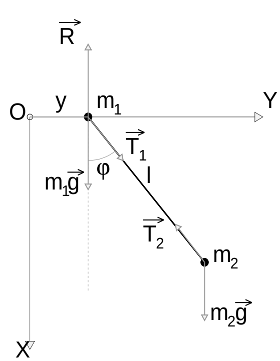
5. Le hamiltonien est donné par

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(x_k, p_{x_k}, t) &= \sum_{i=1}^{3} p_{x_i}\dot{x}_i - \mathcal{L}(x_k, \dot{x}_k, t) \\
&= \sum_{i=1}^{3} (m\dot{x}_i + aA_i(x_k,t))\dot{x}_i - \frac{1}{2}mv^2 + q\left(\varphi(x_k,t) - \vec{v}\cdot\vec{A}(x_k,t)\right) \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi(x_k,t). \quad \textbf{0.75pt}
\end{aligned}
$$

Il représente l'énergie de la particule **0.25pt**.
On constate que le champ magnétique ne contribue pas à l'énergie ce qui est attendu puisque la force exercée sur la particule par le champ magnétique, $\vec{v}\wedge\vec{B}$, ne travaille pas et donc ne contribue pas à l'énergie :
$\left(\vec{v}\wedge\vec{B}\right)\cdot\vec{dl} = \left(\vec{dl}\wedge\vec{v}\right)\cdot\vec{B} = \vec{0}\cdot\vec{B} = 0$ **0.25pt**.

Exercice 3 (8points)

Soit un pendule de longueur l inextensible et de masse m_2 soumis à l'action de son poids. Son point de suspension de masse m_1 est astreint à se déplacer sans frottement le long de l'axe horizontal OY., voir figure ci-dessous.



1. Le système est formé par deux masses et le mouvement est plan, ce qui donne 2 coordonnées par masse. Or la masse m_1 est astreinte à se déplacer par l'axe OY et la distance entre m_1 et m_2 est égale à la longueur du fil ce qui donne deux contraintes. Quatre coordonnées et deux contraintes donc deux degrés de liberté. **0.5pt**
2. Calculons les coordonnées de m_1 (x_1, y_1) :

$$\textbf{0.25pt}\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0 \\ y_1 & = & y \end{array}\right. \Longrightarrow \quad \textbf{0.25pt}\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & 0 \\ \dot{y}_1 & = & \dot{y} \end{array}\right.$$

ce qui donne pour les composantes de la vitesse de m_1 $(0, \dot{y})$.
On procède de la même manière pour la masse m_2

$$\textbf{0.25pt}\left\{\begin{array}{lcl} x_2 & = & l\cos\varphi \\ y_2 & = & y + l\sin\varphi \end{array}\right. \Longrightarrow \quad \textbf{0.25pt}\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_2 & = & -l\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y}_2 & = & \dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi \end{array}\right.$$

ce qui donne pour les composantes de la vitesse de m_1 $(-l\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi)$.
Ainsi l'énergie cinétique de m_1 est égale à $T_1 = 1/2 m_1 \dot{y}^2$ et celle de m_2 est

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{y}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique de (S)

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi\right). \quad \textbf{0.25pt}$$

3. Les forces qui sont appliquées à (S), voir figure ci-dessus,
   — $\vec{R}$ et $m_2\vec{g}$ qui sont appliquées à m_1. Elles ne travaillent pas puisqu'elles sont perpendiculaires au déplacement de m_2. **0.25pt**
   $\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$ sont des contraintes internes à (S) et donc ne contribuent pas au potentiel. **0.25pt**
   — $m_2\vec{g}$ appliquées à m_2 et dont le travail élémentaire pour un déplacement infinétisimal $\overrightarrow{dl_2}$

$$\begin{array}{rcl} \delta W(m_2\vec{g}) & = & m_2\vec{g} \cdot \overrightarrow{dl_2} = -m_2 g l \sin\varphi \; d\varphi \\ \Longrightarrow dV & = & -\delta W = m_2 g \sin\varphi \; d\varphi \Longrightarrow V = -m_2 g\cos\varphi + K \end{array} \quad \textbf{0.75pt}$$

la constante $K = 0$.

4. Le lagrangien de (S) est égale à

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y,\varphi,\dot{y},\dot{\varphi}) &= T-V\\ &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}^2+\frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2+2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)+m_2gl\cos\varphi. \quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

Les moments conjugués sont donnés par

$$\begin{aligned}p_y &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}=(m_1+m_2)\dot{y}+m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi \quad \textbf{0.25pt}\\ p_\varphi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=m_2l^2\dot{\varphi}+m_2l\dot{y}\cos\varphi. \quad \textbf{0.25pt}\end{aligned}$$

5. Les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\Longrightarrow(m_1+m_2)\ddot{y}+m_2l(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi)=0 \quad \textbf{0.25pt}\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\Longrightarrow m_2l^2\ddot{\varphi}+m_2l(\ddot{y}\cos\varphi-\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi)=-m_2l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi-m_2gl\sin\varphi \quad \textbf{0.25pt}\end{aligned}$$

cette dernière équation se réduisant à $l\ddot{\varphi}+\ddot{y}\cos\varphi+g\sin\varphi=0$.
Comme $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du temps, l'énergie mécanique est une intégrale première associée à l'invariance par translation dans le temps **0.25pt**.
De même, y est une variable cyclique, ce qui implique que p_y est conservée et la loi de symétrie est la translation selon OY. **0.25pt**

6. p_y est une intégrale première, alors

$$\begin{aligned}p_y=K &\Longrightarrow \dot{y}+\frac{m_2l}{m_1+m_2}\dot{\varphi}\cos\varphi=\frac{K}{m_1+m_2}\\ &\Longrightarrow dy=-\frac{m_2l}{m_1+m_2}\cos\varphi d\varphi+\frac{K}{m_1+m_2}dt\\ &\Longrightarrow y=-\frac{m_2l}{m_1+m_2}\sin\varphi+\frac{K}{m_1+m_2}t+K_1 \quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

et les deux constantes sont déterminées à partir des conditions initiales

$$\begin{aligned}y_0=0 &\Longrightarrow K_1=\frac{m_2l}{m_1+m_2}\sin\varphi_0\\ \dot{y}(0)=v_0 &\Longrightarrow K=(m_1+m_2)v_0\end{aligned}$$

ce qui donne

$$y = v_0t-\frac{m_2l}{m_1+m_2}\left(\sin\varphi-\sin\varphi_0\right). \quad \textbf{0.5pt}$$

7. On reprend l'équation

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{y}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$$

et on substitue $\ddot{y}$ par $-(m_2 l/[m_1+m_2])(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)$ et on obtient

$$\ddot{\varphi}\left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\cos^2\varphi\right) + \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

ce qui donne le cadre de l'approximation des petites oscillations, $\sin\varphi \simeq \varphi$ et $\cos\varphi \simeq 1$, et les oscillations lentes :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\frac{m_1+m_2}{m_1}\varphi \quad = \quad 0 \quad \textbf{1.0pt}$$

et qui est l'équation recherchée.
C'est une équation différentielle du second ordre sans second membre à coefficients constants et dont l'équation caractéristique est $r^2 + \frac{g}{l}\frac{m_1+m_2}{m_1} = 0$ qui a deux solutions complexes $r = \pm i\omega_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{g(m_1+m_2)/lm_1}$ et donc la solution est

$$\varphi(t) \quad = \quad A_1 e^{-i\omega_0 t} + A_1 e^{i\omega_0 t} = A\sin(\omega_0 t - \beta_0)$$

avec $A\sin\beta_0 = \varphi_0$ et $0 = A\omega_0\cos(\beta_0) \Longrightarrow \beta_0 = \pi/2$ et donc $A = \varphi_0$

la solution est alors $\varphi(t) = \varphi_0\sin(\omega_0 t + \pi/2) = \varphi_0\cos\omega_0 t$ **0.25pt**.

8. La solution de y est alors, en tenant compte de $\sin\varphi \simeq \varphi$

$$y \quad = \quad v_0 t - \frac{m_2 l\varphi_0}{m_1+m_2}(\cos\omega_0 t - 1)\,. \quad \textbf{0.75pt}$$

4.3 Contrôle Janvier 2014

Questions de cours (6 points)

1. Ennoncer le principe de Maupertuis et montrer que l'action réduite d'un système conservatif peut être exprimée comme suit

$$\mathcal{S}_0(q;P) \quad = \quad \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sqrt{2(E - V(q)}ds$$

où ds est l'élement de distance dans l'espace des configurations décrit par les coordonnées généralisées $\vec{q} = (q_1, \cdots, q_n)$, n étant le nombre de degrés de libérté.

2. Rappeler ce que c'est que la surface d'action. Montrer qu'elle se propopage dans l'espace des configurations avec la vitesse de phase

$$v_\varphi \quad = \quad \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}.$$

3. En utilisant la dualité entre la surface d'action dans l'espace des configurations et la phase de l'onde dans l'espace des positions, montrer que l'énergie mécanique de la particule est proportionnelle à sa fréquence $E = h\nu$ et que son impulsion l'est au module du vecteur d'onde $p = \hbar k$.
4. En partant de l'équation de propagation des ondes

$$\left(\Delta - \frac{1}{v_\varphi^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(x,t) = 0$$

établir l'équation de Schrodinger pour un système conservatif donnée par

$$H\Psi(x,t) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\Psi(x,t) = E\Psi(x,t).$$

Exercice 1 (4 points)

On considère la transformation

$$\begin{aligned} Q &= p^\alpha q^\beta \\ P &= p^\gamma q^\delta \end{aligned}$$

telles que $q > 0$ et $p > 0$.

1. Quelles conditions doivent vérifier α, β, δ et γ pour que la tranformation soit canonique ?
2. Etablir la fonction génératrice de type deux $G_2(q, P)$ qui engendre cette transformation.

Exercice 2 : Potentiel conique (10 points)

Considérons une particule de masse m astreinte à se déplacer sur un plan. La position de la particule est repérée dans le référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$, considéré galiléen, par les coordonnées (x, y). Le potentiel auquel la particule est soumise est de la forme $V(r) = ar$, avec $r^2 = x^2 + y^2$ et a une constante positive. On utilise les coordonnées polaires (r, θ) comme coordonnées généralisées.

1. Montrer que la force qui dérive de ce potentiel est centrale. En déduire que le moment cinétique L_z par rapport à O est conservé.
2. Calculer le lagrangien $\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$. En déduire les moments conjugués p_r et p_θ.
3. Etablir le hamiltonien $\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta)$ de la particule et trouver les intégrales premières.
4. Exprimer le hamiltonien sous la forme

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \widetilde{V}(r).$$

5. Montrer qu'un mouvement circulaire stable est possible. En déduire le rayon r_0 de la trajectoire.

6. On perturbe maintenant ce mouvement par des petites oscillations radiales $r = r_0 + \delta r$ autour de r_0. Montrer que l'équation des petites oscillations est donnée par

$$m\delta\ddot{r} + 3a\left(\frac{ma}{L_z^2}\right)^{1/3}\delta r = 0.$$

En déduire leur fréquence.

7. Soit $\mathcal{S}(r,\theta,t;P_r,P_\theta)$ l'action hamiltonienne. Par séparation des variables, on a $\mathcal{S}(r,\theta,t;P_r,P_\theta) = \mathcal{S}_\theta(\theta;P_\theta) + \mathcal{S}_r(r;P_r) - Et$.
   — Montrer que $\mathcal{S}_\theta(\theta;P_\theta) = \mathrm{C}\theta$, où C est une constante.
   — A partir de l'équation de Hamilton-Jacobi, expliciter l'équation vérifiée par $\mathcal{S}_r(r;P_r)$.
   — En déduire que

$$\mathcal{S}(r,\theta,t;P_r,P_\theta) = \int\sqrt{2m\left(E-ar\right)-\frac{C^2}{r^2}}dr + \mathrm{C}\theta - Et.$$

8. On représente le portrait de phase séparément dans les plans (r,p_r) et (θ,p_θ). Sur ces deux plans représenter le mouvement circulaire de la question (5.). Que devient le portrait dans le plan (r,p_r) si l'on admet les petites oscillations radiales de la quesion (6.) ?

4.4 Corrigé du contrôle Janvier 2015

QUESTIONS DE COURS[4] (6 points)

$\boxed{1.5\text{pt}}$

1. **Principe de Maupertuis** La trajectoire d'un système conservatif est déterminée par l'extrémisation de l'action réduite $\mathcal{S}_0$. **0.25pt**

   Reprenons l'expression de la loi de Maupertuis et éliminons les moment conjugués. Sachant que pour un système conservatif, $V = V(q)$ et que l'énergie cinétique, est une fonction homogène d'ordre 2 de $\dot{q}_k$, $T = 1/2\sum_{i,j} m_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$ alors

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{ij} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{ij} m_{ij}\left[\delta_{ik}\dot{q}_j + \dot{q}_i\delta_{jk}\right] \\ &= \sum_i m_{ki}\dot{q}_i \qquad \boxed{0.5\text{pt}} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_i \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} p_i dq_i &= \sum_{ij} \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} m_{ij}\dot{q}_j dq_i = \frac{1}{dt}\sum_{ij}\int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} m_{ij} dq_j dq_i \\ &= \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \frac{ds}{dt} ds \\ &= \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sqrt{2\,(E-V)}ds \quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

L'action réduite d'un système conservatif peut être exprimée en fonction des coordonnées généralisées comme suit

$$\mathcal{S}_0(q;P) = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sqrt{2\,(E-V(q))}ds \quad \textbf{0.25pt}$$

2. L'état mécanique de la particule est décrit par son action $\mathcal{S}(q,t;P)$ qui s'exprime en fonction de l'action réduite, puisque le système est conservatif, par $\boxed{1.5\text{pt}}$

$$\mathcal{S}(q,t;P) \;=\; \mathcal{S}_0(q;P) - Et.$$

Considérons les lieux de l'espace où l'action $\mathcal{S}(q,t;P)$ à l'instant t est constante ; $\mathcal{S}(q,t;P) = \text{Cte}$. Ainsi $\mathcal{S}(q,t=0;P) = \mathcal{S}_0(q,P)$. Cherchons $\mathcal{S}(q',t+dt;P)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(q',t+dt;P) &= \mathcal{S}_0(q';P) - E(t+dt) \\ &= \mathcal{S}_0(q+dq;P) - Et - Edt \\ &= \mathcal{S}_0(q;P) + d\mathcal{S}_0 - Et - Edt \\ &= \mathcal{S}(q,t;P) + d\mathcal{S}_0 - Edt \quad \textbf{0.75pt}\end{aligned}$$

comme la surface considérée de l'action est constante et a la même valeur et $d\mathcal{S}_0 = \sqrt{2(E-V)}ds = \sqrt{2(E-V)}\sqrt{m}dq$, alors

$$\sqrt{2m(E-V)}dq - Edt \;=\; 0 \Longrightarrow v_\varphi = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} \quad \textbf{0.75pt}$$

La surface d'action se propage dans l'espace des configurations avec la vitesse $v_\varphi = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}$

L'action joue dans l'espace dual, l'espace des configurations, ce que joue la phase dans l'espace des positions,

3. Partant de la dualité entre la surface d'action dans l'espace des configurations et la phase de l'onde dans l'espace des positions, nous avons $\boxed{1.5\text{pt}}$

$$\varphi(\vec{r},t) \;=\; \left(\vec{k}\cdot\vec{r} - 2\pi\nu t\right) = 2\pi\left(\frac{L(r)}{\lambda_0} - \nu t\right) \Longleftrightarrow \mathcal{S}(q,t;P) = \mathcal{S}_0(q;P) - Et \quad \textbf{0.5}$$

où $L(r) = nr$ est le chemin optique et n l'indice de réfraction du milieu, λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.
En comparant terme à terme, on peut déduire que l'énergie mécanique est proportionnelle à la fréquence

$$E = h\nu \quad \mathbf{0.5}$$

et le coefficient de proportionalité h est la constante de Planck. Partant de cette relation, on peut déduire la relation entre l'impulsion de la particule au vecteur d'onde comme suit

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v_\varphi} \\ &= \frac{2\pi\nu m v}{E} = \frac{2\pi}{h}p \Longrightarrow p = \hbar k \quad \mathbf{0.5pt} \end{aligned}$$

1.5pt

4. En partant de l'équation de propagation des ondes électromagnétiques,

$$\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi = 0$$

déduite des équations de Maxwell, et stipulant l'universalité de cette équation, trouvons l'équation décrivant l'évolution de la particule si elle est décrite par une onde Ψ. En effet, sachant que la dépendance temporelle de ϕ est toujours de la forme $e^{-i\omega t}$, même dans le cas d'un espace inhomogène, l'équation précédente devient

$$\left(\Delta + \frac{n^2\omega^2}{c^2}\right)\Psi = 0. \quad \mathbf{0.25pt}$$

En utilisant les relations déduites de la dualité entre l'espace des configurations et l'espace des positions,

$$\frac{n^2\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v_\varphi^2} = \frac{4\pi^2\nu^2 m^2 v^2}{E^2} = \frac{p^2}{\hbar^2} \quad \mathbf{0.5pt}$$

nous avons utilisé les relations démontrées dans le paragraphe précédent $vv_\varphi = E/m$ et $E = h\nu$. Aussi, nous obtenons,

$$\left(\Delta + \frac{p^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0.$$

On peut déjà souligner qu'à partir de cette dernière relation, étant donné que l'équation est valable $\forall\ \Psi \Longrightarrow p^2 = -\hbar^2\Delta = -\hbar^2\nabla^2 = (i\hbar\nabla)^2$ qui n'est d'autre

que le principe de correspondance $\vec{p} \longrightarrow i\hbar\vec{\nabla}$.
Continuons notre quête de l'équation de Ψ. Or nous avons

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V \Longrightarrow p^2 = 2m\,(H - V) \qquad \textbf{0.25pt}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\left[\Delta + \frac{1}{\hbar^2}\left(2m(H-V)\right)\right]\Psi &= 0 \\
\Longrightarrow \left[\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + (H-V)\right]\Psi &= 0 \\
\Longrightarrow H\Psi &= \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\Psi
\end{aligned}$$

qui n'est d'autre que l'équation de Schrodinger. Si le système est conservatif alors, $H = E$ et l'équation devient

$$H\Psi = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\Psi = E\Psi. \qquad \textbf{0.5pt}$$

Exercice 1 (4 points)

On considère la transformation

$$\begin{aligned}
Q &= p^\alpha q^\beta \\
P &= p^\gamma q^\delta
\end{aligned}$$

telles que $q > 0$ et $p > 0$.

1. Pour que la transformation soit canonique il suffit que les nouvelles variables verifient les relations des crochets de Poisson **0.25pt**, $\{Q,Q\} = \{P,P\} = 0$ et $\{Q,P\} = 1$. Aussi, $\boxed{2pt}$

$$\begin{aligned}
\{Q,P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \\
&= \beta p^\alpha p^{\beta-1}\gamma p^{\gamma-1}q^\delta - \alpha\, p^{\alpha-1}q^\beta\delta p^\gamma q^{\delta-1} \\
&= (\beta\gamma - \alpha\delta)\, p^{\alpha+\gamma-1}q^{\beta+\delta-1} \qquad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

et

$$\{Q,P\} = 1 \Longrightarrow \left\{\begin{aligned}
\gamma &= 1-\alpha \\
\delta &= 1-\beta \\
\beta\gamma - \alpha\delta &= 1
\end{aligned}\right. \qquad \textbf{0.5pt}$$

et en substituant les deux premières équations dans la troisième équation, on obtient

$$
\begin{aligned}
\beta\,(1-\alpha)-\alpha\,(1-\beta) &= 1 \Longrightarrow \beta-\alpha=1 \\
\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \gamma &=& 1-\alpha \\ \delta &=& -\alpha \\ \beta &=& 1+\alpha \end{array} \right. & \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}
$$

ce qui donne finalement comme transformation

$$
\begin{aligned}
Q &= p^{\alpha} q^{1+\alpha} \\
P &= p^{1-\alpha} q^{-\alpha}. \quad \textbf{0.25}
\end{aligned}
$$

2pt

2. On cherche la fonction génératrice de type deux associée à cette transformation. Aussi, on a

$$
G_2 = G_2(q,P) \text{ et } p = \frac{\partial G_2(q,P)}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial G_2(q,P)}{\partial P} \quad \textbf{0.25pt}
$$

or en utilisant les relations de la question précédente, on a

$$
Q \;=\; p^{\alpha} q^{1+\alpha} = P^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} q^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{\partial G_2(q,P)}{\partial P} \Longrightarrow G_2(q,P) = (1-\alpha)\,(Pq)^{\frac{1}{1-\alpha}} + f(q) \quad \textbf{0.75pt}
$$

et

$$
p \;=\; \frac{\partial G_2}{\partial q} = (Pq^{\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}} = (Pq^{\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}} + f'(q) \Longrightarrow f'(q) = 0 \quad \textbf{0.75pt}
$$

et donc

$$
G_2(q,P) \;=\; (1-\alpha)(Pq)^{\frac{1}{1-\alpha}} + C \quad \textbf{0.25pt}
$$

Exercice 2 : Potentiel conique (10 points)

Considérons une particule de masse m astreinte à se déplacer sur un plan. La position de la particule est repérée dans le référentiel $\mathcal{R}(O,xyz)$, considéré galiléen, par les coordonnées (x,y). Le potentiel auquel la particule est soumise est de la forme $V(r) = ar$, avec $r^2 = x^2 + y^2$ et a une constante positive. On utilise les coordonnées polaires (r,θ) comme coordonnées généralisées.

1pt

1. Connaissant le potentiel $V(r)$ dont dérive la force et en écrivant le gradient en coordonnées cylindrique[5] $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$, on a

5. On peut utiliser aussi les coordonnées cartésiennes

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(V(r)) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\vec{e}_r = -a\vec{e}_r \quad \textbf{0.25pt}$$

sachant que les autres termes sont nuls puisque le potentiel est radial. Or $\vec{r} = r\vec{e}_r \Longrightarrow \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ ce qui implique

$$\vec{F} = -a\frac{\vec{r}}{r} \quad \textbf{0.25pt}$$

ce qui veut dire que la direction de la force passe tout le temps par l'origine O et donc $\vec{F}$ est centrale.
Le théorème du moment cinétique nous donne

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge -a\frac{\vec{r}}{r} = \vec{0} \quad \textbf{0.25pt}$$

ce qui implique que le moment cinétique est conservé. Or $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{r} \wedge m\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\theta\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$ et donc $\vec{L} = L_z\vec{k}$ est conservé (en module, en direction et en sens). **0.25pt**

2. L'énergie cinétique est donnée par $T = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$ et l'énergie potentielle est $V(r)$, ce qui donne pour le lagrangien de la particule

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - ar.$$

Calculons les moments conjugués

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \text{ et } p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

3. Le hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H}(r,\theta,p_r,p_\theta) = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + ar.$$

On remarque que le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, ce qui implique que l'énergie mécanique est conservée et donc une intégrale première. De même, la coordonnée généralisée θ est cyclique ce qui implique que p_θ est conservé et donc une intégrale première aussi. On en conclue que $\mathcal{H}$ et p_θ sont des intégrales premières.

4. De l'expression précédente on en déduit que

$$\mathcal{H}(r,\theta,p_r,p_\theta) = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \widetilde{V}(r) \text{ avec } \widetilde{V}(r) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + ar.$$

5. Pour démontrer qu'un mouvement circulaire stable est possible, il suffit de montrer que $r = r_0$ est une solution de l'équation du mouvement et que le potentiel effectif $\widetilde{V}(r)$ est minimal en r_0. En effet, L'équation du mouvement est

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} & \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - a \\ \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} & \dot{p}_\theta = 0 \end{cases}$$

ce qui donne pour l'équation du mouvement

$$\dot{p}_r = m\ddot{r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - a \Longrightarrow \ddot{r} - \frac{p_\theta^2}{m^2 r^3} + \frac{a}{m} = 0$$

ainsi l'équation du mouvement circulaire $r = r_0$ est une solution avec

$$\frac{p_\theta^2}{mr_0^3} = a \Longrightarrow r_0 = \left(\frac{p_\theta^2}{am}\right)^{1/3}.$$

Donc $r = r_0 = \left(\frac{p_\theta^2}{am}\right)^{1/3}$ est une solution de l'équation du mouvement. Vérifions sa stabilité. En effet,

$$\frac{d\widetilde{V}(r)}{dr} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + a = 0 \Longrightarrow r = r_0$$

et comme

$$\frac{d^2\widetilde{V}(r)}{dr^2} = 3\frac{p_\theta^2}{mr^4} > 0 \forall r \Longrightarrow V(r_0) \text{ est minimum.}$$

Ce qui est le résultat recherché.

6. Reprenons l'équation du mouvement avec $r = r_0 + \delta r \Longrightarrow \dot{r} = \delta\dot{r}$ et $\ddot{r} = \delta\ddot{r}$. Nous avons aussi $p_\theta = mr^2\dot{\theta} = L_z$ ce qui donne

$$m\delta\ddot{r} - \frac{L_z^2}{m}\frac{1}{r_0^3\left(1 + \frac{\delta r}{r_0}\right)^3} + a = 0$$

en utilisant le fait que $\frac{\delta r}{r_0} \to 0$ alors $\frac{1}{\left(1+\frac{\delta r}{r_0}\right)^3} \simeq 1 - 3\frac{\delta r}{r_0}$, on obtient

$$m\delta\ddot{r} - \frac{L_z^2}{mr_0^3} + 3\frac{L_z^2}{mr_0^4}\delta r + a = 0$$

or $\frac{L_z^2}{mr_0^3} = a$ ce qui donne finalement l'équation

$$m\delta\ddot{r} + 3a\left(\frac{ma}{L_z^2}\right)^{1/3}\delta r = 0$$

qui est une équation différentielle d'ordre 2 sans second membre à coefficients constants dont le descriminant de l'équation caratéristique est négatif. La solution donc sont des oscillations autour de r_0 avec une pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{3a\left(\frac{ma}{L_z^2}\right)^{1/3}}$ et donc de fréquence

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{L_z^2}{27ma^4}\right)^{1/6}$$

7. Soit $\mathcal{S}(r,\theta,t;P_r,P_\theta)$ l'action hamiltonienne. Par séparation des variables, on a $\mathcal{S}(r,\theta,t;P_r,P_\theta) = \mathcal{S}_\theta(\theta;P_\theta) + \mathcal{S}_r(r;P_r) - Et$.
   — On sait que l'action hamiltonienne vérifie

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} = C \Longrightarrow S_\theta = C\theta.$$

   — On rappelle que l'équation de Hamilton-jacobi est

$$\mathcal{H}(r,\theta,\frac{\partial S}{\partial r},\frac{\partial S}{\partial \theta}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

   ce qui donne

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + ar = E$$

   et en séparant les variables sachant que $S_\theta = C\theta$, on obtient

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{C^2}{2mr^2} + ar = E \Longrightarrow \frac{\partial S_r}{\partial r} \quad = \quad \pm\left(2m\left(E-ar\right) - \frac{C^2}{r^2}\right)^{1/2}.$$

   — On intègre d'abord l'équation précédente et on obtient

$$S_r(r;P_r) \quad = \quad \pm\int\left(2m\left(E-ar\right) - \frac{C^2}{r^2}\right)^{1/2} dr$$

   ce qui donne pour l'action hamiltonienne

$$S(r,\theta,t;P_r,P_\theta) \quad = \quad \pm\int\left(2m\left(E-ar\right) - \frac{C^2}{r^2}\right)^{1/2} dr + C\theta - Et.$$

8. Le mouvement circulaire de la question 5 a pour équations $r = r_0$ et $p_\theta = L_z =$ Constante, ce qui donne respectivement comme portrait de phase :
   — dans le plan (r, p_r), comme $\dot{r} = 0 = p_r$, alors le portrait de phase est un point de coordonnées $(r_0, 0)$.
   — dans le plan (θ, p_θ) l'équation est $p_\theta = C$ et donc le portrait est une droite horizontale, parallèle à l'axe des θ, qui passe par $p_\theta = C$.

Si Les petites oscillations radiales sont permises, alors $r = r_0 + a\cos(\omega t - \varphi)$ ce qui donne $\dot{r} = -a\omega\sin(\omega t - \varphi) = p_r/m$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{p_r^2}{m^2} &= a^2\omega^2\sin^2(\omega t - \varphi) \\
&= a^2\omega^2\left(1 - \cos^2(\omega t - \varphi)\right) \\
&= a^2\omega^2\left(1 - \frac{(r - r_0)^2}{a^2}\right) \Longrightarrow \frac{p_r^2}{\frac{a^2\omega^2}{m^2}} + \frac{(r - r_0)^2}{a^2} = 1
\end{aligned}$$

qui est l'équation d'une ellipse de centre $(r_0, 0)$ et de demi axes respectivement selon les directions de r et de p_r sont a et $a\omega/m$.

4.5 Contrôle de Rattrapage Janvier 2014

Exercice 1 (6 points)

Un explorateur apperçoit dans le desert une oasis à un angle $\text{arctg}(\frac{5}{12})$ au dessus de l'horizontale. On se propose de déterminer la distance qui le sépare de l'oasis.
Le principe de Fermat stipule que la lumière suit un chemin minimisant le temps du trajet que l'on peut exprimer comme suit

$$\mathcal{S} = \int n(s)ds$$

où $\mathcal{S}$ est la fonctionnelle à minimiser, $n(s)$ est l'indice de réfraction du milieu et s est la distance du trajet avec $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$. Dans les conditions de grande chaleur du désert, l'indice de réfraction dépend linéairement de z comme suit $n(z) = n_0(1 - \lambda z)$.

1. Expliciter la fonctionnelle à minimiser et trouver le "lagrangien associé". En déduire le "hamiltonien associé" et montrer qu'il est conservé.

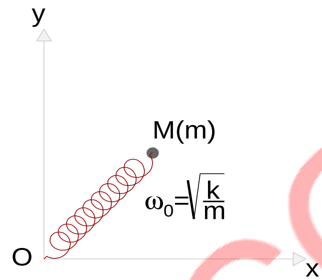
2. Etablir l'équation de la trajectoire $z = z(x)$. [6]

3. Calculer la distance qui sépare l'explorateur de l'oasis.
   On néglige le rayon de courbure de la terre.

Exercice 2 (14 points)

6. On donne $\text{Argch'}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, et $\text{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Considérons un oscillateur harmonique de masse m et de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et ce en deux dimensions, figure ci-contre. Le référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$ est supposé galiléen. On utilise dans l'exercice les coordonnées cartésiennes.



1. Calculer la vitesse de M, $\vec{V}(M/\mathcal{R})$. En déduire son énergie cinétique T.
2. M est soumis à la seule action de la force de rappel $\vec{F} = -k(|\overrightarrow{OM}| - L_0)\vec{u}$ avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}$, L_0 étant l'allongement au repos du ressort que l'on prend nul par simplification, $L_0 = 0$. Calculer l'énergie potentielle $V(x, y)$.
3. Ecrire le lagrangien $\mathcal{L}$ de l'oscillateur harmonique et déduire les moments conjugués p_x et p_y.
4. Montrer que $\mathcal{L}$ est invariant par rotation. En utilisant le théorème de Noether, déduire la grandeur conservée. On rappelle que lors d'une transformation associée à une rotation d'un angle s dans le plan (Oxy), on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   Considérer une transformation infinitésimale, $s \to 0$, et utiliser les accroissements δx et δy.
5. Montrer que le hamiltonien de l'oscillateur harmonique est donné par

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) \quad = \quad \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 (x^2 + y^2).$$

   Montrer qu'il est conservé.
   On pose $E = E_x + E_y$, E étant l'énergie de l'oscillateur harmonique, $E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$ et $E_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2$.
6. Considérons la transformation

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} x & = & X\cos\alpha + \frac{P_y}{m\omega_0}\sin\alpha & \quad & y & = & Y\cos\alpha + \frac{P_x}{m\omega_0}\sin\alpha \\ p_x & = & -m\omega_0 Y\sin\alpha + P_x\cos\alpha & \quad & p_y & = & -m\omega_0 Y\sin\alpha + P_y\cos\alpha \end{array} \right.$$

6-a) Montrer que la transformation est canonique.

6-b) Ecrire le nouvel hamiltonien $\mathcal{H}(X, Y, P_X, P_Y)$.

7. On se propose de résoudre le problème en utilisant l'équation de Hamilton-Jacobi (HJ). On note par Q_1, Q_2, P_1 et P_2 les nouvelles variables.

7-a) Ecrire l'équation de HJ. En déduire que l'on peut séparer les variables $S(x, y; t, P_1, P_2) = S_x(x; P_1) + S_y(y; P_2) - Et$, $S(x, y; P_1, P_2)$ étant l'action hamiltonienne.

7-b) Expliciter les équations vérifiées respectivement par $S_x(x; P_1)$ et $S_y(y; P_2)$. En déduire que

$$S(x, y; t, P_1, P_2) \quad = \quad \pm \int \sqrt{2mE_x - m^2\omega_0^2 x^2}dx \pm \int \sqrt{2pE_y - m^2\omega_0^2 y^2}dy - Et.$$

7-c) Rappeler pourquoi Q_1, Q_2, P_1 et P_2 sont conservées. On pose $P_1 = E$ et $P_2 = E_y = E - E_x$. Etablir les expressions de p_x, p_y, Q_1 et Q_2.

7-d) En utilisant les conditions initiales suivantes

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$$

établir les trajectoires dans les nouvelles et les anciennes coordonnées, Q_1, Q_2, $x(t)$ et $y(t)$.

4.6 Corrigé du rattrapage Janvier 2014

<u>Exercice 1</u>

Un explorateur apperçoit dans le desert une oasis à un angle $\mathrm{arctg}(\frac{5}{12})$ au dessus de l'horizontale. On se propose de déterminer la distance qui le sépare de l'oasis.

1. Explicitons l'expression de la fonctionnelle

$$\mathcal{S} \quad = \quad \int n_0(s)(1 - \lambda z)\sqrt{dx^2 + dz^2} = \int n_0(s)(1 - \lambda z)\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}dx$$

ce qui donne pour le lagrangien associé, étant donné que $\mathcal{S} = \int \mathcal{L}dx$, l'expression

$$\mathcal{L}(z, z' = \frac{dz}{dx}; x) \quad = \quad n_0(s)(1 - \lambda z)\sqrt{1 + (z')^2}$$

où x joue le rôle du temps.
Le moment conjugué est donné par

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} = n_0(s)(1 - \lambda z)\frac{z'}{\sqrt{1 + (z')^2}}.$$

Le hamiltonien est donné ainsi par

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = z'p_z - \mathcal{L} &= n_0(s)(1-\lambda z)\left(\frac{z'^2}{\sqrt{1+(z')^2}} - \sqrt{1+(z')^2}\right)\\ &= n_0(s)(1-\lambda z)\frac{1}{\sqrt{1+(z')^2}}.\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{H}$ ne dépend pas explicitement de x, il est conservé $\mathcal{H} = C_0$.

2. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = C_0 \Longrightarrow n_0(s)(1-\lambda z)\frac{1}{\sqrt{1+(z')^2}} &= C_0\\ \Longrightarrow C_0^2(1+(z')^2) &= n_0^2(s)(1-\lambda z)^2\\ \Longrightarrow z' &= \sqrt{\frac{n_0^2}{C_0^2}(1-\lambda z)^2 - 1}\\ \Longrightarrow \frac{dz}{\sqrt{\frac{n_0^2}{C_0^2}(1-\lambda z)^2-1}} &= dx\end{aligned}$$

On pose

$$Z = \frac{n_0}{C_0}(\lambda z - 1) \Longrightarrow dZ = \lambda\frac{n_0}{C_0}dz$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{\sqrt{Z^2-1}} &= \frac{\lambda n_0}{C_0}dx \Longrightarrow \operatorname{argch}(Z) = \frac{\lambda n_0}{C_0}x + C_1\\ \Longrightarrow Z &= \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda n_0}{C_0}x + C_1\right) \Longrightarrow z = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{C_0}{n_0}\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda n_0}{C_0}x + C_1\right) + 1\right]\end{aligned}$$

or $z(0) = 0$ et $z'(0) = 5/12$ ce qui donne

$$\frac{C_0}{n_0}\operatorname{ch}C_1 + 1 = 0 \text{ et } \operatorname{sh}C_1 = 5/12 \Longrightarrow C_1 = \operatorname{Argsh}(\frac{5}{12}) = \ln\left(\frac{5}{12} + \sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}\right) = \ln\frac{3}{2}$$

ce qui donne

$$\frac{C_0}{n_0} = -\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\ln\frac{3}{2}\right)} = -\frac{12}{13}$$

ce qui donne alors comme solution

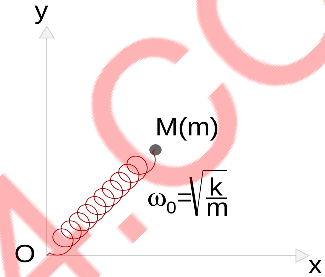
$$z = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{12}{13}\operatorname{ch}\left(\lambda\frac{13}{12}x + ln\frac{3}{2}\right)\right]$$

La distance à la quelle se trouve l'oasis est $z(L) = 0$ et donc

$$1 - \frac{12}{13}\text{ch}\left(\lambda\frac{13}{12}L + ln\frac{3}{2}\right) = 0 \Longrightarrow L = \frac{1}{\lambda}\frac{12}{13}\left[\text{Argch}\frac{13}{12} - \ln\frac{3}{2}\right].$$

Exercice 2

Considérons un oscillateur harmonique de masse m et de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et ce en deux dimensions, figure ci-contre. Le référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$ est supposé galiléen. On utilise dans l'exercice les coordonnées cartésiennes.



1. Le vecteur position est repéré par $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Le vecteur vitesse est alors donné par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}.$$

L'énergie cinétique T est donnée par $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$.

2. La seule force est $\vec{F} = -k(x\vec{i} + y\vec{j})$ ce qui donne pour l'énergie potentielle

$$dV = -\vec{F}\cdot d\overrightarrow{OM} = k(x\vec{i} + y\vec{j})\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j}) = k\left(xdx + ydy\right) \Longrightarrow V(x, y) = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right) + C$$

la constante est prise égale à 0.

3. Le lagrangien du système est donné par

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}; t) = T - V(x, y) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right).$$

Calculons les moments conjugués

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} \\ p_y = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = m\dot{y} \end{cases}$$

4. Montrons que le lagrangien est invariant par rotation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(s) - y\sin(s) \\ x\sin(s) + y\cos(s) \end{pmatrix}.$$

Pour une transformation infinitésimale, $x' = x - \delta s y$ et $y' = x\delta s + y$ ce qui donne $\delta x = x' - x = -y\delta s$ et $\delta y = y' - y = x\delta s$. ainsi $x'^2 + y'^2 = (x - y\delta s)(x - y\delta s) + (x\delta s + y)(x\delta s + y) \simeq x^2 - 2xy\delta s + y^2 + 2xy\delta s + \mathcal{O}(\delta s^2) = x^2 + y^2$. De même pour la vitesse, onutilise la même démarche, $\delta\dot{x} = -\dot{y}\delta s$ et $\delta\dot{y} = \dot{x}\delta s$ et on déduit $\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 = (\dot{x} - \dot{y}\delta s)(\dot{x} - \dot{y}\delta s) + (\dot{x}\delta s + \dot{y})(\dot{x}\delta s + \dot{y}) \simeq \dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\delta s + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\delta s + \mathcal{O}(\delta s^2) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. ce qui permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x', y', \dot{x}', \dot{y}') &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x'^2 + y'^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right) + \mathcal{O}(\delta^2 s) = \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{aligned}$$

et donc le lagrangien est invariant.
Le théorème de Noether nous donne la quantité conservée suivante

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\frac{\delta y}{\delta s}$$

sachant que $\delta x/\delta s = -y$ et $\delta y/\delta s = x$ ce qui donne pour la quantité conservée

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\frac{\delta y}{\delta s} = -p_x y + p_y x = -L_z$$

et qui n'est d'autre que le moment cinétique orbital selon l'axe Oz, axe autour duquel la rotation a lieu.

5. Le hamiltonien est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) &= T + V \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right) \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m{\omega_0}^2\left(x^2 + y^2\right) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation $k = m{\omega_0}^2$.
Comme $\mathcal{H}$ ne dépend pas explicitement du temps, alors il est conservé.

6. **Cette question sera comptée comme un bonus**
Pour vérifier que la transformation

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} x &=& X\cos\alpha + \frac{P_y}{m\omega_0}\sin\alpha & \quad & y &=& Y\cos\alpha + \frac{P_x}{m\omega_0}\sin\alpha \\ p_x &=& -m\omega_0 Y\sin\alpha + P_x\cos\alpha & \quad & p_y &=& -m\omega_0 Y\sin\alpha + P_y\cos\alpha \end{array} \right.$$

il suffit de vérifier que les relations des crochets de Poisson sont préservées

$$\begin{aligned}\{X,X\} &= \{Y,Y\} = \{X,Y\} = \{Y,X\} = \{P_X,P_X\} = \{P_Y,P_Y\} = \{P_X,P_Y\} = \{P_X,P_Y\}\\ \text{et } \{X,P_X\} &= \{Y,P_Y\} = 1.\end{aligned}$$

Le nouvel hamiltonien peut être calculé de manière aisée et on obtient

$$\mathcal{H}(X,Y,P_X,P_Y) = \frac{P_X^2}{2m} + \frac{P_Y^2}{2m} + \frac{1}{2}m{\omega_0}^2(X^2+Y^2).$$

7. On se propose de résoudre le problème en utilisant l'équation de Hamilton-Jacobi (HJ). On note par Q_1, Q_2, P_1 et P_2 les nouvelles variables.

7-a) L'équation de HJ est donnée par

$$\mathcal{H}(x,y,\frac{\partial\mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial x},\frac{\partial\mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial y}) + \frac{\partial\mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial t} = 0$$

Comme le hamiltonien est conservé, on peut séparer le paramètre t. De même, l'expression du hamiltonien peut être séparée en deux termes où le premier est $\frac{p_x^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$ et le deuxième est $\frac{p_y^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_0^2y^2$ et donc l'action hamiltonienne peut être séparée alors comme

$$S(x,y;t,P_1,P_2) = S(x,y;t,P_1,P_2) = S_x(x;P_1)+S_y(y;P_2)-Et.$$

7-b) Partons de l'hamiltonien et subsitituons p_x par $\partial\mathcal{S}/\partial x$ et p_y par $\partial\mathcal{S}/\partial y$, et comme

$$\frac{\partial\mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial x} = \frac{\partial\mathcal{S}_x(x;P_1)}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial\mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial y} = \frac{\partial\mathcal{S}_y(y;P_2)}{\partial y}$$

nous obtenons

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\mathcal{S}_x(x;P_1)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\mathcal{S}_y(y;P_2)}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2y^2 = E = E_x+E_y$$

et on peut mettre le résultat précédent sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\mathcal{S}_x(x;P_1)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 &= E_x \Longrightarrow \frac{d\mathcal{S}_x(x;P_1)}{dx} = \pm\sqrt{2mE_x - m^2\omega_0^2x^2}\\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\mathcal{S}_y(y;P_2)}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2y^2 &= E_y \Longrightarrow \frac{d\mathcal{S}_y(y;P_1)}{dy} = \pm\sqrt{2mE_y - m^2\omega_0^2y^2}\end{aligned}$$

ce qui donne en intégrant

$$S(x,y;t,P_1,P_2) = \pm\int\sqrt{2mE_x - m^2\omega_0^2x^2}dx \pm \int\sqrt{2pE_y - m^2\omega_0^2y^2}dy - Et.$$

7-c) Dans la transformation de HJ, les variables Q_1, Q_2, P_1 et P_2 sont cycliques et donc les équations de Hamilton permettent d'affirmer qu'elles sont conservées. L'action hamiltonnienne est de type 2. On pose $P_1 = E$ et $P_2 = E_y$ ce qui donne

$$\begin{cases} p_x &= \frac{\partial S(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial x} = \pm\sqrt{2mE_x - m^2\omega_0^2 x^2} = \pm\sqrt{2m(P_1-P_2) - m^2\omega_0^2 x^2} \\ p_y &= \frac{\partial S(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial y} = \pm\sqrt{2mE_y - m^2\omega_0^2 y^2} = \pm\sqrt{2mP_2 - m^2\omega_0^2 y^2} \\ Q_1 &= \frac{\partial S(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial P_1} = \pm\int \frac{m}{\sqrt{2m(P_1-P_2)-m^2\omega_0^2x^2}}dx - t \\ Q_2 &= \frac{\partial S(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial P_2} = \mp\int \frac{m}{\sqrt{2m(P_1-P_2)-m^2\omega_0^2x^2}}dx \pm \int \frac{m}{\sqrt{2mP_2-m^2\omega_0^2y^2}}dy \end{cases}$$

7-d) On intègre l'équation donnant les nouvelles coordonnées et on obtient

$$\begin{aligned} Q_1 &= \pm\int\sqrt{\frac{m}{2(P_1-P_2)}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{m\omega_0^2}{2(P_1-P_2)}x^2}} - t = \pm\frac{1}{\omega_0}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2(P_1-P_2)}}x\right) - t \\ Q_2 &= \mp\int\sqrt{\frac{m}{2(P_1-P_2)}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{m\omega_0^2}{2(P_1-P_2)}x^2}} \pm \int\sqrt{\frac{m}{2P_2}}\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{m\omega_0^2}{2P_2}y^2}} \\ &= \mp\frac{1}{\omega_0}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2P_2}}y\right) \pm \frac{1}{\omega_0}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2(P_1-P_2)}}x\right) \end{aligned}$$

Pour les anciennes coordonnées, la détermination de l'équation de x en inversant celle de Q_1,

$$x = \sqrt{\frac{2(P_1-P_2)}{m\omega_0^2}}\sin\left(\pm(\omega_0 t + Q_1\omega_0)\right)$$

avec les conditions initiales, nous avons

$$\left.\begin{array}{rcl} x(0) = L &\Longrightarrow& \sqrt{\frac{2(P_1-P_2)}{m\omega_0^2}}\sin(\pm Q_1\omega_0) = L \\ \dot{x}(0) = 0 &\Longrightarrow& \sqrt{\frac{2(P_1-P_2)}{m\omega_0^2}}\cos(Q_1\omega_0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} Q_1\omega_0 &=& \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{\frac{2(P_1-P_2)}{m\omega_0^2}} &=& L \end{array}\right.$$

ce qui implique $x = L\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$

Quant à l'ancienne coordonnée y, on remplace x par son expression et on inverse Q_2

$$Q_2 = \mp\frac{1}{\omega_0}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2P_2}}y\right) \pm \left(t + \frac{\pi}{2\omega_0}\right)$$

ce qui implique

$$y = \mp\sqrt{\frac{2P_2}{m\omega_0^2}}\sin\left[\omega_0\left(Q_2 \pm t \pm \frac{\pi}{2\omega_0}\right)\right]$$

et avec les conditions initiales $y(0) = 0 \Longrightarrow \sin\left(\omega_0(Q_2 \pm \frac{\pi}{2\omega_0}\right) \Longrightarrow Q_2 \pm \frac{\pi}{2\omega_0} = 0$ et

$$\dot{y}(0) = v \Longrightarrow \sqrt{\frac{2P_2}{m\omega_0^2}}\omega_0 \cos\left(\omega_0(Q_2 \pm \frac{\pi}{2\omega_0}\right) = v \Longrightarrow \sqrt{\frac{2P_2}{m\omega_0^2}} = v/\omega_0$$

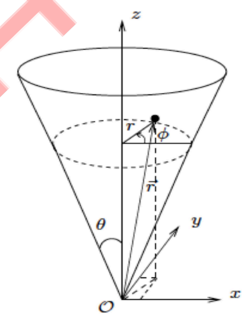
ce qui donne comme solution

$$y = \frac{v}{\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

4.7 Contrôle Janvier 2015

Exercice I : particule sur un cône

Considérons un point matériel qui se déplace sans frottement sous l'effet de son poids sur la surface intérieure d'un cône d'angle d'ouverture $2\theta_0$, voir figure ci-contre. Le repère $\mathcal{R}(Oxyz)$ est considéré galiléen. On se propose d'utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.



1. Exprimer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V en utilisant le système des coordonnées cylindriques (ρ, φ, z). En déduire l'expression du lagrangien. Quelles sont les grandeurs conservées ?
2. Exprimer la contrainte $f(\rho, \varphi, z)$ à laquelle est soumis le point matériel. De quelle type de liaison s'agit-il ?
3. On note par λ le multiplicateur de lagrange. Ecrire les équations de Lagrange et montrer que

$$\lambda = \sin\theta_0 \left(mg\sin\theta_0 + \frac{L_z^2\cos\theta_0}{m\rho^3}\right).$$

4. Etablir les équations du mouvement du point matériel.
5. En déduire les composantes généralisées Q_ρ, Q_φ et Q_z de la force de liaison. Montrer qu'elle est orthogonale à la surface du cône. Commenter.

Exercice 2 : Transformations canoniques

Soit la transformation de contact suivante

$$Q = p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}}$$
$$P = p^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}}$$

où $q > 0$ et $p > 0$.

1. Montrer, en utilisant les crochets de Poisson, que la dite transformation est canonique.
2. Etablir l'expression de la matrice jacobienne et montrer que la transformation est canonique.
3. Déterminer la fonction génératrice de type 2 $F_2(q, P)$ qui engendre cette transformation.

Exercice 3 : Variable angle-action

Une particule de masse m se déplace selon Ox dans le champ d'un potentiel de la forme

$$V(x) \quad = \quad V_0 \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right).$$

1. Déterminer le lagrangien de la particule.
2. Etablir l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi et déterminer la solution générale $W(x, \alpha)$ sous forme intégrale, où α est la constante d'intégration.
3. Déterminer les bornes $x_{b\pm}$ de variation de x et montrer que l'expression de l'action J est donnée par

$$J \quad = \quad \frac{2a}{\pi}\sqrt{2m}\left(\sqrt{E+V_0} - \sqrt{V_0}\right).$$

4. Etablir les équations canoniques en fonction des variables angle-action et déduire l'expression de la pulsation du mouvement ω.

Nous nous intéressons cette fois-ci au mouvement de petites oscillations.

5. Montrer que le potentiel possède un minimum en $x_e = 0$.
6. On considère le mouvement autour de cette position, $x - x_e$. Exprimer le potentiel en ne gardant que les termes d'ordre 2.
7. Exprimer le Lagrangien et établir l'expression de l'équation du mouvement. En déduire la pulsation des petites oscillations ω_0. Comparer à ω et conclure.

4.8 Corrigé du contrôle Janvier 2015

Corrigé de l'exercice 1 : Transformations canoniques (5pts)

Soit la transformation de contact suivante

$$\begin{aligned} Q &= p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}} \\ P &= p^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où $q > 0$ et $p > 0$. Soient $X(q,p)$ et $Y(q,p)$ deux grandeurs définies dans l'espace des phases.

$\boxed{\text{2p}}$

1. Tout d'abord, calculons

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial}{\partial P} \\ &= \frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2}\frac{\partial}{\partial Q} - \frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2}\frac{\partial}{\partial P} \quad \text{0.25p}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p} &= \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial}{\partial P} \\ &= \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2}\frac{\partial}{\partial Q} + \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2}\frac{\partial}{\partial P} \quad \text{0.25p}\end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}\{X,Y\}_{(q,p)} &= \frac{\partial X}{\partial q}\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial q} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial P} - \\ &\quad -\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial Q} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial P} \\ &= \frac{3}{4}q^2\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{3}{4}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{1}{4}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q} - \frac{1}{4}q^{-2}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial P} - \\ &\quad -\frac{3}{4}q^2\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{1}{4}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{3}{4}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{1}{4}q^{-2}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial P} \\ &= \frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q} = \{X,Y\}_{(Q,P)} \quad \text{1.5p}\end{aligned}$$

ce qui montre bien que la transformation est canonique puisqu'elle conserve les crochets de Poisson.

Une autre démonstration consiste à montrer que $\{Q,Q\} = 0$, $\{P,P\} = 0$ et $\{Q,P\} = 1$. A considérer juste aussi.

$\boxed{\text{2p}}$

2. Calculons l'expression de la matrice jacobienne M :

$$\begin{aligned}M &= \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2} \\ -\frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2}\end{pmatrix} \quad \text{0.5p} \\ \Longrightarrow {}^tM &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2} & -\frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2} \\ \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2}\end{pmatrix} \quad \text{0.5p}\end{aligned}$$

Pour montrer que la transformation est canonique il suffit de montrer que M est symplectique. En effet,

$$\begin{aligned}
{}^tMJM &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2} & -\frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2} \\ \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2} \\ -\frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2} & -\frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2} \\ \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2} & +\frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2} \\ -\frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2} & -\frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{0.75p}
\end{aligned}$$

et donc ${}^tMJM = J \Longrightarrow M$ est symplectique et donc la transformation est canonique. **0.25p**

3. Nous savons que $\boxed{\text{1p}}$

$$p \;=\; \frac{\partial F_2}{\partial q} = qP^2 \Longrightarrow F_2(q,P) = \frac{1}{2}q^2P^2 + f(P). \quad \textbf{0.5p}$$

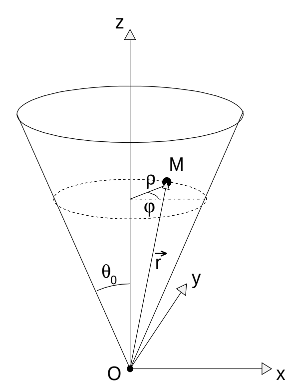
Or

$$Q \;=\; \frac{\partial F_2}{\partial P} = Pq^2 + f'(P) \text{ et } Q = Pq^2 \Longrightarrow f'(P) = 0 \Longrightarrow f(P) = \text{Cst=0}. \quad \textbf{0.5p}$$

ce qui donne $F_2(q,P) = \frac{1}{2}q^2P^2$.

Corrigé de l'exercice 2 : particule sur un cône (8pt)

Considérons une particule M de masse m qui se déplace sans frottement sous l'effet de son poids sur la surface intérieure d'un cône d'angle d'ouverture $2\theta_0$, voir figure ci-contre. Le repère $\mathcal{R}(Oxyz)$ est considéré galiléen. On se propose d'utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour retrouver les composantes de la réaction $\vec{R}$ de la surface du cône sur la particule. $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ étant respectivements les bases cylindrique et sphérique. Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.



1. Comme $\mathcal{R}$ est galiléen, les forces appliquées à la particule M sont le poids $m\vec{g} = -mg\vec{k}$ et $\vec{R}$ la réaction de la surface interne du cône sur M. **0.25p** $\boxed{\text{0.5p}}$
La position de M est repérée par $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ et z. Comme M est

astreinte à se déplacer sur la surface interne du cône, nous avons une contraine et donc le nombre de degrés de liberté est $3-1=2$. **0.25p**.

2.5p

2. $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k} \Longrightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$. D'où l'énergie cinétique est

$$T = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right). \quad \mathbf{1.0p}$$

Quant à l'énergie potentielle, elle est donnée par :

$$\begin{aligned} dV &= -m\vec{g}\cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= mg\vec{k}\cdot\left(d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k}\right) \\ &= mgdz \\ \Longrightarrow V &= mgz + K \quad \mathbf{0.75p} \end{aligned}$$

où K est une constante que l'on prendra égale à 0.

Le lagrangien est ainsi donné par

$$\mathcal{L}(\rho,\varphi,z,\dot{\rho},\dot{\varphi},\dot{z}) = T - V = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz. \quad \mathbf{0.25p}$$

Comme le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps alors l'énergie mécanique est conservée et donc celle-ci est une intégrale première. **0.25**
De même, φ est cyclique, ce qui implique grâce au théorème de Noether que $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi} = m\rho\dot{\varphi}^2$ est conservée. **0.25p**.

0.5p

3. M doit rester en contact avec la surface interne du cône, ce qui implique que $\rho/z = \mathrm{tg}\theta_0 \Longrightarrow z = \rho\mathrm{cotg}\theta_0$. La contrainte est donc donnée par $f(\rho,\varphi,z) = z - \rho\mathrm{cotg}\theta_0 = 0$. C'est une contrainte qui ne relie que les coordonnées donc hôlonome, et comme elle ne dépend pas du temps elle est scléronome. **0.5p**

2.5p

4. Les équations de Lagrange en présence du multiplicateur de lagrange λ sont données par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} &= \lambda\frac{\partial f}{\partial\rho} \Longrightarrow m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 = -\lambda\mathrm{cotg}\theta_0 \quad \mathbf{0.25p} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= \lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi} \Longrightarrow m\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}^2\right) = 0 \quad \mathbf{0.25p} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} &= \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \Longrightarrow m\ddot{z} + mg = \lambda. \quad \mathbf{0.25p} \end{aligned}$$

Comme $z - \rho\text{cotg}\theta_0 = 0 \Longrightarrow \ddot{z} = \ddot{\rho}\text{cotg}\theta_0$ et $L_z = m\rho^2\dot{\varphi}$ qui est constant comme démontrée à la question précédente, nous obtenons le système d'équations

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} + \lambda\text{cotg}\theta_0 &= \frac{L_z^2}{m\rho^3} \\ m\ddot{\rho}\text{cotg}\theta_0 - \lambda &= -mg \end{aligned}$$

en substituant $m\ddot{\rho} = \frac{L_z^2}{m\rho^3} - \lambda\text{cotg}\theta_0$ dans la deuxième équation, nous obtenons

$$\lambda(\text{cotg}^2\theta_0 + 1) = mg + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\text{cotg}\theta_0 \Longrightarrow \lambda = \sin\theta_0\left(mg\sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\cos\theta_0\right)$$ **0.5p**

Les équations différentielles de chacune des coordonnées sont

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} - \frac{L_z}{m\rho^3} + \cos\theta_0\left(mg\sin\theta_0 + \frac{L_z}{m\rho^3}\cos\theta_0\right) &= 0 \\ \Longrightarrow \ddot{\rho} - \frac{L_z}{m^2\rho^3}\sin^2\theta_0 + \frac{1}{2}\sin 2\theta_0 &= 0 \end{aligned}$$ **0.5p**

et

$$\frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(L_z\dot{\varphi}\right) = L_z\ddot{\varphi} = 0 \Longrightarrow \ddot{\varphi} = 0$$ **0.25p**

et

$$\begin{aligned} \ddot{z} + g - \sin\theta_0\left(g\sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m^2\rho^3}\cos\theta_0\right) &= 0 \\ \ddot{z} + g\cos^2\theta_0 - \frac{L_z^2}{2m^2\rho^3}\sin 2\theta_0 &= 0 \\ \ddot{z} + g\cos^2\theta_0 - \frac{L_z^2}{2m^2z^3}\text{cotg}^3\theta_0\sin 2\theta_0 &= 0 \\ \ddot{z} - \frac{L_z^2}{m^2}\frac{\cos^4\theta_0}{\sin^2\theta_0}\frac{1}{z^3} + g\cos^2\theta_0 &= 0. \end{aligned}$$ **0.5p**

5. Les composantes généralisées de la force de liaison sont données par $\boxed{0.75\text{p}}$

$$Q_\rho = \lambda\frac{\partial f}{\partial \rho} = -\lambda\text{cotg}\theta_0 = -\cos\theta_0\left(mg\sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\cos\theta_0\right)$$ **0.25p**

$$Q_\varphi = \lambda\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$ **0.25p**

$$Q_z = \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = \lambda = \sin\theta_0\left(mg\sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\cos\theta_0\right).$$ **0.25p**

6. Nous savons que la force de liaison associée à la contrainte est $\vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{k}$ avec 0.75p

$$
\begin{aligned}
Q_\rho &= \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \vec{R} \cdot \vec{e}_\rho = R_\rho = -\cos\theta_0 \left(mg\sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\cos\theta_0 \right) \quad \mathbf{0.25p} \\
Q_\varphi &= \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \vec{R} \cdot \rho \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \rho \vec{R} \cdot \vec{e}_\varphi = \rho R_\varphi = 0 \Longrightarrow R_\varphi = 0 \quad \mathbf{0.25p} \\
Q_z &= \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{R} \cdot \vec{k} = R_z = \sin\theta_0 \left(mg\sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\cos\theta_0 \right) \quad \mathbf{0.25p}
\end{aligned}
$$

nous en déduisons que les composantes généralisées ne sont d'autres que les composantes de $\vec{R}$ dans la base cylindrique. Ainsi nous pouvons écrire

$$
\vec{R} = -\left(mg\sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\cos\theta_0 \right) \left(\cos\theta_0 \vec{e}_\rho - \sin\theta_0 \vec{k} \right).
$$

7. Comme $\vec{e}_r$ est tangent à la surface interne du cône et comme $\vec{e}_\theta$ est dirigé vers l'extérieur du cône, alors $\vec{n} = -\vec{e}_\theta$.
Comme $\vec{e}_\theta = \cos\theta_0 \vec{e}_\rho - \sin\theta_0 \vec{k}$, alors

0.5p

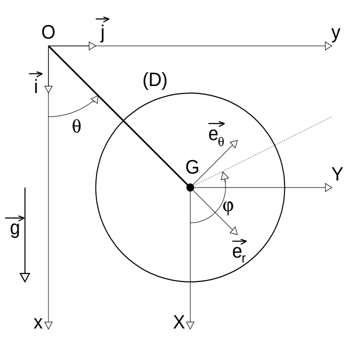
$\vec{n} = -\cos\theta_0 \vec{e}_\rho + \sin\theta_0 \vec{k}$ **0.25p**. Ainsi

$$
\begin{aligned}
\vec{R} &= -\left(mg\sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\cos\theta_0 \right) \left(\cos\theta_0 \vec{e}_\rho - \sin\theta_0 \vec{k} \right) \\
&= \left(mg\sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\cos\theta_0 \right) \vec{n}. \quad \mathbf{0.25p}
\end{aligned}
$$

ce qui montre bien que $\vec{R} // \vec{n}$. D'ailleurs c'est le résultat attendu étant donné que les forces de frottement sont nulles.

Corrigé de l'exercice 3 (7pt)

Un disque (D) de masse M et de rayon R se déplace dans le plan Oxy d'un repère $\mathcal{R}(O, xyz)$ supposé galiléen. Le centre du disque G est attaché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur $L = \|\overrightarrow{OG}\|$, voir figure ci-contre. La position de G est repérée par l'angle θ telle que $\overrightarrow{OG} = L\vec{e}_r$. La vitesse angulaire de rotation du disque autour de son axe GZ est $\dot{\varphi}$. On admet que Le fil est tendu au cour du mouvement. L'accélération de la pésanteur est $\vec{g} = g\vec{i}$. On note par $I = \frac{1}{2}MR^2$ le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe GZ.



1. Le mouvement de (D) est décrit par le mouvement du centre de masse dont les coordonnées sont $x_G = L\cos\theta$ et $y_G = L\sin\theta$ et sa rotation est décrite par l'angle φ. On en déduit que le couple de variables (θ, φ) suffit pour le décrire. D'où le nombre de degrés de liberté est 2. **0.5p** $\boxed{0.5\text{p}}$

2. L'expression de l'énergie cinétique T du disque (D) est donnée par le théorème de Koenig : $\boxed{1.0\text{p}}$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}{}^t\Omega I \Omega^2 \\ &= \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}I_{GZ}\dot{\varphi}^2 \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

où V_G est la vitesse du centre de masse G et $I_{GZ} = \frac{1}{2}MR^2$ est le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe GZ et $\vec{\Omega}(D/\mathcal{R})$ est le vecteur rotation du disque par rapport à $\mathcal{R}$.
Le vecteur position $\overrightarrow{OG} = L\vec{e}_r \Longrightarrow \vec{V}_G = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Longrightarrow V_G^2 = L^2\dot{\theta}^2$. Nous avons ainsi

$$T = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}M\left(L^2\dot{\theta}^2 + \frac{R^2}{2}\dot{\varphi}^2\right). \quad \textbf{0.75p}$$

3. Calculons le travail de $M\vec{g}$ sachant que $d\overrightarrow{OG} = Ld\theta\vec{e}_\theta$: $\boxed{1.0\text{p}}$

$$\delta W(M\vec{g}) = M\vec{g}\cdot Ld\theta\vec{e}_\theta = MLgd\theta\vec{i}\cdot\vec{e}_\theta = -MLg\sin\theta d\theta$$

Comme

$$dV = -\delta W = MLg\sin\theta d\theta \Longrightarrow V = -MLg\cos\theta + K$$

et $V(\theta = 0) = 0 \Longrightarrow K = Mgl \Longrightarrow V(\theta) = Mgl\left(1 - \cos\theta\right) = V_0\left(1 - \cos\theta\right).$ **0.75p**

Pour démontrer que $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable, il suffit de démontrer que $V'(\theta = 0) = 0$ et $V''(\theta = 0) > 0$. Or $V'(\theta) = V_0\sin\theta \Longrightarrow V'(0) = 0$. De même $V''(\theta) = V_0\cos\theta \Longrightarrow V''(\theta = 0) = V_0 > 0$ et donc $\theta = 0$ est bien une position d'équilibre stable. **0.25p**

4. On considère les petites oscillations autour de $\theta = 0$.

i- Le développement limité de $V(\theta)$ atour de $\theta = 0$ à l'ordre 2 est $\boxed{0.5\text{p}}$

$$V(\theta) = V(0) + V'(0)\theta + V''(0)\frac{\theta^2}{2} = V_0\frac{\theta^2}{2}. \quad \textbf{0.5p}$$

ii- Le lagrangien est ainsi donné par $\boxed{1.25\text{p}}$

$$\mathcal{L}(\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi) = T - V = \frac{1}{2}M\left(L^2\dot\theta^2 + \frac{R^2}{2}\dot\varphi^2\right) - V_0\frac{\theta^2}{2}. \quad \mathbf{0.25p}$$

Les équations de Lagrange s'expriment comme suit

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = -\left(V_0\theta - ML^2\ddot\theta\right)\dot\theta = 0 \Longrightarrow \ddot\theta + \frac{V_0}{ML^2}\theta = 0 \quad \mathbf{0.25p}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = -\frac{1}{2}MR^2\dot\varphi\ddot\varphi = 0 \Longrightarrow \ddot\varphi = 0 \Longrightarrow \dot\varphi = \text{Cste} \quad \mathbf{0.25p}$$

Sachant que $\frac{V_0}{ML^2} = \frac{MgL}{ML^2} = \frac{g}{L} = \omega_0^2$ nous avons

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t - \gamma)$$

et en utilisant les conditions initiales nous obtenons

$$\theta_0 = A\cos\gamma \quad \text{et} \quad \dot\theta(t=0) = 0 = -A\omega_0\sin\gamma \Longrightarrow \gamma = 0 \quad \text{et} \quad A = \theta_0$$

et la solution est $\theta = \theta_0\cos\omega_0 t$ **0.25p**.

Quant à $\varphi(t)$, nous avons $\dot\varphi$ =Cste= $\dot\varphi(t=0) = \dot\varphi_0 \Longrightarrow \varphi(t) = \dot\varphi_0 t$ sachant que $\varphi(t=0) = 0$. **0.25p**

0.75p

5. Nous reprenons l'expression complète de $V(\theta) = V_0(1-\cos\theta)$. Le lagrangien est égal à

$$\mathcal{L}(\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi) = T - V = \frac{1}{2}M\left(L^2\dot\theta^2 + \frac{R^2}{2}\dot\varphi^2\right) - V_0(1-\cos\theta)$$

ce qui donne pour les moments conjugués

$$p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = ML^2\dot\theta \quad \mathbf{0.25p} \quad \text{et} \quad p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = \frac{1}{2}MR^2\dot\varphi \quad \mathbf{0.25p}$$

et pour le hamiltonien

$$\mathcal{H}(\theta,\varphi,p_\theta,p_\varphi) = \frac{p_\theta^2}{2ML^2} + \frac{p_\varphi^2}{MR^2} + V_0(1-\cos\theta). \quad \mathbf{0.25p}$$

0.75

6. La première intégrale première est l'énergie mécanique car le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps. **0.25p**

La deuxième intégrale première est p_φ car φ est une variable cyclique et que $\dot p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi} = 0 \Longrightarrow p_\varphi$ =Cste. **0.25p**

Calculons l'expression du moment cinétique de (D) par rapport àG dans R_G :

$$\vec\sigma_G(D/\mathcal{R}_G) = I\Omega = \frac{1}{2}MR^2\dot\varphi\vec{k}.$$

On en conclue que p_φ n'est d'autre que le moment cinétique de (D) par rapport àGZ et que ce dernier est une intégrale première. où I est la matrice d'inertie diagonale de (D) **0.25**

7. L'équation de Hamilton-Jacobi est donnée par $\boxed{1.25\text{p}}$

$$\mathcal{H}(\theta,\varphi,\frac{\partial S(\theta,\varphi;\alpha_\theta,\alpha_\varphi,t)}{\partial\theta},\frac{\partial S(\theta,\varphi;\alpha_\theta,\alpha_\varphi,t)}{\partial\varphi})+\frac{\partial S(\theta,\varphi;\alpha_\theta,\alpha_\varphi,t)}{\partial t} = 0$$

En posant $S(\theta,\varphi;\alpha_\theta,\alpha_\varphi,t)=W_\theta(\theta;\alpha_\theta,\alpha_\varphi)+W_\varphi(\varphi;\alpha_\theta,\alpha_\varphi)-Et$, l'équation de Hamilton-Jacobi devient

$$\mathcal{H}(\theta,\varphi,\frac{\partial W_\theta(\theta;\alpha_\theta,\alpha_\varphi)}{\partial\theta},\frac{\partial W_\varphi(\varphi;\alpha_\theta,\alpha_\varphi)}{\partial\varphi}) = E$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2ML^2}\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial\theta}\right)^2+V_0\left(1-\cos\theta\right)+\frac{1}{MR^2}\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial\varphi}\right)^2=E \quad \textbf{0.25p}$$

Comme nous avons deux intégrales premières et deux constantes d'intégrations α_θ et α_φ, on prend $\alpha_\varphi=p_\varphi$ et $\alpha_\theta=E$. Les équations précédentes deviennent

$$\frac{1}{2ML^2}\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial\theta}\right)^2+V_0\left(1-\cos\theta\right)+\frac{p_\varphi^2}{MR^2} = E \quad \textbf{0.25p}$$

$$\frac{\partial W_\varphi}{\partial\varphi} = p_\varphi \quad \textbf{0.25p}$$

Les solutions sous formes intégrales sont alors

$$W_\theta(\theta;E,p_\varphi) = \pm\int\sqrt{2ML^2\left(E-V_0\left(1-\cos\theta\right)-\frac{p_\varphi^2}{MR^2}\right)}d\theta \quad \textbf{0.25p}$$

$$W_\varphi(\varphi;E,p_\varphi) = \pm\int p_\varphi d\varphi. \quad \textbf{0.25p}$$

Questions bonus (2pt) :

On se place à nouveau dans le cas des petites oscillations autour de $\theta=0$.

8. Reexprimons W_θ et W_φ avec $p_\varphi=0$ $\boxed{0.25\text{p}}$

$$\begin{aligned}W_\theta(\theta;E,p_\varphi) &= \pm\int\sqrt{2ML^2\left(E-V_0\frac{\theta^2}{2}\right)}d\theta\\ &= \pm\sqrt{b}\int\sqrt{1-a\frac{\theta^2}{2}}d\theta\\ W_\varphi(\varphi;E,p_\varphi) &= \pm\int p_\varphi d\varphi=0. \quad \textbf{0.25p}\end{aligned}$$

avec $a=V_0/E$ et $b=2ML^2E$.

9. Trouvons les bornes de variations de θ en prenant $\mathcal{H}(\theta_b, \varphi_b, p_\theta = 0, p_\varphi = 0) = V_0 \frac{\theta^2}{2} = E$, ce qui implique que $\boxed{0.25\text{p}}$

$$\theta_{b_\pm} = \pm\sqrt{\frac{2E}{V_0}}. \quad \mathbf{0.25p}$$

$\boxed{1.0\text{p}}$

10. Calculons l'action J_θ

$$\begin{aligned}
J_\theta &= \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} d\theta \\
&= \frac{\sqrt{b}}{2\pi}\left[+\int_{\theta_{b_-}}^{\theta_{b_+}} \sqrt{1 - a\frac{\theta^2}{2}}\, d\theta - \int_{\theta_{b_+}}^{\theta_{b_-}} \sqrt{1 - a\frac{\theta^2}{2}}\, d\theta\right] \\
&= \frac{\sqrt{b}}{\pi}\int_{\theta_{b_-}}^{\theta_{b_+}} \sqrt{1 - a\frac{\theta^2}{2}}\, d\theta \\
&= \frac{2\sqrt{b}}{\pi}\int_{0}^{\theta_{b_+}} \sqrt{1 - a\frac{\theta^2}{2}}\, d\theta \quad \mathbf{0.5p}
\end{aligned}$$

On pose $\sin x = \sqrt{\frac{a}{2}}\theta \Longrightarrow \cos x dx = \sqrt{\frac{a}{2}} d\theta$, avec $\sin x_+ = \sqrt{\frac{a}{2}}\theta_{b+} = \sqrt{\frac{V_0}{2E}}\sqrt{\frac{2E}{V_0}} = 1 \Longrightarrow x_+ = \pi/2$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
J_\theta &= \frac{2\sqrt{b}}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 x}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos x \, dx \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{b}{a}}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{b}{a}}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right) dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) \\
&= \sqrt{\frac{ML^2}{V_0}}E \quad \mathbf{0.5p}
\end{aligned}$$

Veuillez bien noter cette deuxième approche considérée aussi juste :

On utilise les invariants de Poincarré qui permettent d'écrire que

$$\oint_C pdq = \int\int_S dpdq$$

la double intégrale étant faite sur la surface délimitée par le chemin fermé (C). En effet, la surface délimitée par (C) est l'éllipse dont les demi-axes sont donnés par θ_{b+} et $p_{\theta_{b_+}}$ qui est la valeur maximame que peut prendre p_θ et qui n'est

d'autre que celle correspondant au cas où l'énergie mécanique est complètement sous forme d'énergie cinétique et donc $V = 0$, ce qui donne $p_{\theta_{b_+}} = \sqrt{2ML^2E}$. Or la surface d'une éllipse de demi-axes a et b est πab, ce qui donne en utilisant ce résultat

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi}\int_S dp_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi}\pi \times \sqrt{\frac{2E}{V_0}} \times \sqrt{2ML^2E} = E\sqrt{\frac{ML^2}{V_0}}.$$

11. Inversons la relation précédente $\boxed{0.5\text{p}}$

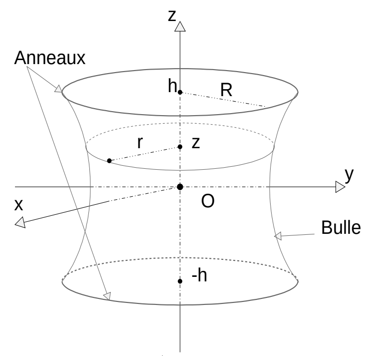
$$E = \sqrt{\frac{V_0}{ML^2}}J_\theta \Longrightarrow \omega_\theta = \sqrt{\frac{V_0}{ML^2}} = \frac{g}{L} = \omega_0. \quad \mathbf{0.5p}$$

On voit bien que l'on obtient le même résultat que précédemment.

4.9 Contrôle de février 2014

Exercice I : Surface minimale d'une bulle de savon

On considère une bulle de savon tendue entre deux anneaux de même rayon R, figure ci-contre. On se propose de trouver la surface d'aire minimale tendue entre les deux anneaux en fonction de la distance $d = 2h$ qui les sépare en utilisant le calcul variationnel. La bulle est symétrique par rapport à l'axe Oz et l'on paramètre la position d'un point de la surface de la bulle par $r = r(z)$.



1. En prenant la bande de surface comprise entre (z, r) et $(z + dz, r + dr)$, établir l'expression de l'aire infinitésimale de cette bande dA. En déduire que l'aire est donnée par l'expression

$$A = \int_{-h}^{h} 2\pi r\sqrt{1 + r'^2}dz$$

où $r' = \frac{dr}{dz}$ avec $r(-h) = r(h) = R$.

2. Quelle est la fonctionnelle qui joue le rôle du lagrangien $\mathcal{L}(r, r'; z)$?

3. Montrer que l'équation d'Euler donne

$$1 + r'^2 - rr'' = 0$$

où $r'' = \frac{d^2r}{dz^2}$.

4. Exprimer le hamiltonien $\mathcal{H}$ correspondant au lagrangien $\mathcal{L}(r, r')$.(Exprimer H en fonction de r et de r').
5. Montrer que H est une constante. On prend cette constante égale à $-2\pi k$.
6. En utilisant le résultat de la question **5**, montrer que l'équation différentielle vérifiée par $r(z)$ qui minimise l'aire de la surface est donnée par

$$r'' - \frac{1}{k} r \;=\; 0.$$

En déduire la solution $r(z)$ en explicitant les constantes d'intégration en fonction de R, de k et de d.[7]

Exercice II : Particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Une particule de masse m et de charge q, dont la position est repérée par dans la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par $\vec{r} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k})$, se dépalce dans une région où règne un champ électromagnétique $(\vec{E} = -\vec{\nabla}(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A})$, où $\vec{A} = \vec{A}(x_1, x_2, x_3; t)$ et $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3; t)$ sont respectivement le potentiel scalaire et le potentiel vecteur et $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_2)$ est l'opérateur nabla. La vitesse de la particule est donnée par $\vec{v} = (v_1 = \dot{x}_1, v_2 = \dot{x}_2, v_3 = \dot{x}_3)$. Les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées coincident avec les coordonnées et les composantes de la vitesse de la particule.

1. Montrer que la force de Lorentz $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$ dérive d'un potentiel généralisé de la forme

$$V \;=\; q\left(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}\right).$$

Dans la suite de l'exercice, l'on considère que $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = B_0\vec{k}$, où B_0 est constant. On note $\frac{qB_0}{m} = \omega_0$. A l'instant initial $x_1(t = 0) = 0, x_2(t = 0) = 0, x_3(t = 0) = 0$, et la vitesse initiale est $\vec{v}_0 = v_{0\perp}\vec{i} + v_{0z}\vec{k}$.

2. Montrer que dans ce cas le potentiel vecteur $\vec{A}$ est de la forme $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{A}$.
3. Déterminer l'expression du lagrangien $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3; t)$ de la particule.
4. Etablir les équations de Lagrange et montrer que les équations du mouvement sont données par

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - \omega_0\dot{x}_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0\dot{x}_1 &= 0 \\ \ddot{x}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Conclure sur le mouvent selon Oz.

7. On rappelle que l'équation différentielle $f''(x) - af(x) = 0$ a pour solution $f(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$ où A et B sont des constantes d'intégration à déterminer.

5. Résoudre les équations différentielles et trouver les équations horaires $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$.

Exercice III : Angle-action

Considérons une particule m soumise au potentiel :

$$V(q) \quad = \quad \alpha|q|.$$

1. Déterminer l'expression du hamiltonien $\mathcal{H}(q,p)$ et montrer que c'est une intégrale première.
2. Déterminer les valeurs limites que peut prendre q.
3. Etablir l'équation de Hamilton-Jacobi est montrer que la variable action est donnée par l'expression

$$J \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-E/\alpha}^{E/\alpha}\sqrt{2m\,(E-\alpha|q|)}dq$$

où E est l'énergie mécanique de la particule.

4. Calculer l'expression de J et déduire la fréquence des oscillations ω de la particule.

On donne

$$\int_0^{a/b}\sqrt{a-bx}dx \quad = \quad \frac{2}{3b}a^{3/2}.$$

4.10 Corrigé du contrôle de janvier 2015

Exercice I (6p)

1. L'élément de surface est donné par $\boxed{0.75\text{p}}$

$$dA \quad = \quad 2\pi r dl = 2\pi r\sqrt{dz^2+dr^2} = 2\pi r\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}dz = 2\pi r\sqrt{1+r'^2}dz. \quad \mathbf{0.5p}$$

Ce qui donne

$$A = \int_{-h}^{h} dA = \int_{-h}^{h} 2\pi r\sqrt{1+r'^2}dz. \quad \mathbf{0.25p}$$

2. Minimiser l'aire la surface, en utilisant le principe de moindre action, revient à utiliser comme fonctionnelle représentant le lagrangien $\mathcal{L}(r,r';z) = 2\pi r\sqrt{1+r'^2}$ **0.5p**. $\boxed{0.5\text{p}}$

3. L'équation d'Euler est donnée par $\boxed{1.75\text{p}}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dz}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} = 0 \quad \mathbf{0.25p}$$

avec $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 2\pi\sqrt{1+r'^2}$ **0.25p** et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} = \frac{2\pi r r'}{\sqrt{1+r'^2}}$ **0.25p**, ce qui donne

$$\begin{aligned}
2\pi\sqrt{1+r'^2} - \frac{d}{dz}\left(\frac{2\pi r r'}{\sqrt{1+r'^2}}\right) &= 0 \\
\Longrightarrow 2\pi\sqrt{1+r'^2} - \left(\frac{2\pi r'^2}{\sqrt{1+r'^2}} + \frac{2\pi r r''}{\sqrt{1+r'^2}} - \frac{2\pi r r'^2 r''}{(1+r'^2)^{3/2}}\right) &= 0 \\
\Longrightarrow 1 + r'^2 - r'^2 - r r'' + \frac{r r'^2 r''}{1+r'^2} &= 0 \\
\Longrightarrow 1 + r'^2 - r r'' - r r'^2 r'' + r r'^2 r'' &= 0 \\
\Longrightarrow 1 + r'^2 - r r'' &= 0. \quad \mathbf{1.0p}
\end{aligned}$$

$\boxed{1.0\text{p}}$

4. Le moment conjugué est $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} =$, ce qui donne

$$\mathcal{H} = p_r r' - \mathcal{L} = \frac{2\pi r r'^2}{\sqrt{1+r'^2}} - 2\pi r\sqrt{1+r'^2} = \frac{-2\pi r}{\sqrt{1+r'^2}} \quad \mathbf{1.0p}$$

$\boxed{0.5\text{p}}$

5. $\mathcal{H}$ ne dépend pas explicitement de z alors $\mathcal{H}$ est constante **0.5p** :

$$\mathcal{H} = \frac{-2\pi r}{\sqrt{1+r'^2}} = -2\pi k \Longrightarrow \frac{r}{\sqrt{1+r'^2}} = k.$$

$\boxed{1.5\text{p}}$

6. Nous avons $1 + r'^2 = r^2/k^2$, ce qui donne

$$\frac{r^2}{k^2} - r r'' = 0 \Longrightarrow -r\left(r'' - \frac{1}{k^2} r\right) = 0 \Longrightarrow r'' - \frac{1}{k^2} r = 0 \quad \mathbf{0.5p}$$

car $r \neq 0$. La solution est alors égale à

$$r(z) = A e^{\frac{r}{k}} + B e^{-\frac{r}{k}}$$

comme $r(h) = Ae^{\frac{h}{k}} + Be^{-\frac{h}{k}} = r(-h) = Ae^{-\frac{h}{k}} + Be^{\frac{h}{k}} = R \Longrightarrow A = B$. D'où $r(z) = A(e^{\frac{r}{k}} + e^{-\frac{r}{k}}) = 2A\mathrm{ch}(\frac{r}{k})$. Comme $z(h) = R \Longrightarrow A = R/2\mathrm{ch}(\frac{r}{k})$. La solution est ainsi

$$r(z) = \frac{R}{\mathrm{ch}(\frac{d}{2k})}\mathrm{ch}(\frac{r}{k}). \quad \mathbf{1.0p}$$

Exercice II (10p)

1. Voir TD et cours. **2.0p**
2. Nous avons $\boxed{1.0p}$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{B}\wedge\vec{r}\right)\\
&= \frac{B_0}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{k}\wedge[x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}]\right)\\
&= \frac{B_0}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\left(x_1\vec{j}-x_2\vec{i}\right) = \frac{B_0}{2}\left|\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix}-x_2\\ x_1\\ 0\end{matrix}\right. = \frac{B_0}{2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial x_2}\right)\vec{k} = B_0\vec{k}. \quad \mathbf{1.0p}
\end{aligned}
$$

3. $\vec{E}=0 \Longrightarrow \varphi = Cst = 0$ ce qui implique $V=-q\vec{v}\cdot\vec{A}$ **0.5p**. D'où, le lagrangien $\boxed{3.0p}$

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2\right)+q\vec{v}\cdot\vec{A}. \quad \mathbf{0.5p}
$$

Comme $\vec{A}=\frac{B_0}{2}\vec{k}\wedge\left(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}\right)=\frac{B_0}{2}\left(x_1\vec{j}-x_2\vec{i}\right)$ **1.0p**, nous avons

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2\right)+q\frac{B_0}{2}\left(-\dot{x}_1x_2+x_1\dot{x}_2\right). \quad \mathbf{1.0p}
$$

4. Les équations de lagrange nous donnent $\boxed{1.75p}$

$$
\begin{aligned}
q\frac{B_0}{2}\dot{x}_2 - m\ddot{x}_1 + q\frac{B_0}{2}\dot{x}_2 &= 0 \Longrightarrow \ddot{x}_1-\omega_0\dot{x}_2 \quad \mathbf{0.75p}\\
-q\frac{B_0}{2}\dot{x}_1 - m\ddot{x}_2 - q\frac{B_0}{2}\dot{x}_1 &= 0 \Longrightarrow \ddot{x}_2+\omega_0\dot{x}_1 = 0 \quad \mathbf{0.75.p}\\
\ddot{x}_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Le mouvement selon Oz est un mouvement uniforme. **0.25p** $\boxed{2.25p}$

5.

$$
\ddot{x}_2+\omega_0\dot{x}_1 = 0 \Longrightarrow \dot{x}_2 = -\omega_0x_1+K
$$

avec $K=0$ car $\dot{x}_2(0)=0$, ce qui implique

$$
\ddot{x}_1+\omega_0^2x_1 = 0 \Longrightarrow x_1 = A\sin(\omega_0t-\psi) \quad \mathbf{0.5p}.
$$

Comme $x_1(0)=0=A\sin\psi \Longrightarrow \psi=0$ et $\dot{x}(0)=v_{0\perp}=A\omega_0 \Longrightarrow A=v_{0\perp}/\omega_0 \Longrightarrow$

$x_1(t)=\frac{v_{0\perp}}{\omega_0}\sin\omega_0t$ **0.75p**.

$$
\ddot{x}_2 = -\omega_0v_{0\perp}\cos\omega_0t \Longrightarrow \dot{x}_2 = -v_{0\perp}\sin\omega_0t+K
$$

avec $K = 0$ car $\dot{x}_2(0) = 0$. Aussi $x_2 = \frac{v_{0\perp}}{\omega_0}\cos\omega_0 t + K$ avec $K = -\frac{v_{0\perp}}{\omega_0}$ car $x_2(0) = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{v_{0\perp}}{\omega_0}\left(\cos\omega_0 t - 1\right)$. **1.0p**

Prière de considérer justes les cas où l'on trouve dans les expression k au lieu de k^2, en raison de l'erreur de frappe dans l'épreuve bien que cette dernière soit corrigée séance tenante.

Exercice III (4p)

0.75p

1. L'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ et le lagrangien est égal à $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \alpha|q|$.

   Comme $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q} = m\dot{q} \Longrightarrow \mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{2m} + \alpha|q|$ **0.5p**.

   $\mathcal{H}$ est une intégrale première car $\mathcal{H}$ ne dépend pas explicitement du temps. **0.25p**

0.5p

2. Les valeurs limites de q sont données par $\mathcal{H}(q, p = 0) = \alpha|q| = E \Longrightarrow q_{min} = -E/\alpha$ et $q_{max} = E/\alpha$ **0.5p**.

1.25p

3. Comme le système est conservatif, alors $S(q; P = E) = W(q; P = E) - Et$. Les équations de Hamilton-Jacobi

$$\mathcal{H}(q, \frac{\partial S}{\partial q}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \textbf{0.25p}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \alpha|q| = E \Longrightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{2m(E - \alpha|q|)}. \quad \textbf{0.5p}$$

   La variable action J est donnée par

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial W}{\partial q}dq \quad \textbf{0.25p} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(+\int_{-E/\alpha}^{+E/\alpha}\sqrt{2m(E - \alpha|q|)}dq - \int_{E/\alpha}^{-E/\alpha}\sqrt{2m(E - \alpha|q|)}dq\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-E/\alpha}^{E/\alpha}\sqrt{2m(E - \alpha|q|)}dq \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

   Prière de considérer les réponses avec le facteur $1/2\pi$ au lieu de $1/\pi$ correcte à cause de l'erreur de frappe sur l'épreuve.

1.5p

4. En prenant $a = E$ et $b = \alpha$, nous avons

$$
\begin{aligned}
J = \frac{1}{\pi}\int_{-E/\alpha}^{E/\alpha}\sqrt{2m(E-\alpha|q|)}dq &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{E/\alpha}\sqrt{2m(E-\alpha q)}dq \quad \textbf{0.5p}\\
&= \frac{2\sqrt{2m}}{\pi}\times\frac{2}{3\alpha}E^{3/2} = \frac{4\sqrt{2m}}{3\pi\alpha}E^{3/2}\\
\Longrightarrow E &= \left(\frac{3\pi\alpha}{4\sqrt{2m}}J\right)^{2/3} \quad \textbf{0.5p}
\end{aligned}
$$

La fréquence est ainsi égale à $\omega = \partial E/\partial J = \frac{2}{3}\left(\frac{3\pi\alpha}{4\sqrt{2m}}\right)^{2/3} J^{-1/3} = \frac{\pi\alpha}{2\sqrt{2mE}}$ **0.5p**

Prière de considérer les réponses avec le facteur $1/2\pi$ au lieu de $1/\pi$ correcte à cause de l'erreur de frappe sur l'épreuve.

Table des matières

Table des figures