Table des matières

1 Analyse Numérique **5**
1.1 Introduction 5
1.1.1 Les problèmes d'évaluation numérique de nombres : 5
1.1.2 Les problèmes d'évaluation numérique de fonctions 6
1.2 Approximations et erreurs 6
1.2.1 Opérations arithmétiques et erreurs 6
1.2.2 Erreurs absolues et erreurs relatives 9

2 Recherche des racines d'une fonction **11**
2.1 Position du problème 11
2.1.1 Exemples d'équations non linéaires simples à résoudre : 11
2.2 Séparation des racines et approche graphique 11
2.3 Méthode de dichotomie 11
2.4 Approximations successives 13
2.5 Méthode de Lagrange ou de la sécante 14
2.6 Méthode de Régula-falsi ou de la fausse position 14
2.7 Méthode de Newton-Raphson 15

3 Résolution des systèmes linéaires **17**
3.1 Exemples d'application des systèmes linéaires : 17
3.1.1 Notations matricielles 19
3.1.2 Quelques matrices particulières 20
3.1.3 Système linéaire 21
3.2 Méthode d'élimination 21
3.2.1 Généralités 21
3.2.2 Méthode de résolution directe des systèmes triangulaires : . . 22
3.2.3 Méthode d'élimination de Gauss 23
3.2.4 Méthode de Gauss Jordan 26
3.3 Factorisation LU 27
3.4 Méthode de Cholesky 28
3.4.1 Algorithme de la méthode de Cholesky 29
3.5 Méthodes itératives 29
3.5.1 Généralités 29

WWW.TALB24.COM

3.5.2 Méthodes itératives de type affi ne 30
3.5.3 Méthodes itératives associées à une décomposition de A 30

4 Interpolations **35**
4.1 Construction de P_n 35
4.1.1 Résolution de (S) 35
4.1.2 Interpolation de Lagrange 36
4.2 Approximation au sens des moindres carrées 36
4.2.1 Introduction 36
4.2.2 Droite aux moindres carrées 37
4.2.3 Polynômes aux moindres carrées 37

5 Notions d'intégration numérique **39**
5.1 Introduction 39
5.2 Méthodes classiques 39
5.2.1 Formule des trapèzes 40
5.2.2 Formule de Simpson 40
5.3 Formules de quadrature de Gauss 42
5.4 Méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles . 44
5.4.1 Introduction 44
5.4.2 Problème de Cauchy 44
5.5 Méthode de Taylor 45
5.6 Méthode d'Euler 46
5.6.1 Estimation d'erreur et convergence de la méthode d'Euler . . . 47
5.6.2 Méthode de la tangente améliorée 49
5.6.3 Méthode d'Euler Cauchy 49
5.6.4 Algorithme de Runge Kutta d'ordre 2 RK2 49
5.6.5 Méthode de Runge Kutta d'ordre RK4 50

WWW.TALIB24.COM

Chapitre 1
ANALYSE NUMÉRIQUE

1.1 Introduction

Définition 1 *L'analyse numérique est l'étude des méthodes permettant d'évaluer numériquement un ou des nombres, une ou des fonctions pour des problèmes rencontrés en économie, physique, astronomie, biologie,...etc.*

Parmi les problèmes fondamentaux, citons :

1.1.1 Les problèmes d'évaluation numérique de nombres :

1. Les systèmes linéaires
   Résoudre par exemple100 équations à 100 inconnues ne peut se faire à la main. Donc, il est préférable d'utiliser une méthode numérique pour la recherche de la solution. Un système linéaire s'écrit sous la forme

   $$Ax = b,$$

   où A est une matrice carrée d'ordre n à coefi cients réels ou complexes, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ et x un vecteur inconnu.

2. Les équations non linéaires
   Chercher les racines d'une équation non linéaire à la main n'est pas toujours possible. Par exemple, on peut tout au plus encadrer une racine de $e^x = 10 - x$. Les équations non linéaires s'écrivent sous la forme

   $$\begin{cases} F(x) = 0, & F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ équation transcendante} \\ P_n(x) = 0, & P_n \text{ polynôme de degré } n, \text{ équation algébrique.} \end{cases}$$

3. Limite de suite ou série

   $$c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

4. Calcul d'une intégrale

   $$\int_0^{0.3} e^{-x^2} dx.$$

WWW.TALIB24.COM

5. Recherche de valeurs propres d'une matrice

Chercher $\lambda \in \mathbb{R}$ solution de l'équation $Ax = \lambda x$, où A est une matrice carrée d'ordre n et x un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

1.1.2 Les problèmes d'évaluation numérique de fonctions

1. Résolution numérique d'équations différentielles

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

2. Equations intégrales

$$y(x) = \alpha + \int_0^x f(t, y(t))\, dt.$$

3. Equations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} -\Delta f = g & \text{dans } \Omega \\ f_{/\Gamma} = 0 & \Gamma = Fr(\Omega). \end{cases}$$

1.2 Approximations et erreurs

Un ordinateur travaille avec des approximations finies des nombres réels (nombre fini de chiffres après la virgule, les nombres sont bornés en valeur absolue). Ainsi les données seront "arrondies". Nous aurons aussi une perte de chiffres significatifs dans les opérations élémentaires. Si l'algorithme comporte un grand nombre d'opérations, l'accumulation des erreurs d'arrondi peut avoir des effets desastreux sur le résultat. On dit qu'un algorithme (méthode) est stable s'il est peu sensible à l'accumulation des erreurs d'arrondi.

1.2.1 Opérations arithmétiques et erreurs

Quand on fait de l'analyse numérique, il y a plusieurs sources d'erreurs en plus de celles causées par les opérations arithmétiques inexactes que fait l'ordinateur.

Erreurs de troncature

Le terme erreur de troncature vient du fait que les méthodes numériques sont le plus souvent comparées à la troncature des séries de Taylor. Par exemple, on approche e^x par le polynôme cubique

$$P_3(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

alors que pour calculer e^x on a besoin de calculer la série infinie

$$e^x = P_3(x) + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On voit que l'approximation de e^x par un polynôme cubique est inexacte. L'erreur est dû à la troncature et pourtant nous devons nous contenter par une approximation.

WWW.TALIB24.COM

Erreurs d'arrondi

Dans un ordinateur, les nombres réels mis à part les entiers sont le plus souvent représentés avec une imprécision. Les calculateurs numériques utilisent souvent les nombres en virgule flottante avec une longueur finie. On appelle l'erreur due à cette imperfection **erreur d'arrondi.**

Il y a d'autres erreurs :

1. Erreurs dues au problème d'origine, par exemple pour un problème physique modélisé par une équation mathématique, nous avons toujours des coeffi cients qui sont mesurés donc donnés avec une imperfection.

2. Erreurs de propagation : ils s'accummulent le long de la succession des étapes dans le processus itératif.

Calcul en virgule flottante

Les nombres réels sont représentés en **virgule flottante normalisée.** les nombres enrégistrés en mémoire sont de la forme

$$\pm 0.d_1 d_2 ... d_k \times 10^q \tag{1.1}$$

avec

1. $k \in \mathbb{N}, \ \ q \in \mathbb{Z}, \ \ d_i \in \mathbb{N}, \ \ \forall i = 1, 2, ..., k.$

2. $0 \leq d_i \leq 9 \quad \forall i = 1, 2, ..., k.$

3. $d_1 \neq 0$ sauf si le nombre est nul.

4. $-N < q < N.$

Les entiers k et N qui définissent le format utilisé varient d'une machine à l'autre.

Définition 2 *Le nombre $d_1 d_2 ... d_k$ est* ***la mantisse***
Le nombre q est ***l'exposant.***

Remarque 3 *On a considéré ci-dessus une représentation des nombres en base 10 (système décimal), notons que les entrées-sorties se font presque toujours en base 10. En fait, l'informatique a introduit l'utilisation de trois autres systèmes : le binaire (base 2); l'octal (base 8) et l'hexadécimal (base 16).*
Pour simplifier la représentation on va se limiter au système décimal car les conclusions générales sont les mêmes pour les autres.

WWW.TALIB24.COM

Représentation d'un réel quelconque

Soit le nombre réel y (positif). Il peut s'écrire sous la forme

$$y = 0.d_1 d_2 ... d_k d_{k+1} ... \times 10^q$$

(On suppose que y ne dépasse pas la capacité de la machine et que $d_1 \neq 0$). Ce nombre y sera converti en un nombre réel $fl\,(y)$ représentable en machine. On coupe la mantisse du nombre réel après son $k^{ème}$ chiffre pour obtenir :

$$fl\,(y) = 0.d_1 d_2 ... d_{k-1} d'_k \times 10^q.$$

où d'_k est tel que

1. Si $d_{k+1} \geq 5$, on ajoutel à d_k et on tronque, c'est à dire que $d'_k = d_k + 1$.
2. Si $d_{k+1} < 5$, on tronque directement, c'est à dire que $d'_k = d_k$.

Exemple 4 27.39 *s'écrit* $+.2739 * 10^2$. *Si* $k = 3$, *ce nombre s'écrit* $.274\ 10^2$
-0.00124 *s'écrit* $-.1240 * 10^{-2}$
37000 *s'écrit* $+.3700 * 10^5$

Non associativité des opérations arithmétiques

Supposons que $k = 3$. Soient

$$\begin{aligned} x &= 8,22 = .822\ \ 10^1 \\ y &= 0,00317 = .317\ \ 10^{-2} \\ z &= 0,00432 = .432\ \ 10^{-2} \end{aligned}$$

On veut calculer $x + y + z$.

Le calcul de $(x + y) + z$ donne

$$x + y = .822\ \ 10^1 + .317\ \ 10^{-2} = (.822 + .000317)\,10 = .822317\ \ 10 = .822\ \ 10$$

$$(x + y) + z = .822\ \ 10 + .432\ \ 10^{-2} = (.822 + .000432)\,10 = .822432\ \ 10 = .822\ \ 10$$

Calculons maintenant $x + (y + z)$

$$\begin{aligned} y + z &= .317\ \ 10^{-2} + .432\ \ 10^{-2} = (.317 + .432)\,10^{-2} = .749\ \ 10^{-2} \\ x + (y + z) &= .822\ \ 10^1 + .749\ \ 10^{-2} = (.822 + .000749)\,10^1 = .822749\ \ 10 = .823\ 10 \end{aligned}$$

Il est clair que

$$(x + y) + z \neq x + (y + z)$$

WWW.TALIB24.COM

Remarque 5 *Dans une sommation des réels, et pour minimiser l'erreur, on somme en premier les termes ayant la plus petite valeur absolue.*

Exemple 6 *On veut résoudre l'équation*

$$x^2 - 1634x + 2 = 0$$

On prend $k = 10$. *On a* $\Delta' = 667487$ *et* $\sqrt{\Delta'} = 816,987760$. *Les racines sont*

$$\begin{aligned} x_1 &= 817 + \sqrt{\Delta'} \simeq 1633,998776 = .1633998776 \quad 10^4 \\ x_2 &= 817 - \sqrt{\Delta'} \simeq 0,0012240 = .1224 \quad 10^{-3} \end{aligned}$$

On a une perte de 6 chiffres significatifs sur x_2. *L'algorithme numérique doit être modifié*

$$x_1 x_2 = 2 \Longrightarrow x_2 = \frac{2}{x_1} = .1223991125 \quad 10^{-2}$$

1.2.2 Erreurs absolues et erreurs relatives

Si $\tilde{a}$ est une approximation de a, l'erreur absolue est définie par

$$\Delta_a = |\tilde{a} - a|$$

Lerreur relative est définie par

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{a}$$

et on écrit $a = \tilde{a} \pm \varepsilon$ pour indiquer que $|\Delta_a| < \varepsilon$.

Exemple 7 $a = 1,25 \qquad \tilde{a} = 1,2 \qquad \Delta_a = -0,05 = -5 \times 10^{-2} \qquad a = 1,2 \pm 5 \times 10^{-2} \qquad \delta_a = -0,04 = -4 \times 10^{-2}$

WWW.TALIB24.COM

Chapitre 2
RECHERCHE DES RACINES D'UNE FONCTION

2.1 Position du problème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, D une partie de $\mathbb{R}$. Le problème est de trouver tous les $\alpha \in D$ qui vérifient l'équation suivante

$$f(\alpha) = 0.$$

On dit aussi résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2.1.1 Exemples d'équations non linéaires simples à résoudre :

1. $D = \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = ax^2 + bx + c$
   l'équation $f(x) = 0$ a zéro, une ou deux solutions suivant le signe de Δ.
2. $D = \mathbb{R}_+$, $\qquad f(x) = \sin x$.
3. $D = \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$

2.2 Séparation des racines et approche graphique

On commence par tracer la courbe et localiser les racines. Séparer les racines consiste à trouver pour chaque racine un intervalle ne la contenant qu'elle et elle seule. Soit $[a, b]$ un intervalle contenant une seule racine α. on subdivise l'intervalle $[a, b]$ de la manière suivante $a = x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b$. On calcule $f(x_i) f(x_{i+1})$ pour $i = 0, ..., n-1$ jusqu'à ce que $f(x_i) f(x_{i+1}) < 0$. Alors $\alpha \in [x_i, x_{i+1}]$. On refait le même travail sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ jusqu'à ce que $|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$, ε étant l'erreur tolérée.

2.3 Méthode de dichotomie

On commence par rappeler le théorème des valeurs intérmédiaires :

Théorème 8 *Si f et continue ur $[a, b]$ et si $f(a) f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]a, b[$. Si de plus, f est strictement monotone sur $[a, b]$, alors α est unique.*

WWW.TALEB24.COM

Principe de la méthode : Après séparation des racines, la méthode de dichotomie consiste à partager l'intervalle contenant une racine α en deux intervalles de même longueur et à retenir comme nouvel intervalle celui où f change de signe.

On suppose que $f(a)f(b) < 0$, on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Soit $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ le milieu de l'intervalle $[a, b]$, on calcule

$$f(a_0)f(x_0)\begin{cases} = 0, & \alpha = x_0 \qquad \text{fin} \\ > 0 & \alpha \in]x_0, b_0[\quad \text{on pose } a_1 = x_0, b_1 = b_0 \\ < 0 & \alpha \in]a_0, x_0[\quad \text{on pose } a_1 = a_0, b_1 = x_0 \end{cases}$$

Donc $\alpha \in]a_1, b_1[$. On reprend le même travail, on construit ainsi une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$qui convergent vers α.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies comme suit :

$$\begin{cases} a_0 = a, \qquad b_0 = b \\ \text{Si} \quad f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) f(a_n) > 0 \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = b_n \\ \text{Si} \quad f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) f(a_n) < 0 \qquad a_{n+1} = a_n \qquad b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}. \\ \text{Si} \quad f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) f(a_n) = 0 \quad \alpha = \dfrac{a_n + b_n}{2}. \end{cases}$$

Théorème 9 *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de dichotomie converge vers α. Pour que cette suite approche α à ε près, on doit avoir*

$$n \geq \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \Big/ \log 2.$$

Remarque 10 *La deuxième partie du théorème permet d'avoir une idée du nombre d'itérations nécessaires pour avoir la racine à ε près.*

Proof. Montrons que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :

$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) f(a_n) > 0$ et

$b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) f(a_n) < 0$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$. Si on pose $u_n = b_n - a_n$, On a $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ et par suite $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$.

Donc $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$.

On remarque que $u_n > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

La suite (a_n) est croissante. En effet, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{u_n}{2} > 0$

WWW.TALIB24.COM

ou $a_{n+1} - a_n = 0$.

La suite (b_n) est décroissante. En effet, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - b_n = \dfrac{-b_n + a_n}{2} = -\dfrac{u_n}{2} < 0$ ou $b_{n+1} - b_n = 0$.

De plus, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} b_n - a_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} = 0$.

Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et par conséquent, elles convergent vers la même limite $\mu \in \left]a, b\right[$.

La continuité de f sur $[a, b]$ implique

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(b_n) = f(\mu).$$

Comme $f(a_n) f(b_n) < 0$, alors $(f(\mu))^2 \leq 0$. Ce qui donne $f(\mu) = 0$. Par conséquent, $\mu = \alpha$.

$\forall \varepsilon > 0 \qquad |b_n - a_n| < \varepsilon$ si $n > \dfrac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2}$. ■

Exemple 11 *Approximation de* $\sqrt{5}$

Conclusion 12 *Les avantages de la méthode de dichotomie sont la certitude de sa convergence, sa programmation facile et la possibilité d'estimer à l'avance le nombre d'itérations nécessaires pour avoir la racine avec une précision donnée. Le seul inconvénient de cette méthode est sa lenteur, elle nécessite un très grand nombre d'itérations.*

Algorithme de la méthode de Dichotomie

Saisir a, b, ε tels que $f(a) * f(b) < 0$
  Tant que $|a - b| > \varepsilon$, répéter
    $c = \dfrac{a+b}{2}$
    Si $f(c) * f(a) = 0$ arrêter
    Sinon
     Si $f(c) * f(a) < 0$
     $b = c$
     Sinon $a = c$
     Fin de Si
    Fin de Si
  Fin de tant que

2.4 Approximations successives

Résoudre l'équation $f(x) = 0$ revient à trouver les points fixes d'une fonction F, c'est à dire trouver x solution de l'équation $F(x) = x$, où F est une fonction qui doit vérifier les conditions du théorème du point fixe ci-dessous :

WWW.TALIB24.COM

Théorème 13 *Si F est une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$ et si F est contractante, c'est à dire*

$$\exists k \in]0,1[\ \ tq \ \forall x_1, x_2 \in [a,b] \qquad |F(x_1) - F(x_2)| \leq k\,|x_1 - x_2|$$

Alors, l'équation $F(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [a,b]$. De plus, la suite définie par

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

converge vers α quand n tend vers l'∞.

2.5 Méthode de Lagrange ou de la sécante

Pour déterminer une racine de $f(x) = 0$, on choisit x_0 et x_1 au voisinage de la racine α et on trace la droite reliant $f(x_0)$ et $f(x_1)$. Soit x_2 le point d'intersection de cette droite avec l'axe ox, on a

$$\frac{x_1 - x_2}{f(x_1)} = \frac{(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}.$$

De cette relation, on tire $x_2 = x_1 - f(x_1)\dfrac{(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$. On continue ainsi pour avoir une meilleure estimation de α. Ainsi, on construit une suite

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}.$$

Exemple d'algorithme de la sécante

On se donne deux valeurs x_0 et x_1 au voisinage de α

Répéter

$x_2 = x_1 - f(x_1) * (x_0 - x_1) / [f(x_0) - f(x_1)]$

$x_0 = x_1$

$x_1 = x_2$

jusqu'à ce que $|f(x_2)| < \varepsilon$ où ε est l'erreur tolérée.

2.6 Méthode de Régula-falsi ou de la fausse position

Cette méthode est similaire à la méthode de bissection excepté qu'au lieu du milieu de l'intervalle, l'itération est prise à l'intersection de la droite reliant deux valeurs de $f(x)$ et l'axe ox.

Algorithme de Régula-falsi

Pour déterminer une racine de $f(x) = 0$, on se donne deux valeurs x_0 et x_1 encadrant une racine c-à-d telle que $f(x_0)\,f(x_1) < 0$

- Répéter

$x_2 = x_1 - f(x_1) * (x_0 - x_1) / [f(x_0) - f(x_1)]$

WWW.TALIB24.COM

Si $f(x_0)f(x_2) < 0$
$x_1 = x_2$
Sinon $x_0 = x_2$
- Tant que $|f(x_2)| < \varepsilon$ où ε est l'erreur tolérée.

Remarque 14 *La convergence de cette méthode est plus rapide que celle de la bissection.*

Nous donnons ci-dessous un tableau de comparaison des trois méthodes : bissection, Régula-falsi et la méthode de la sécante pour la résolution de

$$f(x) = 3x + \sin x - e^x$$

On démarre l'algorithme avec $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.

Itération	Bissection		Régula-falsi		méthode de la sécante	
	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	0.5	0.330704	0.470990	0.265160	0.470990	0.265160
2	0.25	-0.286621	0.372277	0.029533	0.372277	0.029533
3	0.375	0.036281	0.361598	$2.94 * 10^{-3}$	0.359904	$-1.29 * 10^{-3}$
4	0.3125	-0.121899	0.360538	$2.90 * 10^{-4}$	0.360424	$5.55 * 10^{-6}$
5	0.34375	-0.041956	0.360433	$2.93 * 10^{-5}$	0.360422	$3.55 * 10^{-7}$
Erreur	0.01667		$-1.17 * 10^{-5}$		$< -1 * 10^{-7}$	

La valeur exacte de la racine est 0.360421703. On observe que la vitesse de convergence de la méthode de la sécante est plus rapide alors que la méthode de bissection est la plus lente, Régula-falsi est intérmédaire.

2.7 Méthode de Newton-Raphson

Pour résoudre $f(x) = 0$, on part de $x_0 \in [a, b]$. L'équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par $y = (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)$. Soit x_1 L'intersection de cette tangente avec l'axe des x. on a

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

On continue le schéma par le calcul de x_2

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

WWW.TALB24.COM

qui converge vers la racine de $f(x) = 0$.

Algorithme de Newton

Pour determiner une racine de $f(x) = 0$, on se donne un x_0 qui est assez proche de la racine.

On calcule $f(x_0), f'(x_0)$.
Si $(f(x_0) \neq 0)$ et $(f'(x_0) \neq 0)$
Répéter
Prendre $x_1 = x_0$
Prendre $x_0 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.
Tant que $|x_0 - x_1| < \varepsilon$ ou $|f(x_0)| < \varepsilon$.

Remarque 15 *La méthode peut converger vers une autre racine ou diverger si le point initial n'est pas assez proche de la racine.*

Théorème 16 *Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $[a, b]$ telle que f' ne s'annulle pas. Si α est la seule racine de $f(x) = 0$. Alors il existe δ tel que si pour $x_0 \in [a, b]$ on a $|\alpha - x_0| < \delta$; la suite définie par la relation de reccurence*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

converge vers α.

WWW.TALIB24.COM

Chapitre 3

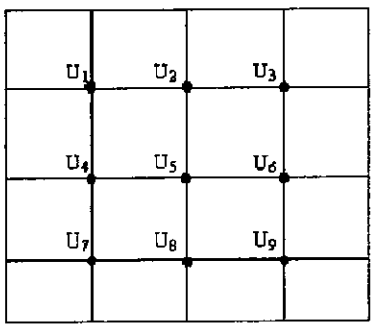
RÉSOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Les systèmes linéaires sont peut être les procédures les mieux adaptées du point de vue numérique pour la silmulation des situations réelles. On les rencontre dans l'analyse statistique et aussi pour la résolution d'équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles ...etc.

3.1 Exemples d'application des systèmes linéaires :

Dans cette section, nous présentons trois problèmes rencontrés en ingénierie qui sont résolus par des systèmes d'équations linéaires.

Exemple 17 *Trouver la température d'une dalle métalique dont les bords sont maintenus à une température constante. On estime $u_1, u_2, ..., u_9$ la température en différents points d'un maillage.*

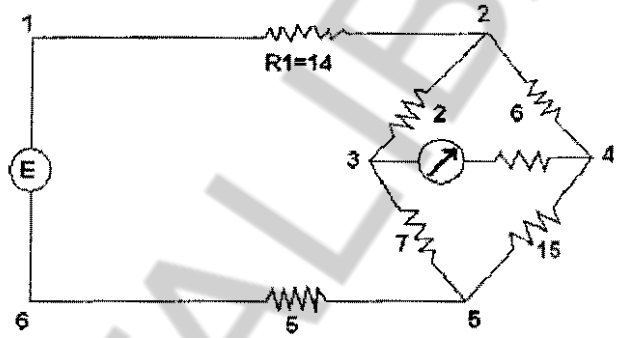


WWW.TALIB24.COM

La température $u(x,y)$ satisfait à l'équation de la chaleur qui peut être simplifiée en un système linéaire à coeffi cients constants

$$\begin{array}{rcl}
-4u_1 + u_2 + \quad +u_4 + & = & -50 \\
u_1 - 4u_2 + u_3 + \quad +u_5 & = & -50 \\
u_2 - 4u_3 + \quad +u_6 & = & -150 \\
u_1 \quad - 4u_4 + u_5 + \quad +u_7 & = & 0 \\
u_2 + \quad +u_4 - 4u_5 + u_6 + \quad +u_8 & = & 0 \\
u_3 \quad + u_5 - 4u_6 + \quad +u_9 & = & -100 \\
u_4 \quad - 4u_7 + u_8 & = & -50 \\
u_5 \quad + u_7 - 4u_8 + u_9 & = & -50 \\
u_6 \quad + u_8 - 4u_9 & = & -150
\end{array}$$

Exemple 18 *La figure ci-dessous montre un réseau éléctrique avec 7 résistances. Un voltage de 5.0 Volts est appliqué aux noeuds 1 et 6. On utilise les deux lois connues en électricité :*

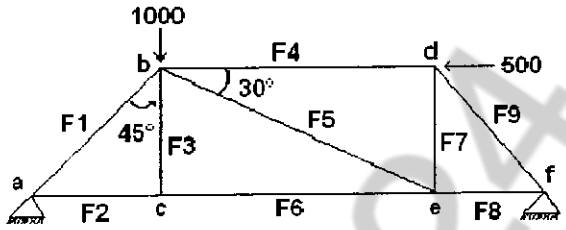


Loi de Kirchhoff's : La somme de toutes les intensités dans un noeud est nulle.
Loi de Ohm's : L'intensité i_{jk} à travers une résistance est égale au voltage qui la traverse divisé par sa résistance, $(V_j - V_k)/R_{jk}$.
Ce qui donne 11 équations à 11 inconnues.

$$\begin{array}{rcl}
i_{12} - i_{23} - i_{24} & = & 0 \\
i_{23} + \quad -i_{34} - i_{35} & = & 0 \\
i_{24} + i_{34} \quad - i_{45} & = & 0 \\
i_{35} + i_{45} - i_{56} & = & 0 \\
14i_{12} \quad + V_2 & = & 0 \\
2i_{23} \quad - V_2 + V_3 & = & 0 \\
6i_{24} \quad - V_2 \quad + V_4 & = & 0 \\
0.1i_{34} \quad - V_3 + V_4 & = & 0 \\
7i_{35} \quad - V_3 \quad + V_5 & = & 0 \\
15i_{45} \quad - V_4 + V_5 & = & 0 \\
5i_{56} \quad - V_5 & = & 0
\end{array}$$

WWW.FALIB24.COM

Exemple 19 *Une poutre supportant des charges est composée entièrement de triangles*
Dans cet exepmle, il y a 6 joints (a, b, c, d, e, f) et 9 membres. On cherche la force agissant en chaque joint dans le plan xy. Les forces agissant sur la poutre sont comme dans la figure.



De la loi de conservation des forces: Les sommes de toutes les forces agissant horizontalement et verticalement sur les joints sont nulles, on déduit les 9 équations

$$\begin{array}{rrcl}
\textit{sur b horizontalement} & \cos 45° F_1 - F_2 - \cos 30° F_5 & = & 0 \\
\textit{sur b verticalement} & \sin 45° F_1 + F_3 + \sin 30° F_5 & = & -1000 \\
\textit{sur c horizontalement} & F_2 \quad - F_6 & = & 0 \\
\textit{sur c verticalement} & - F_3 & = & 0 \\
\textit{sur d horizontalement} & F_4 - \sin 45° F_9 & = & 0 \\
\textit{sur d verticalement} & F_7 + \cos 45° F_9 & = & 0 \\
\textit{sur e horizontalement} & \cos 30° F_5 + F_6 - F_8 & = & 0 \\
\textit{sur e verticalement} & \sin 30° F_5 + F_7 & = & 500 \\
\textit{sur f horizontalement} & F_8 + \cos 45° F_9 & = & 0.
\end{array}$$

3.1.1 Notations matricielles

Une matrice A à n lignes et m colonnes est appelée matrice $n \times m$, elle est notée

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}.$$

L'ensemble des matrices $n \times m$ est noté $\mathcal{M}(n, m)$. Quand on veut préciser qu'elle est à coeffi cients réels (resp. complexes), on la note $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, m)$ (resp. $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, m)$).

Remarque 20 *Quand $n = m$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n.*

WWW.TALIB24.COM

Opérations élémentaires

Addition et soustraction : Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$, alors

$$C = A + B = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} \text{ avec } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Multiplication : Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq r}}$, alors

$$\begin{aligned} C &= AB = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq r}} \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}. \\ C &= \lambda A = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} \text{ avec } c_{ij} = \lambda a_{ij}. \end{aligned}$$

La relation générale de $Ax = b$ est

$$b_i = \sum_{k=1}^{nb \text{ de colonnes}} a_{ik}x_k, \qquad i = 1, ..., nb \text{ de lignes}.$$

3.1.2 Quelques matrices particulières

Définition 21 *Une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elle est triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elle est diagonale si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Une matrice diagonale est aussi notée $A = diag\,(a_{ii})_{i=1,...,n}$.

Définition 22 *Une matrice de permutation P est la matrice dans laquelle on permute des lignes.*

WWW.TALIB24.COM

Définition 23 *La matrice Identité est donnée par*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1.3 Système linéaire

Un système linéaire de n équations à n inconnues s'écrit

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

que nous pouvons écrire sous forme matricielle

$$Ax = b$$

où

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}, \qquad x = (x_i)_{1\leq i\leq n}. \qquad \text{et} \quad b = (b_i)_{1\leq i\leq n}.$$

Exemple 24

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

est équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 14 \\ x_1 & - & 2x_2 & & & = & -7 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 2. \end{array} \right.$$

3.2 Méthode d'élimination

3.2.1 Généralités

Les systèmes à résoudre sont de la forme $Ax = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n, x est le vecteur à chercher et b est un vecteur donné.

Définition 25 *On appelle méthode directe de résolution numérique d'un système linéaire, une méthode permettant d'évaluer la solution en un nombre fini d'opérations élémentaires* $(+, -, :, *)$, *en effectuant des transformations sur le système de départ.*

WWW.TALIB24.COM

Exemple 26 *Méthode de Cramer : Si* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ *. Pour trouver la solution* x *du système linéaire* $Ax = b$*, on calcule* $n+1$ *déterminants et on a*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \quad \text{où} \quad \begin{array}{ll} (A_j)_{ik} = a_{ik} & \text{si } k \neq j \\ (A_j)_{ij} = b_j & \end{array}.$$

Remarque 27 *C'est une méthode qu'on n'utilise jamais dans la pratique car elle nécessite* $\simeq n\,[(n+1)!]$ *opérations élémentaires. Pour* $n = 10$*, on a besoin de* 406.868.000 *opérations.*

3.2.2 Méthode de résolution directe des systèmes triangulaires :

Supposons qu'on veut résoudre le système triangulaire supérieur suivant

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 6x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

De la dernière équation on calcule x_3 qu'on met dans la deuxième équation. Ce qui nous permet de calculer x_2. En mettant x_2 et x_3 dans la première équation, on obtient x_1. De manière générale, Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice triangulaire supérieure telle que $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, ..., n$. On a

$$Ax = b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, ..., n.$$

Or, $a_{ij} = 0$ pour $i > j$. Donc

$$Ax = b \Leftrightarrow \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, ..., n. \tag{3.1}$$

Pour $i = n$, on obtient

$$a_{nn}x_n = b_n \qquad \text{ce qui donne } x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Pour $i = n-1$, on obtient

$$a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n = b_{n-1}.$$

x_n étant déjà calculé, on a

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}}.$$

WWW.TALIB24.COM

Ainsi de suite, on calcule les composantes de x dans l'ordre décroissant des indices c-à-d de x_n à x_1 par ce qui suit :
Supposons qu'on a calculé $x_n, x_{n-1}, ..., x_{p+1}$. De la formule (3.1), on a pour $i = p$,

$$\sum_{j=p}^{n} a_{pj}x_j = b_p.$$

En isolant le terme d'indice p dans la sommation, on obtient

$$a_{pp}x_p + \sum_{j=p+1}^{n} a_{pj}x_j = b_p.$$

D'où

$$x_p = \frac{b_p - \sum\limits_{j=p+1}^{n} a_{pj}x_j}{a_{pp}}.$$

Algorithme :

$x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$

Pour $p = n-1, ..., 1$

$x_p = \dfrac{b_p - \sum\limits_{j=p+1}^{n} a_{pj}x_j}{a_{pp}}.$

Exercise 28 *Ecrire l'algorithme de résolution de $Ax = b$ dans le cas où A est triangulaire inférieure.*

3.2.3 Méthode d'élimination de Gauss

Cette méthode consiste à transformer le système à résoudre à un système triangulaire supérieur. Considérons l'exemple suivant

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 15 \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 13 \end{aligned}$$

L'écriture matricielle est

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

On travaille avec la matrice augmentée

$$A/b = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & \vdots & 15 \\ -3 & -1 & 4 & \vdots & 8 \\ 1 & -1 & 3 & \vdots & 13 \end{pmatrix}$$

WWW.TALIB24.COM

Dans la première étape d'élimination de Gauss, on pose $A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$ et on élimine les coeffi cients sous diagonaux de la première colonne

$$\begin{array}{r} \\ (3/4)\,l_1 + l_2 \quad \longrightarrow \\ -\,(1/4)\,l_1 + l_3 \quad \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & \vdots & 15 \\ 0 & -2.5 & 4.75 & \vdots & 19.25 \\ 0 & -0.5 & 2.75 & \vdots & 9.25 \end{pmatrix}$$

En fait, a_{1j} reste intact pour $j = 1, 2, 3$, $a_{i1} = 0$ pour $i = 2, 3$ et a_{ij} devient $a_{ij} - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}$ pour i, $j = 2$ et 3 . Ceci donne une nouvelle matrice qu'on note $A^{(2)}$ et un nouveau second membre $b^{(2)}$. Ensuite, on élimine les coeffi cients sous diagonaux de la deuxième colonne

$$-\,(-0.5/-2.5)\,l_2 + l_3 \quad \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & \vdots & 15 \\ 0 & -2.5 & 4.75 & \vdots & 19.25 \\ 0 & 0 & 1.80 & \vdots & 5.40 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne le système $A^{(3)}x = b^{(3)}$ de matrice triangulaire supérieure.

Définition 29 *On appelle pivot l'élément a_{kk}^{k} de la colonne pour laquelle on veut faire apparaitre des zéros sous la diagonale.*

Remarque 30 *Le pivot peut être nul. Dans ce cas, on devra permuter deux lignes pour échanger le pivot contre un autre non nul.*

Algorithme de Gauss sans permutations

Début

Pour $k = 1$ à $n - 1$ faire

Pour $i = k + 1$ à n faire

Pour $j = k + 1$ à n

$a_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj}$

Fin pour j

$b_i = b_i - \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k$

Fin pour i

Fin pour k;

Pour calculer la solution par substitution par retour

$x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$

Pour $i = n - 1$ à 1

$x_i = b_i$

Pour $j = i + 1$ à n

$x_i = x_i - a_{ij} x_j$

WWW.TALIB24.COM

Fin pour j
$x_i = \dfrac{x_i}{a_{ii}}$
Fin pour i.
Fin

Méthode de Gaus avec stratégie de pivot partiel

Si à une étape k le pivot est nul, afin d'éviter une division par 0, il est nécessaire de permuter la ligne du pivot avec l'une des suivantes. De manière générale, on permute avec la ligne qui contient le plus grand pivot en valeur absolue.

Algorithme de Gauss avec stratégie de pivot partiel

A l'algorithme précédent, on rajoute deux parties, une correspondant à la recherche du pivot et la deuxième à la permutation des deux lignes.

Début
Pour $k = 1$ à $n - 1$ faire
Recherche du maximum (nouveau pivot)
max $= |a_{kk}|$
$l = k$
Pour $i = k + 1$ à n faire
Si max $< |a_{ik}|$ alors
max $= a_{ik}$
$l = i$
Fin de Si
Fin pour i
Permutation de la $k^{ème}$ ligne et de la $l^{ème}$ ligne
Pour $j = k$ à n faire
max $= a_{ik}$
$a = a_{lj}$
$a_{lj} = a_{kj}$
$a_{kj} = a$
Fin pour j
$a = b_k$
$b_k = b_l$
$b_l = a$

Remarque 31 *Lorsqu'on effectue la méthode de Gauss sans stratégie de pivot, cela revient matriciellement à chaque étape k de multiplier la matrice $A^{(k)}$ par une matrice $M^{(k)}$*

$$A^{(k+1)} = M^{(k)} A^{(k)},$$

WWW.TALIBZA.COM

où

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -l_{k+1k} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -l_{nk} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } l_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}. \tag{3.2}$$

On a finalement

$$A^{(n)} = M^{(n-1)} M^{(n-2)} \dots M^{(k)} \dots M^{(1)} A = MA \tag{3.3}$$

3.2.4 Méthode de Gauss Jordan

Elle revient à chercher une matrice M tel que MA soit diagonale. On l'utilise pour le calcul de l'inverse d'une matrice.

Exemple 32 *Calcul de l'inverse de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On augmente la matrice par la matrice identité

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

A chaque étape, on ramène le pivot à 1 et on procède comme dans Gauss mais en éliminant aussi les éléments surdiagonaux.
Etape 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Etape 2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

WWW.TALIB24.COM

Etape 3 :

$$\begin{pmatrix} & & & \vdots & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & & & \end{pmatrix}.$$

La matrice inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

3.3 Factorisation LU

Chaque matrice $M^{(k)}$ donnée par (3.2) est inversible. Sa matrice inverse est donnée par

$$\left(M^{(k)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & l_{k+1k} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & l_{nk} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice M de (3.3) est inversible et on a

$$A = M^{-1}A^{(n)} = LU.$$

U est la matrice triangulaire de la dernière étape de Gauss et

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{a_{k+1k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & \cdots & \frac{a_{nk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & \cdots & \frac{a_{nn-1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} & 1 \end{pmatrix}.$$

WWW.TALIB24.COM

3.4 Méthode de Cholesky

Cette méthode est particulièrement adaptée aux matrices définies positives.

Définition 33 *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive si ${}^tA = A$ et*
1. ${}^txAx > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ et
2. ${}^txAx > 0 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Proposition 34 *(Décomposition de Cholesky) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Alors, il existe une unique matrice B triangulaire inférieure d'éléments diagonaux tous positifs telle que $A = BB^T$.*

La résolution du système $Ax = b$ revient à résoudre les systèmes à matrices triangulaires inférieure et supérieure $By = b$ et $B^Tx = y$.

Trouver, par la méthode de Cholesky, la solution du système à matrice symétrique définie positive $Au = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

où $b_{ii} > 0$, $1 \leq i \leq 3$, et cherchons les vecteurs colonnes de B. L'égalité $A = BB^T$ implique

$$\begin{array}{lll} b_{11}^2 = 3, & b_{21}b_{11} = 1, & b_{31}b_{11} = -1, \\ b_{21}^2 + b_{22}^2 = 4, & b_{31}b_{21} + b_{32}b_{22} = -1, & \\ b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 = 4. & & \end{array}$$

Ce qui donne

$$\begin{array}{ll} b_{11} = \sqrt{3}, & b_{21} = 1/b_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b_{31} = -1/b_{11} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ b_{22} = \sqrt{4 - b_{21}^2} = \sqrt{\frac{11}{3}}, & b_{32} = (-1 - b_{31}b_{21})/b_{22} = \frac{7}{\sqrt{33}}, \\ b_{33} = \sqrt{4 - b_{31}^2 - b_{32}^2} = \sqrt{\frac{24}{11}}. & \end{array}$$

D'où la matrice B. L'application de la méthode de descente à $By = b$ et de la méthode de remontée à $B^Tx = y$ donnent respectivement

$$(y_1, y_2, y_3) = \left(0, \sqrt{\frac{3}{11}}, \frac{12}{33}\sqrt{66}\right) \text{ et } (x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 2).$$

WWW.TALIB24.COM

3.4.1 Algorithme de la méthode de Cholesky

Le calcul des éléments d'une matrice triangulaire inférieure B telle que $A = BB^T$ s'obtient par identification des éléments de A et de BB^T. En effet, si nous posons

$$A = (a_{ij}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

alors

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{jk} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{ik} b_{jk}, \text{ car } b_{ij} = 0, i < j.$$

Ainsi,

$$a_{i1} = b_{i1} b_{11}, \ 1 \leq i \leq n.$$

Comme les éléments diagonaux de B sont strictement positifs, on a

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}} \text{ et } b_{i1} = a_{i1}/\sqrt{a_{11}}, \ 2 \leq i \leq n.$$

Pour $j \geq 2$, on a

$$b_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2} \text{ et } b_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk}\right) / b_{jj} \text{ si } i \geq j+1.$$

Algorithme de Cholesky

```
Pour j = 1 à n
  Pour i = j à n
    Pour k = 1 à j-1
        a_ij = a_ij - a_ik * a_jk
    Fin sur k
    Si i = j alors a_ij = √a_ii
    Si i ≠ j alors a_ij = a_ij / a_ij
    Fin du test
  Fin sur i
Fin sur j
```

Le tableau récupéré $A(n,n)$ correspond à une matrice dont la partie triangulaire inférieure contient les éléments de B.

3.5 Méthodes itératives

3.5.1 Généralités

Soit A une matrice inversible. On appelle méthode itérative de résolution de $Ax = b$ toute méthode de construction d'une suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que $x_m \xrightarrow{m \to \infty} x$ solution de $Ax = b$.

WWW.TALIB24.COM

3.5.2 Méthodes itératives de type affine

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{m+1} = x_m + M\left(b - Ax_m\right) \end{cases}$$

M est inversible, elle ne varie pas au cours des itérations.

Nous énonçons ci-dessous une définition qui assure la convergence des méthodes itératives avec n'importe quel point initial.

Définition 35 *Une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est à diagonale strictement dominante si*

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i, j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, ..., n.$$

Proposition 36 *Sous la condition que A est à diagonale strictement dominante, les méthodes itératives que nous verrons dans la suite convergent.*

3.5.3 Méthodes itératives associées à une décomposition de A

Définition 37 *On appelle décomposition de A tout découpage de A en deux matrices M et N tel que $A = M - N$ où M est inversible.*

La méthode itérative de type affine associée à A s'écrit

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{m+1} = x_m + M^{-1}\left(b - Ax_m\right). \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{array}{lll} & Ax & = & b \\ \Leftrightarrow & (M-N)\,x & = & b \\ \Leftrightarrow & Mx & = & b + Nx \\ \Leftrightarrow & x & = & M^{-1}b + M^{-1}Nx \\ & & = & M^{-1}b + M^{-1}\left(M - A\right)x \\ & & = & M^{-1}b + x - M^{-1}Ax \\ \Leftrightarrow & x & = & x + M^{-1}\left(b - Ax\right) \end{array}$$

Définition 38 *On appelle matrice d'itération et note B la matrice définie par*

$$B = I - M^{-1}A = M^{-1}N.$$

Dans la suite, on note

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ on supposera } a_{ii} \neq 0\ \forall i,$$

WWW.TALIB24.COM

$$E = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$A = D - E - F.$$

Méthode de JACOBI

Exemple 39 *Considérons le système linéaire*

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 5. \end{aligned}$$

On réorganise les équations de telle sorte à avoir une matrice à diagonale strictement dominante.

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Des trois équations, on obtient

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{11}{6} + \tfrac{2}{6}x_2 - \tfrac{1}{6}x_3 \\ x_2 &= \tfrac{5}{7} + \tfrac{2}{7}x_1 - \tfrac{2}{7}x_3 \\ x_3 &= \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{2}{5}x_2. \end{aligned}$$

On part d'une valeur iniale (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *qu'on met dans les équations précédentes, on obtient* (x_1^1, x_2^1, x_3^1) *et ainsi de suite, on obtient un schéma de la forme*

$$\begin{aligned} x_1^{m+1} &= \tfrac{11}{6} + \tfrac{2}{6}x_2^m - \tfrac{1}{6}x_3^m \\ x_2^{m+1} &= \tfrac{5}{7} + \tfrac{2}{7}x_1^m - \tfrac{2}{7}x_3^m \\ x_3^{m+1} &= \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5}x_1^m + \tfrac{2}{5}x_2^m. \end{aligned}$$

On s'arrête lorsque la différence entre deux vecteurs successifs est inférieure ou égale à une tolérance ε. *Pour notre exemple, en démarant de* $x^0 = (0, 0, 0)$, *on obtient*

	1ère *itératiom*	2ère *itératiom*	$\cdots$	9ère *itératiom*
x_1	1.833	2.038	$\cdots$	2.000
x_2	0.714	1.181	$\cdots$	1.000
x_3	0.200	0.852	$\cdots$	1.000

La solution exacte est $(2, 1, 1)$.

WWW.TALIB24.COM

Dans la méthode de Jacobi, on prend $M = D$ et $N = E + F$
Le schéma itératif de la méthode est

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{m+1} = x_m + D^{-1}(b - Ax_m). \end{cases}$$

Du schéma itératif, on tire

$$\begin{aligned} (x_{m+1})_i &= (x_m)_i + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x_m)_j\right) \\ & \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} a_{ij}(x_m)_j\right) \end{aligned}$$

D'où l'algorithme suivant :
Algorithme :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné et } N \text{ donné} \\ \text{Pour } m = 1, ..., N \\ \qquad \text{Pour } i = 1, ..., n \\ \qquad\qquad (x_{m+1})_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}(x_m)_j\right]. \end{cases}$$

On calcule successivement les composantes de x_{m+1} jusqu'à ce que la norme de la différence de deux vecteurs successifs soit inférieure à un ε donné ou lorsque $m = N$.

Méthode de Gauss-Seidel

Exemple 40 *On reprend le même exemple que pour la méthode de Jacobi. Les valeurs sont calculées par le schéma suivant :*

$$\begin{aligned} x_1^{m+1} &= \tfrac{11}{6} + \tfrac{2}{6}x_2^m - \tfrac{1}{6}x_3^m \\ x_2^{m+1} &= \tfrac{5}{7} + \tfrac{2}{7}x_1^{m+1} - \tfrac{2}{7}x_3^m \\ x_3^{m+1} &= \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5}x_1^{m+1} + \tfrac{2}{5}x_2^{m+1}. \end{aligned}$$

La méthode ainsi est plus rapide comme on le voit sur le tableau suivant :

	1ère*itératiom*	2ère*itératiom*	$\cdots$	6ère*itératiom*
x_1	1.833	2.069	$\cdots$	2.000
x_2	1.238	1.002	$\cdots$	1.000
x_3	1.062	1.015	$\cdots$	1.000

WWW.TALIB24.COM

Dans la méthode de Gauss Seidel, on prend $M = D - E$ et $N = F$
Le schéma itératif de la méthode est

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{m+1} = x_m + (D-E)^{-1}(b - Ax_m). \end{cases}$$

Du schéma itératif, on tire

$$\begin{array}{rcl} x_{m+1} & = & x_m + (D-E)^{-1}(b - Ax_m) \\ (D-E)\,x_{m+1} & = & (D-E)\,x_m + (b - Ax_m) \\ & & (D-E)\,x_m + (b - ((D-E) - F)\,x_m) \\ & & (D-E)\,x_m + b - (D-E)\,x_m + Fx_m \\ & & b + Fx_m \end{array}$$

D'où

$$a_{ii}(x_{m+1})_i + \sum_{j<i} a_{ij}(x_{m+1})_j = b_i - \sum_{j>i} a_{ij}(x_m)_j$$

Donc,

$$(x_{m+1})_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j<i} a_{ij}(x_{m+1})_j - \sum_{j>i} a_{ij}(x_m)_j\right]$$

D'où l'algorithme suivant :
Algorithme :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné et } N \text{ donné} \\ \text{Pour } m = 1, ..., N \\ \qquad \text{Pour } i = 1, ..., m \\ \qquad\qquad (x_{m+1})_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum\limits_{j<i} a_{ij}(x_{m+1})_j - \sum\limits_{j>i} a_{ij}(x_m)_j\right]. \end{cases}$$

On calcule successivement les composantes de x_{m+1} jusqu'à ce que la norme de la différence de deux vecteurs successifs soit inférieure à un ε donné ou lorsque $m = N$.

Remarque 41 *Si A est une matrice définie positive alors la méthode de Gauss_ Seidel converge.*

Méthode de relaxation

On prend $M = \dfrac{1}{\omega}D - E$ et $N = \dfrac{1-\omega}{\omega}D + F$ avec ω constante non nulle (constante de relaxation).

Remarque 42 *Avec $\omega = 1$ on retrouve la méthode de Gauss-Seidel.*

WWW.TALIB24.COM

Le schéma itératif de la méthode est

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{m+1} = x_m + \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}(b - Ax_m). \end{cases}$$

Du schéma itératif, on tire

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m + \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}(b - Ax_m) \\ \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)x_{m+1} &= \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)x_m + b + (-D + E + F)\,x_m \\ (D - \omega E)\,x_{m+1} &= \omega b + (D - \omega E - \omega D + \omega E + \omega F)\,x_m \\ &= \omega b + ((1-\omega)\,D + \omega F)\,x_m \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} Dx_{m+1} &= \omega b + \omega E x_{m+1} + ((1-\omega)\,D + \omega F)\,x_m \\ x_{m+1} &= (1-\omega)\,x_m + \omega D^{-1}(b + Ex_{m+1} + Fx_m) \end{aligned}$$

Donc,

$$(x_{m+1})_i = (1-\omega)\,(x_m)_i + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j<i} a_{ij}\,(x_{m+1})_j - \sum_{j>i} a_{ij}\,(x_m)_j\right]$$

D'où l'algorithme suivant :
Algorithme :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné et } m \text{ donné} \\ \text{Pour } m = 1, ..., N \\ \qquad \text{Pour } i = 1, ..., n \\ \qquad\qquad (x_{m+1})_i = (1-\omega)\,(x_m)_i + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j<i} a_{ij}\,(x_{m+1})_j - \sum_{j>i} a_{ij}\,(x_m)_j\right]. \end{cases}$$

Les matrices d'itérations de

$$\begin{aligned} &Jacobi && L_J = D^{-1}(E+F) \\ &Gauss - Seidel && L_1 = (D-E)^{-1}F \\ &\text{Re}laxatiom && L_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right). \end{aligned}$$

WWW.TALIB24.COM

Chapitre 4
INTERPOLATIONS

Soit f une fonction sur $[a, b]$ dont on connait seulement les $n+1$ valeurs $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ aux points distincts $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$. On interpole f aux points x_i veut dire qu'on cherche un polynôme P de degré $n+1$ tel que $P(x_i) = y_i$, pour $i = 0, ..., n$.

Théorème 43 *Il existe un polynôme P_n unique de degré $\leq n$ tel que $P(x_i) = y_i$, pour $i = 0, ..., n$.*

Proof. Soit $P_n = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$.
$P(x_i) = y_i$, pour $i = 0, ..., n$ est équivalent à

$$(S) \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + ... + a_n x_0^n & = & y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + ... + a_n x_1^n & = & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + ... + a_n x_n^n & = & y_n \end{cases}$$

Le problème est de chercher $a_0, a_1, ..., a_n$.

Or, le determinant du système est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_n^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^2 \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0.$$

Donc, le système (S) admet une solution unique. ■

4.1 Construction de P_n

4.1.1 Résolution de (S)

Méthode rarement utilisée dans la pratique.

WWW.TALIB24.COM

4.1.2 Interpolation de Lagrange

Le $i^{ème}$ polynôme de Lagrange $i = 0, 1, ..., n$ est

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} \\ &= \prod_{\substack{j\neq i \\ j=0}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \end{aligned}$$

On a $d^\circ L_i = n$; $\quad L_i(x_i) = 1$; $\quad L_i(x_j) = 0 \quad$ si $j \neq i$.
Le polynôme P_n est donné par la formule

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x).$$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} P_n(x_k) &= y_k, \quad k = 0, ..., n \\ d^\circ P_n &\leq n. \end{aligned}$$

4.2 Approximation au sens des moindres carrées

4.2.1 Introduction

En général, les expériences fournissent une suite de valeurs y_i en des points $x_i, i = 1, ..., n$. La disposition de ces points donne une idée sur la fonction f telle que $f(x_i) = y_i, i = 1, ..., n$. Par exemple lorsque les points sont presque alignés, la fonction f est une droite qu'on peut écrire $f(x) = ax + b$.

Remarque 44 *La fonction f peut être choisie sous différentes formes. Par exemple*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_1 x + b_1}{x + c_1} \\ f(x) &= a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \\ f(x) &= a_1 e^{a_2 x} + b_1 e^{b_2 x} ...etc. \end{aligned}$$

La méthode des moindres carrées consiste à chercher les constantes a_i et b_i telles que

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2$$

soit minimum.

Nous nous bornerons dans ce cours au cas d'approximation par une droite et par un polynôme.

WWW.TALIB24.COM

4.2.2 Droite aux moindres carrées

Théorème 45 *Soit une suite* (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$ *où les* x_i *sont tous distincts. Il existe une droite unique réalisant la meilleure approximation de ces points au sens des moindres carrées.*

Proof. On cherche $\bar{a}$ et $\bar{b}$ telles que la quantité

$$h(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

soit minimum.
Si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ existent alors

$$\frac{\partial h}{\partial a}(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\partial h}{\partial b}(\bar{a}, \bar{b}) = 0.$$

Ce qui donne les deux équations

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned} \tag{4.1}$$

Lorsque les x_i sont tous distincts, (4.1) admet une solution unique $(\bar{a}, \bar{b})$. Pour s'assurer que $(\bar{a}, \bar{b})$ est un minimum, on fait le developpement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $(\bar{a}, \bar{b})$. On obtient

$$h(\bar{a} + \alpha, \bar{b} + \beta) = h(\bar{a}, \bar{b}) + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\alpha\beta \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta^2 n\right).$$

Le deuxième terme du second membre est toujours positif. Ce qui donne le resultat.
■

4.2.3 Polynômes aux moindres carrées

Théorème 46 *Soit une suite* (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$ *où les* x_i *sont tous distincts. Il existe un polynôme unique* $\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + ... + \bar{a}_p x^p, p < n$ *réalisant la meilleure approximation de ces points au sens des moindres carrées. C'est à dire que* $a = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, ..., \bar{a}_p)$ *rend minimum la fonction*

$$h(a) = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + ... + a_p x_i^p - y_i)^2.$$

WWW.TALIB24.COM

Chapitre 5
NOTIONS D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

5.1 Introduction

Pour ses calculs en physique et en astronomie, Newton est le premier à utiliser des formules de quadrature, suivi par ses successeurs anglais (Cotes 1711, Simpson 1743). Euler, dans son gigantesque traité (Inst. Calculi Integralis 1768, 1769, 1770, Opera XI-XIii), met toute son ingeniosité à rechercher des primitives analytiques. Cependant, de nombreuses intégrales restent encore non résolues (exemples $\int \frac{e^x}{x} dx$ et $\int \frac{1}{\ln x} dx$), de nombreux calculs en astronomie (perturbations des orbites planétaires) contraignent Gauss (1814) à intensifier la théorie des formules de quadrature. Les programmes qui ont tourné sur les premiers ordinateurs furent en grande partie les calculs d'intégrales: ces problèmes sont les plus faciles à programmer.

Problème : Etant donné une fonction continue f sur un intervalle borné $[a, b]$, on cherche à calculer l'intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

La primitive F de f est en général inconnue car f n'est connue qu'en un certain nombre de points $x_i \in [a, b]$, $i = 0, ..., n$ ou bien f est connue, mais son expression est trop compliquée.

5.2 Méthodes classiques

Soit f la fonction continue à intégrer sur l'intervalle $[a, b]$, connue seulement aux points $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. On considère P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points (x_i)

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x),$$

où $L_i(x)$, $i = 0, 1, ..., n$ sont les plynômes de Lagrange. On intègre $P_n(x)$ sur $[a, b]$ pour obtenir une valeur approchée de $I(f)$ donnée par

$$I_{n+1}(f) = \int_a^b P_n(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i),$$

WWW.TALEB24.COM

avec

$$a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx.$$

5.2.1 Formule des trapèzes

Pour $n = 1$,on pose $x_0 = a$, $x_1 = b$ et $h = b - a$. Le polynôme d'interpolation de Lagrange s'écrit

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

La valeur approchée de l'intégrale de f est

$$\begin{aligned} I_2(f) &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \right] dx \\ &= \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_1) \right]. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathbf{dx} \simeq \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) \right], \qquad \textbf{Formule des trapèzes.}$$

En utilisant cette formule sur chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, ..., n-1$, on obtient

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathbf{dx} \simeq \frac{h}{2} \left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right], \qquad \textbf{Formule des trapèzes généralisée.}$$

Exemple 47 *La valeur exacte de* $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *est* 2. *Par la formule des trapèzes, on obtient*

$$I_T = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \right) = 2.25.$$

Avec $n = 4$, *on a* $h = 1; x_0 = 1; x_1 = 2; x_0 = 3; x_0 = 4$. *La formule des trapèzes généralisée donne*

$$I_T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + 2\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \right) = 2.05.$$

5.2.2 Formule de Simpson

Pour $n = 2$, on pose $x_0 = a$, $x_2 = b$, $x_1 = a + h$ et $h = \frac{b-a}{2}$. Le polynôme d'interpolation de Lagrange s'écrit

$$\begin{aligned} P_2(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2). \end{aligned}$$

WWW.TALIB24.COM

et

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx.$$

Calculons le premier terme de l'intégrale de $P_2(x)$. On a

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0)\,dx = \left(\int_a^{a+2h} (x-(a+h))(x-(a+2h))\,dx\right)\frac{f(x_0)}{2h^2}.$$

On pose $t = x-(a+h)$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0)\,dx &= \left(\int_{-h}^{h} t(t-h)\,dt\right)\frac{f(x_0)}{2h^2}\\ &= \frac{h}{3} f(x_0).\end{aligned}$$

Après calcul des deux autres membres, on obtient

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathbf{dx} \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right], \qquad \textbf{Formule de Simpson.}$$

En utilisant cette formule pour $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, on obtient

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathbf{dx} \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right],$$

Formule de Simpson généralisée.

Remarque 48 *Il faut un nombre impair de points pour pouvoir utiliser la méthode de Simpson généralisée, ce qui correspond à n pair.*

Exemple 49 *On reprend le même exemple. Par la formule de Simpson, on a $x_0 = 1; x_1 = \frac{5}{2}; x_2 = 4$ et $h = \frac{3}{2}$. On obtient*

$$I_S = \frac{3}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + 4\frac{1}{\sqrt{5/2}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) = 2.12.$$

Avec $n = 6$, on a $h = \frac{1}{2}; x_0 = 1; x_1 = 3/2; x_2 = 2; x_3 = 5/2; x_4 = 3; x_5 = 7/2$ et $x_6 = 4$. La formule de Simpson généralisée donne

$$I_S = 2.000468.$$

WWW.TALIB24.COM

Erreur de la méthode

Définition 50 *On appelle erreur e_h la différence entre la valeur exacte $I(f)$ et la valeur approchée notée I_{app}*

$$e_h = I(f) - I_{app}.$$

1. Cas de la formule des trapèzes : Si f est de classe $C^2[a,b]$, alors

$$e_h = -\frac{h^2}{12} f''(\theta)(b-a), \qquad \theta \in]a,b[.$$

Si on pose $k = \frac{1}{12}(b-a) \underset{x\in[a,b]}{nax} |f''(x)|$, il est clair que

$$|e_h| \leq Kh^2.$$

On dit alors que la méthode est d'ordre 2.

2. Cas de la formule de Simpson : Si f est de classe $C^4[a,b]$, alors

$$e_h = -\frac{h^4}{180} f^{(4)}(\theta)(b-a), \qquad \theta \in]a,b[.$$

Si on pose $k = \frac{1}{180}(b-a) \underset{x\in[a,b]}{nax} \left|f^{(4)}(x)\right|$, il est clair que

$$|e_h| \leq Kh^4.$$

La méthode est d'ordre 4.

5.3 Formules de quadrature de Gauss

L'expression analytique de f étant donnée, on approche $\int_a^b f(x)\,dx$ par $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ en cherchant les coeffi cients poids α_i et les abscisses x_i, $i = 0, ..., n$.

On commence par le cas simple de l'approximation de $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ par une formule à deux termes contenant quatre paramètres inconnus a, b, x_1, x_2, on écrit

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = af(x_1) + bf(x_2).$$

Cette formule est valable pour tout polynôme de degré 3. Donc, elle est vraie en particulier pour $f(x) = x^3$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x$ et $f(x) = 1$. Calculons l'intégrale

WWW.TALIB24.COM

pour ces quatre fonctions :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^3 dx &= 0 &= ax_1^3 + bx_2^3 \\
\int_{-1}^{1} x^2 dx &= \tfrac{2}{3} &= ax_1^2 + bx_2^2 \\
\int_{-1}^{1} x dx &= 0 &= ax_1 + bx_2 \\
\int_{-1}^{1} dx &= 2 &= a + b
\end{aligned}$$

Multiplions la troisième équation par x_1^2 et soustrayons la de la première équation, on obtient

$$0 = 0 + b\left[x_2^3 - x_2 x_1^2\right] = bx_2\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 + x_1\right).$$

Cette équation est satisfaite si $b = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = x_2$ ou $x_2 = -x_1$. Les trois premiers choix sont à exclure car ils réduisent notre formule de quadrature à un seul terme. On prend alors $x_1 = -x_2$. Ce qui donne

$$\begin{aligned}
a &= b = 1 \\
x_2 &= -x_1 = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = 0.5773
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = f(-0.5773) + f(0.5773).$$

Exercise 51 *Trouver les six paramètres de l'approximation par quadrature de Gauss à 3 termes de* $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

Nous donnons ci-dessous, la table des paramètres de la quadrature de Gauss jusqu'à quatre termes

Nombre de termes	Valeurs de x_i	poids α_i
2	− 0.57735027	1.0
	0.57735027	1.0
3	− 0.77459667	0.55555555
	0	0.88888889
	0.77459667	0.55555555
4	− 0.86113631	0.34785485
	− 0.33998104	0.65214515
	0.33998104	0.65214515
	0.86113631	0.34785485

WWW.TALIB24.COM

Supposons que les bornes d'intégration sont a et b. Pour pouvoir utiliser la table de quadrature de Gauss, on doit faire un changement de variables afin de ramener les bornes d'intégration à -1 et 1. On pose

$$x = \frac{(b-a)\,t + b + a}{2} \text{ ce qui donne } dx = \frac{b-a}{2}dt.$$

Donc,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)\,t + b + a}{2}\right)dt.$$

De manière générale, la quadrature de Gauss peut être étendue à plus de deux termes.

Définition 52 *Une formule de quadrature à n termes est donnée par*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i),$$

où les valeurs x_i et les poids α_i , $i = 1, 2, ..., n$ sont à calculer.

En exprimant que la formule de quadrature de Gauss est vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$, on obtient un système de $2n$ équations à $2n$ inconnues :

$$\alpha_1 x_1^k + ... + \alpha_n x_n^k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \text{ impair} \\ \frac{2}{k+1} & \text{pour } k \text{ pair.} \end{cases}$$

La résolution de ce système n'est pas facile.

5.4 Méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles

5.4.1 Introduction

Après avoir présenté le cadre théorique, nous donnerons, dans ce chapitre, les bases de la construction des schémas numériques pour la résolution d'équations différentielles d'ordre 1.

5.4.2 Problème de Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Soit $(x_0, y_0) \in U$.

On cherche un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant x_0 tel qu'il existe $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ vérifiant:

1. $y'(x) = f(x, y(x)) \qquad \forall (x, y(x)) \in U,\ x \in I,$
2. $y(x_0) = y_0$

WWW.TALIB24.COM

Ce problème est appelé problème aux conditions initiales ou Problème de Cauchy..

Remarque 53 *Les méthodes utilisées donneront des solutions approximatives. La différence entre les méthodes réside en l'erreur commise.*

Avant de démarer la résolution numérique d'un équation différentielle, il faut s'assurer de l'existence et de l'unicité de la solution. Pour cela, on énonce le théorème suivant :

On suppose que f est continue par rapport à ses deux variables, elle est lipschitzienne en y uniformément par rapport à x,ce qui veut dire qu'il existe $L > 0$ tel que

$$\|f(x,y) - f(x,\bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\| \qquad \forall x \in I, \forall y, \bar{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Alors le problème de Cauchy admet une solution unique.

Remarque 54 *L s'appelle la constante de Lipschitz. Si f admet une dérivée partielle par rapport à y bornée, alors f est lipschitzienne.*

Principe : On pose le problème

$$\begin{array}{ll} y'(x) = f(x,y), & x \in [a,b] \\ y(a) = y_0. & \end{array} \tag{5.1}$$

On considère une suite de points équidistants de $[a,b]$, $x_n = a+nh$, $n \in \{0,1,...,n\}$,où $h = (b-a)/n$ est le pas de discrétisation. On cherche alors à approcher $y(x_1), y(x_2), ..., y(x_n)$. Les valeurs approchées seront notées respectivement $y_1, y_2, ..., y_n$.

5.5 Méthode de Taylor

On suppose qu'il y a existence et unicité de la solution du problème (5.1) . On fait un développement de Taylor de y au point x_0 :

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 y"(x_0) + ... \tag{5.2}$$

On pose $f = f(x_0, y_0)$, $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$, alors

$$\begin{cases} y' = f \\ y" = f' = f_x + f_y f \\ y''' = f'' = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f \\ ..... \end{cases}$$

Ce qui donne

WWW.TALIB24.COM

$$y(x) = y_0+(x-x_0)f+\frac{1}{2}(x-x_0)^2(f_x+f_yf)+\frac{1}{6}(x-x_0)^3(f_{xx}+2f_{xy}f+f_{yy}f^2+f_xf_y+f_y^2f)+....$$

En posant

$$x - x_0 = h$$

et

$$T_k(x,y) = f(x,y) + \frac{h}{2!}f'(x,y) + ... + \frac{h^{k-1}}{k!}f^{k-1}(x,y), \quad k = 1, 2, ... \tag{5.3}$$

Pour trouver une approximation de la solution de l'équation différentielle (5.1), on utilise l'algorithme suivant :

1. On choisit un pas $h = \dfrac{b-a}{n}$. On pose $x_n = a + nh, \ n = 0, 1, ..., n$
2. On calcule les valeurs approchées y_n de $y(x_n)$ par la relation de récurrence

$$y_{n+1} = y_n + hT_k(x_n, y_n) \quad n = 0, 1, ..., n-1$$

où $T_k(x,y)$ est donné par (5.3).

Remarque 55 *Cet algorithme est dit d'ordre k*

Les algorithmes qui, pour trouver une approximation y_{n+1} de $y(x_{n+1})$, utilisent juste l'information sur y et y' aux points précédents x_n sont appelés des algorithmes à un pas.

Exercise 56 *Montrer que l'erreur commise en passant de n à $n+1$ est donnée par*

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_n) - y_n + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{k+1}(\zeta), \qquad \zeta \in (x_n, x_{n+1})$$

La quantité $E = \dfrac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{k+1}(\zeta)$ est appelée l'erreur locale de la méthode.

5.6 Méthode d'Euler

On appelle méthode d'Euler la méthode ci dessus avec $k = 1$.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\ E &= \frac{h^2}{2}y''(\zeta) \end{aligned}$$

WWW.TALIB24.COM

Résoudre par la méthode d'Euler:

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

Si on prend $h = 0.01$ on a:

$$y_{n+1} = y_n + hy_n = (1+h)y_n = 1.01y_n \quad et \quad E = 5 * 10^{-5}$$

$$\begin{array}{rcll} y(0.01) & = & 1.0101 & \qquad y_1 = 1.01y_0 = 1.01 \\ y(0.02) & = & 1.0202 & \qquad y_2 = 1.0201 \\ y(0.03) & = & 1.0305 & \qquad y_3 = 1.0303 \\ y(0.04) & = & 1.0408 & \qquad y_4 = 1.0406 \end{array}$$

Si on prend $h = .005$ on a

$$y_{n+1} = y_n + hy_n = (1+h)y_n = 1.01y_n \quad et \quad E \simeq 10^{-5}$$

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & 1.0050 \\ y_2 & = & 1.0100 \\ y_3 & = & 1.0151 \\ y_4 & = & 1.0202 \\ y_5 & = & 1.0253 \\ y_6 & = & 1.0304 \\ y_7 & = & 1.0356 \\ y_8 & = & 1.0408 = y(0.04) \end{array}$$

On voit que pour h plus petit on a plus de précision au point 0.040

Exercise 57 *Résoudre par la méthode de Taylor d'ordre 2 l'équation*

$$y' = -\frac{1}{x^2} - yx - y^2, \qquad y(1) = -1$$

dans l'intervalle $[1, 2]$. *On prend pour valeurs de* $h = \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$.

5.6.1 Estimation d'erreur et convergence de la méthode d'Euler

La méthode d'Euler s'écrit

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad n = 0, 1, ...$$

où $x_n = x_0 + nh$.

On note l'erreur de discrétisation

$$e_n = y(x_n) - y_n.$$

WWW.TALIB24.COM

Théorème 58 *On suppose les hypothèses donnant l'existence et l'unicité de la solution sont vérifiées. De plus, on suppose que y solution de (5.1) est de classe C^2 sur $[a,b]$. On pose L la constante de Lipschitz et $n = \max_{x\in[a,b]} |y''(t)|$. Alors, on a*

$$|e_n| \leq \frac{nh}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right).$$

Le développement de Taylor de $y(x_{n+1})$ donne

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) \quad \text{où} \quad x_n \leq \xi_n \leq x_{n+1}$$

Le terme $\frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$ est appelé erreur de discrétisation locale. C'est l'erreur commise en approchant $y(x_{n+1})$ à partir de la solution en x_n en supposant que $y(x_n)$ et $y'(x_n)$ sont connues de manière exacte.

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) - y_n + hf(x_n, y_n) \\
&= e_n + h[f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)] + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) \\
&= e_n + h(y(x_n) - y_n)f_y(x_n, \zeta_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) \qquad \text{où } \zeta_n \in (y_n, y(x_n)) \\
&= e_n + he_n f_y(x_n, \zeta_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n)
\end{aligned}$$

Or

$$|f_y(x,y)| \leq L \qquad \text{et} \qquad |y''(x)| \leq M,$$

alors

$$|e_{n+1}| \leq (1 + Lh)\,|e_n| + \frac{1}{2}h^2 M.$$

On considère l'équation aux différences finies

$$u_{n+1} = (1 + Lh)u_n + \frac{1}{2}h^2 M, \qquad u_0 = 0$$

Il est clair que

$$\forall n \geq 0, u_n \geq |e_n|$$

En effet, pour $n = 0$ c'est trivial. On suppose que c'est vrai pour n. Alors

$$u_{n+1} = (1 + Lh)u_n + \frac{1}{2}h^2 M \geq (1 + Lh)\,|e_n| + \frac{1}{2}h^2 M \geq |e_{n+1}|.$$

Il suffi t donc de chercher la solution de l'équation aux différences finies

$$u_{n+1} = (1 + Lh)u_n + \frac{1}{2}h^2 M, \quad u_0 = 0$$

WWW.TALIB24.COM

Ce qui donne facilement

$$u_n = \frac{Mh}{2L}((1+Lh)^n - 1)$$

comme

$$e^{Lh} = 1 + Lh + \frac{L^2h^2}{2} + .. \geq 1 + Lh$$

alors

$$u_n \leq \frac{Mh}{2L}(e^{Lnh} - 1) = \frac{Mh}{2L}(e^{(b-a)L} - 1).$$

5.6.2 Méthode de la tangente améliorée

Elle consiste à utiliser le schéma suivant

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

où $y_{n+\frac{1}{2}}$ est donnée par la méthode d'Euler

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n).$$

5.6.3 Méthode d'Euler Cauchy

Le schéma est le suivant

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})\right)$$

où y^*_{n+1} est estimé par la méthode d'Euler

$$y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n).$$

5.6.4 Algorithme de Runge Kutta d'ordre 2 RK2

L'idée est de passer de x_n à x_{n+1} en introduisant un point intermédiaire $x_{n1} = x_n + \alpha h$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$. et approcher $y(x_{n1})$ par Euler

$$y_{n1} = y_n + \beta hf(x_n, y_n)$$

puis déduire y_{n+1} à partir.de l'algorithme

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + ak_1 + bk_2 \end{aligned}$$

avec a, b, α, β vérifiant certaines conditions.

WWW.TALIB24.COM

Avec $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, donc $a = 0$ et $b = 1$. L'algorithme s'écrit:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ y_{n+1} &= y_n + k_2 = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)) \end{aligned}$$

On retrouve l'algorithme de la tangente améliorée.

Avec $\alpha = 1$, donc $a = b = \dfrac{1}{2}$. L'algorithme s'écrit:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h, y_n + k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

On retrouve l'algorithme d'Euler Cauchy.

5.6.5 Méthode de Runge Kutta d'ordre RK4

On passe de x_n à x_{n+1} en introduisant deux points intérmédiaires. On aura donc

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + \frac{k_3}{2}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

c'est l'algoritme le plus utilisé dans la pratique.

WWW.TAKIB24.COM