Table des matières

Chapitre 1

Rappels

Dans tout ce chapitre $I\!K$ désignera l'un des ensembles $I\!R$ *ou* $\mathbb{C}$.

1.1 Intégrale au sens de Riemann

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

1.1.1 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Définition 1.1.1 *: Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a, b]$ dans $I\!K$.*

On dit que f est une fonction en escaliers s'il existe un entier naturel n non nul, des constantes réelles $a_o = a < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I\!K$ tels que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$ et pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$, on a $f(x) = \alpha_i$.

Définition 1.1.2 *: Soit $f : [a, b] \longrightarrow I\!K$ une fonction en escaliers.*

On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ la quantité

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i - a_{i-1})$$

Remarque 1.1.1 *:*

1. *$I(f)$ ne dépend pas des $(a_i)_i$ ni des valeurs $(f(a_i))_i$.*

   Dans toute la suite $I(f)$ est notée $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f$.

2. *Désignons par $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escaliers de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. L'application*

$$\begin{array}{rccl} I & : & \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & f & \longmapsto & \int_a^b f(x)dx \end{array}$$

   est une forme linéaire. Elle est de surcroît continue sur $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ muni de la norme de la convergence uniforme. En effet

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

3. *Pour $f,\ g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, nous avons les propriétés suivantes*

   (a) *Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $f\leq g$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.*

   (b) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Définition 1.1.3 *: Soit $f\ :\ [a,b]\to\mathbb{K}$ une fonction quelconque. On dit que f est intégrable au sens de Riemann si*

$$\begin{array}{c} \forall\varepsilon>0,\ \exists\phi_\varepsilon\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}),\exists\psi_\varepsilon\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+)\ / \\ |f-\phi_\varepsilon|\leq\psi_\varepsilon\ \text{ et }\ \int_a^b\psi_\varepsilon\leq\varepsilon. \end{array} \tag{1.1}$$

Désignons par $\mathcal{I}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions, définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui sont intégrables au sens de Riemann.

Remarque 1.1.2 *: Si nous prenons dans (1.1) ε égal à $\frac{1}{n}$, alors il existe une suite de fonctions en escaliers $(\phi_n)_n$ telle que la suite $\left(\int_a^b\phi_n\right)_n$ soit de Cauchy, donc convergente vers une limite (indépendante du choix de la suite $(\phi_n)_n$).*

Ce constat nous permet de définir, et de noter, l'intégrale de f au sens de Riemann sur $[a,b]$ par

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_n \int_a^b \phi_n.}$$

On a les résultats suivants

Proposition 1.1.1 *Toute fonction intégrable au sens de Riemann est bornée.*

Proposition 1.1.2 *1. L'application*

$$\begin{aligned} I \ : \ \mathcal{I}([a,b], I\!K) &\longrightarrow I\!K \\ f &\longmapsto \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue.

2. Pour f et $g \in \mathcal{I}([a,b], I\!K)$, on a $fg \in \mathcal{I}([a,b], I\!K)$.

Proposition 1.1.3 *: Soit $f,\ g \in \mathcal{I}([a,b], I\!R)$.*

1. On a

$$\begin{aligned} I(f) &= \sup\{I(\varphi)/\ \varphi \in \mathcal{E}([a,b], I\!R) \text{ et } \varphi \le f\} \\ &= \inf\{I(\psi)/\ \psi \in \mathcal{E}([a,b], I\!R) \text{ et } f \le \psi\}. \end{aligned}$$

2. Si $f \ge g$, alors $I(f) \ge I(g)$.

Proposition 1.1.4 *: Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions d'éléments de $\mathcal{I}([a,b], I\!K)$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, alors*

$$f \in \mathcal{I}([a,b], I\!K) \text{ et } \int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n.$$

Remarque 1.1.3 *1. Quelques exemples de fonctions Riemann-intégrables*

(a) Les fonctions continues par morceaux ;

(b) Les fonctions monotones ;

(c) Les fonctions réglées (c'est-à-dire les limites uniformes de suites de fonctions en escaliers).

2. La limite simple d'une suite de fonctions Riemann-intégrable n'est pas nécessairement Riemann-inégrable.

3. La composée de deux fonctions Riemann-intégrables ne l'est pas obligatoirement.

1.1.2 Résultats essentiels de l'intégrale de Riemann

Soit $f \in \mathcal{I}([a,b], \mathbb{K})$. Il est clair que, pour tout $x \in [a,b]$, la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,x]$. Définissons, sur $[a,b]$, la fonction F par

$$x \in [a,b] \longmapsto F(x) = \int_a^x f.$$

Proposition 1.1.5 *1. La fonction F est lipschitzienne sur $[a,b]$.*

En effet

$$\forall x, y \in [a,b] \;:\; |F(x) - F(y)| \leq \|f\|_{sup} |x - y|.$$

2. Si f est continue à droite en $c \in [a,b[$ (resp. à gauche en $c \in]a,b]$), alors F est dérivable à droite (resp. à gauche) en c et

$$F_d'(c) = f(c) \text{ (resp. } F_g'(c) = f(c)\text{)}.$$

Corollaire 1.1.1 *: Si f est continue sur $[a,b]$, alors F est dérivable sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$, on a $F'(x) = f(x)$. Dans ce cas, on dit que F est une primitive de f.*

Proposition 1.1.6 *(Changement de variable) : Soient $\varphi \in C^1([\alpha,\beta], \mathbb{R})$ et $f \in C(\varphi([\alpha,\beta]), \mathbb{K})$. Alors*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Proposition 1.1.7 *(Intégration par parties) : Soient f et $g \in C^1([a,b], \mathbb{K})$. On a*

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g.$$

Proposition 1.1.8 *(Première formule de la moyenne) : Soient $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{I}([a,b], \mathbb{R}_+)$. Il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Proposition 1.1.9 *(Deuxième formule de la moyenne) : Soient f et $g \in C([a,b], \mathbb{R})$. On suppose que f est positive et décroissante. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b fg = f(a_+) \int_a^c g.$$

Pour les intégrales dépendants d'un paramètre, nous avons la proposition suivante

Proposition 1.1.10 : *Soit la fonction*

$$\begin{array}{rrcl} f : & J \times [a,b] & \longrightarrow & I\!K \\ & (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$$

où J est un intervalle non vide de $I\!R$.

1. *Si $f \in \mathcal{C}(J \times [a,b], I\!K)$, alors la fonction $t \longmapsto F(t) = \int_a^b f(t,x)dx$ est continue sur J ;*
2. *Si f et $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{C}(J \times [a,b], I\!K)$, alors F est dérivable sur J et*

$$\forall t \in J, \quad F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx.$$

1.2 Eléments de la théorie des cardinaux

1.2.1 Cardinaux

Définition 1.2.1 : *On dit que deux ensembles X et Y sont équipotents s'il existe une bijection entre eux. Et l'on écrit $card(X) = card(Y)$.*

Remarque 1.2.1 :

- *Il est évident qu'un ensemble est équipotent à lui même*
- *Si X, Y sont équipotents et Y, Z sont équipotents alors X, Z sont aussi équipotents*

Exemple 1.2.1 : *On vérifie par exemple que*

1. $card(I\!N) = card(\mathbb{Z}) = card(\mathbb{Q})$,
2. $card(I\!R) = card([0,1]) = card([0,1[)$,
3. *Pour tout ensemble X, $card(\mathcal{P}(X)) = card(\{0,1\}^X)$,*
4. *Pour tout ensemble X, $\mathcal{P}(X)$ et X ne sont jamais équipotents.*

Proposition 1.2.1 *: S'il existe une injection de X dans Y et une injection de Y dans X alors il existe une bijection entre X et Y. Donc $card(X) = card(Y)$.*

Définition 1.2.2 *(-Notation-) : Soient X, Y deux ensembles*

1. *S'il existe une injection de X dans Y, on note $card(X) \leq card(Y)$,*
2. *Si $card(X) \leq card(Y)$ et si X et Y ne sont pas équipotents, on note $card(X) < card(Y)$.*

Ainsi pour tout ensemble X, on a $card(X) < card(\mathcal{P}(X)) < card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))) \cdots$

Théorème 1.2.1 *La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur les cardinaux. Si X et Y sont deux ensembles quelconques, ils se trouvent toujours dans unc et unc seule des situations suivantes :*

$$card(X) < card(Y) \text{ ou bien } card(X) = card(Y) \text{ ou bien } card(X) > card(Y)$$

1.2.2 Dénombrabilité

Définition 1.2.3 *: Soit X un ensemble quelconque,*
(a) X est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$
(b) X est dit au plus dénombrable s'il est fini ou dénomrable
(c) Si $card(\mathbb{N}) < card(X)$, X est dit infini non dénomrable.

Ainsi $\mathbb{N}, 2\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, sont dénombrables
$\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ sont infinis non dénombrables.

Proposition 1.2.2 *:*

- *Une réunion indexée par un ensemble au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable*
- *Un produit fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.*

1.3 Limite supérieure et limite inférieure

Dans la suite $\overline{I\!R}$ désignera la droite achevée $\overline{I\!R} = I\!R \cup \{-\infty, +\infty\}$.

(i) $\overline{I\!R}$ est muni de l'ordre $(\leq)$ qui prolonge celui de $I\!R$ pour les réels et tel que

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad \forall x \in I\!R$$

(ii) $\overline{I\!R}$ est muni de la loi $(+)$ commutative qui prolonge celle de $I\!R$ et telle que

$$x + (+\infty) = +\infty \quad , \quad x + (-\infty) = -\infty \quad \forall x \in I\!R$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad et \quad (+\infty) + (-\infty) \; ou \; (+\infty) + (-\infty) \; ne \; sont \; pas \; d\acute{e}finis$$

(iii) $\overline{I\!R}$ est muni de la loi $(.)$ commutative qui prolonge celle de $I\!R$ et telle que

$$x.(\pm\infty) = \pm\infty \quad si \; x \in I\!R_+^*, \quad x.(\pm\infty) = \mp\infty \quad si \; x \in I\!R_-^*$$

$$(+\infty).(+\infty) = +\infty \quad , \quad (+\infty).(-\infty) = -\infty \quad et \quad 0.(\pm\infty) = 0$$

(iii) On munit $\overline{I\!R}$ de la topologie dont les ouverts sont les ensembles

$$]a, b[\; , \; [-\infty, b[\; , \;]a, +\infty] \quad et \; toute \; r\acute{e}union \; d'ensembles \; de \; ces \; types \; (a, b \; \in I\!R)$$

Définition 1.3.1 *: Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\overline{I\!R}$. On définit la limite supérieure de la suite $(x_n)_n$ par*

$$\limsup x_n = \limsup_n x_n = \inf_{n \geq 0}(\sup_{k \geq n} x_k) \in \overline{I\!R}$$

et on définit la limite inférieure de la suite $(x_n)_n$ par $\liminf f x_n = \liminf_n x_n = \sup_{n \geq 0}(\inf_{k \geq n} x_k) \in \overline{I\!R}$

Remarque 1.3.1 *: En fait $\limsup x_n$ est la limite de la suite décroissante $y_n = (\sup_{k \geq n} x_k)$*
et $\liminf x_n$ est la limite de la suite croissante $z_n = (\inf_{k \geq n} x_k)$

Proposition 1.3.1 *: Soit $f\ :\ \overline{I\!R} \longrightarrow \overline{I\!R}$ une fonction monotone et continue et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\overline{I\!R}$. Alors*

$$\begin{array}{llll} f(\limsup x_n) = \limsup f(x_n) & \textit{et} & f(\liminf x_n) = \liminf f(x_n) & \textit{si } f \textit{ est croissante} \\ f(\limsup x_n) = \liminf f(x_n) & \textit{et} & f(\liminf x_n) = \limsup f(x_n) & \textit{si } f \textit{ est décroissante} \end{array}$$

Remarque 1.3.2 *: Comme conséquence si on prend la fonction $f(x) = -x$ décroissante on a les relations*

$$\liminf\,(-x_n) = -\limsup x_n \ \ \textit{et} \ \ \limsup\,(-x_n) = -\liminf x_n$$

Proposition 1.3.2 *: on a aussi*

(a) Pour deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ d'éléments de $\overline{I\!R}_+$, simultanément majorées dans $[-\infty, +\infty[$ ou bien simultanément minorées dans $]-\infty, +\infty]$. Alors

$$\begin{array}{lll} \limsup\,(x_n + y_n) & \leq & \limsup x_n + \limsup y_n \\ \liminf\,(x_n + y_n) & \geq & \liminf x_n + \liminf y_n \end{array}$$

(b) Pour deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ d'éléments de $\overline{I\!R}_+$, simultanément majorées dans $[0, +\infty[$ ou bien simultanément minorées dans $]0, +\infty]$. Alors

$$\begin{array}{lll} \limsup\,(x_n y_n) & \leq & \limsup x_n \times \limsup y_n \\ \liminf\,(x_n y_n) & \geq & \liminf x_n \times \liminf y_n \end{array}$$

Chapitre 2

Intégrale de Lebesgue

2.1 Introduction

L'enseignement, au premier cycle universitaire, de l'intégrale de Riemann a permis de développer des outils permettant le calcul de surfaces ou de volumes, la résolution d'équations différentielles, l'estimation des sommes de séries et bien d'autres choses. Néanmoins cette théorie ne peut répondre aux multiples attentes des mathématiciens, physiciens ou ingénieurs.

Dans ce manuel, nous nous proposons d'exposer les principaux résultats de la théorie de l'intégrale de Lebesgue. Ceci nous permettera de travailler sur une classe de fonctions beaucoup plus riche que la classe des fonctions Riemann-intégrables. Grâce à la notion de mesure (qui sera définie par la suite), nous définirons la notion d'intégrale de Lebesgue sur des espaces beaucoup plus généraux que $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Nous rappelons que toute fonction continue, continue par morceaux ou réglée est Riemann-intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Toutefois le comportement des fonctions Riemann-intégrables vis-à-vis des limites pose problème. En effet la limite f d'une suite $(f_n)_n$ de fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ n'est pas forcément Riemann-intégrable sur

$[a,b]$. C'est le cas par exemple de la suite $(f_n)_{n>0}$ telle que

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Sa limite f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$. Et même si la limite f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, il n'est pas sûr que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Une illustration est donnée par la suite $(f_n)_{n>0}$ telle que

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ n & \text{si} \quad 0 < x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0$. Bien entendu, si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, alors celle-ci est Riemann-intégrable sur $[0,1]$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

Cependant, pour les intégrales impropres, le résultat précédent est faux. (*cf.* les exercices 2.8.1 et 2.8.2)

2.2 Ensembles mesurables. Mesures.

Définition 2.2.1 *Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On appelle tribu (ou σ-algèbre) sur X, un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ qui possède les propriétés suivantes :*

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) *Si* $A \in \mathcal{A}$, *alors* $A^c \in \mathcal{A}$

(où A^c *désigne le complémentaire de* A *dans* X*) ;*

iii) *Pour toute famille finie ou dénombrable* $(A_i)_{i\in I\subset \mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$, $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Remarques 2.2.1 *1. Il résulte de i) et ii) que* $X \in \mathcal{A}$ *;*

2. *Il découle de ii) et iii) que toute intersection finie ou dénombrable d'éléments de* $\mathcal{A}$ *est un élément de* $\mathcal{A}$ *;*
3. *Si* $A,\ B \in \mathcal{A}$ *alors* $A \backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Exemples 2.2.1 *1.* $\mathcal{P}(X)$ *est une tribu sur* X *;*

2. *Soient* $X = \{a, b, c\}$ *et* $E = \{a\}$. *La famille* $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, E, E^c\}$ *est une tribu sur* X.

Définition 2.2.2 *On appelle espace mesurable tout couple* $(X, \mathcal{A})$ *où* X *est un ensemble et* $\mathcal{A}$ *est une tribu sur* X. *Les éléments de* $\mathcal{A}$ *sont appelés ensembles mesurables.*

Remarque 2.2.1 *1. L'intersection d'une famille quelconque de tribus sur* X *est une tribu sur* X.

2. *Soit* $\mathcal{F}$ *une famille quelconque de sous-ensembles de* X. *L'intersection de toutes les tribus contenant la famille* $\mathcal{F}$ *est donc une tribu contenant* $\mathcal{F}$, *notée* $\sigma(\mathcal{F})$. *C'est en fait la plus petite tribu sur* X *contenant* $\mathcal{F}$. *Il est alors évident que toute tribu contenant* $\mathcal{F}$ *contient également* $\sigma(\mathcal{F})$.

Définition 2.2.3 *La tribu* $\sigma(\mathcal{F})$ *est appelée tribu engendrée par* $\mathcal{F}$.

Exemple 2.2.1 *Prenons* $X = \mathbf{R}^n$ *muni de sa topologie usuelle et* $\mathcal{F}$ *l'ensemble des ouverts de* $\mathbb{R}^n$. *Il est clair que* $\mathcal{F}$ *n'est pas une tribu car le complémentaire d'un ouvert n'est pas en général un ouvert. La tribu* $\sigma(\mathcal{F})$ *engendrée par* $\mathcal{F}$ *est appelée tribu de Borel ou tribu Borélienne sur* $\mathbb{R}^n$. *Elle est notée* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *et ses éléments sont appelés des Boréliens.*

En théorie d'intégration, nous serons amenés à travailler dans l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ muni des opérations usuelles avec les conventions suivantes :

1) $a \pm \infty = \pm\infty$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$;

2) $a \,.\, (\pm\infty) = \pm\infty$ *pour tout* $a > 0$;

3) $0 \,.\, (\pm\infty)$ est égal à 0 (nous verrons que l'intégrale d'une fonction infinie sur un ensemble de mesure nulle est nulle et l'intégrale d'une fonction nulle sur un ensemble de mesure infinie est nulle) ;

4) Les opérations $(+\infty) + (-\infty)$ et $(-\infty) + (+\infty)$ ne sont pas définies.

Définition 2.2.4 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. Pour toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i \in I \subset \mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables de X, deux à deux disjoints, on a

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{i\in I}} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i).$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est alors appelé espace mesuré.

Exemple 2.2.2 *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $a \in X$. On considère l'application*

$$\delta_a : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

définie pour tout $A \in \mathcal{A}$ par

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & si \quad a \in A \\ 0 & si \quad a \notin A. \end{cases}$$

C'est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$ appelée mesure de Dirac au point a.

Voici à présent des propriétés importantes d'une mesure positive ;

Proposition 2.2.1 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Soient $A,\ B \in \mathcal{A}$. Si $A \subset B$, alors*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

finie

2. *Soient $A,\ B \in \mathcal{A}$. Si $A \subset B$ et $\mu(A) < +\infty$, alors*

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A).$$

3. *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{A}$, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

4. *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

5. *Si $(B_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu(B_1) < +\infty$ alors*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n).$$

Démonstration :

1. On a $B = A \cup (B\backslash A)$ avec $A \cap (B\backslash A) = \emptyset$. Donc

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A) \tag{2.1}$$

   et par conséquent $\mu(A) \leq \mu(B)$.

2. Si $\mu(A) < +\infty$, on peut le soustraire des deux membres de (2.1), d'où le résultat.

3. Considérons

$$T_1 = A_1 \quad \text{et} \quad T_n = A_n \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

   Par une technique similaire à celle développée dans la solution de l'exercice 2.8.21, on vérifie aisément que

- $T_n \in \mathcal{A}$ et $T_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
- Les T_n sont deux à deux disjoints et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} T_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Par conséquent

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} T_n\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(T_n)\\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

4. Posons

$$E_1 = A_1 \text{ et } E_n = A_n \backslash A_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 2.$$

La suite $(E_n)_{n\geq 1}$ est telle que (*cf.* exercice 2.8.21)

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Les ensembles E_n étant deux à deux disjoints, il vient

$$\mu(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k).$$

Par passage à la limite, nous obtenons

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n)\\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)\\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right).\end{aligned}$$

5. Pour tout $n \geq 1$, posons $E_n = B_1 \backslash B_n$; Puisque la suite $(E_n)_n$ est croissante, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n).$$

Or $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = B_1 \backslash \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \right)$, donc

$$\mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\mu(B_1) - \mu(B_n) \right).$$

Comme $\mu(B_1) < +\infty$, il en résulte que

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n).$$

Définitions 2.2.1 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Si $\mu(X)$ est finie, on dit que μ est bornée (ou finie).*
2. *Si X est réunion dénombrable d'ensembles de mesures finies, on dit que μ est σ-finie.*
3. *Si $\mu(X) = 1$, on dit que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace probabilisé. Les éléments de X sont appelés des éventualités et ceux de $\mathcal{A}$ des événements.*

Définition 2.2.5 *Un ensemble $N \in \mathcal{A}$ est dit négligeable par rapport à μ (ou μ-négligeable) si $\mu(N) = 0$.*

Notons que s'il n'y a pas d'ambiguïté nous dirons que l'ensemble est négligeable au lieu de $\mu-$négligeable.

Proposition 2.2.2 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(S_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ensembles négligeables. Alors $S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$ est négligeable.*

Démonstration :
On a $S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n \in \mathcal{A}$ avec $\mu(S_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$. La proposition 2.2.1 entraîne

$$0 \leq \mu(S) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(S_n) = 0.$$

Définition 2.2.6 *On dira qu'une propriété $\mathcal{P}$ est vraie μ-presque partout ($\mu - pp$) si l'ensemble sur lequel $\mathcal{P}$ est fausse est contenu dans un ensemble μ-négligeable.*

Définition 2.2.7 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. La mesure μ est dite complète si tout sous-ensemble d'un ensemble négligeable est mesurable.*

Théorème 2.2.1 *Il existe une tribu $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^n$ et une mesure λ sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$ uniques telles que :*

- $\lambda\left(\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.
- $\mathcal{L} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *avec inclusion stricte.*
- λ *complète.*

$\mathcal{L}$ est appelée la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et λ est dite mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Pour plus de détails sur la construction de la mesure de Lebesgue, on peut consulter [1].

Remarques 2.2.2 *Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$.*

- *Tout point de $\mathbb{R}^n$ est négligeable.*
  Etablissons ce résultat dans le cas particulier où $n = 1$. Le sous ensemble $\{a\}$ de $\mathbb{R}$ est mesurable car c'est un fermé de $\mathbb{R}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, nous avons
  $$\{a\} \subset \left]a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p}\right[.$$
  Donc
  $$\lambda(\{a\}) \leq \lambda\left(\left]a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p}\right[\right)$$
  et par conséquent
  $$\lambda(\{a\}) \leq \frac{2}{p}, \ \forall p \in \mathbb{N}^*.$$
  Finalement
  $$\lambda(\{a\}) = 0.$$
- *Toute partie finie ou dénombrable de $\mathbb{R}^n$ est négligeable. Par exemple, dans $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est négligeable (bien qu'il soit dense dans $\mathbb{R}$).*
- *La mesure de Lebesgue admet bien d'autres ensembles négligeables que les ensembles dénombrables. Par exemple, la frontière du pavé $\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$ est négligeable dans $\mathbb{R}^n$ sans être dénombrable.*

2.3 Fonctions mesurables

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

Définition 2.3.1 *Une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite $\mathcal{A}$-mesurable si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Dans la suite, nous utiliserons la notation $[f > \alpha]$ pour désigner l'ensemble

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}.$$

De même, nous noterons

- $[f \geq \alpha] = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$;
- $[f \leq \alpha] = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$;
- $[f < \alpha] = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$;
- $[f = \alpha] = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$.

Le lemme suivant donne quatre définitions équivalentes de la mesurabilité.

Lemme 2.3.1 *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Les propositions suivantes sont équivalentes*

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$.

Démonstration :

Il est clair que $(a) \Longleftrightarrow (b)$ car A_α et B_α sont complémentaires.

On a de même $(c) \Longleftrightarrow (d)$.

Montrons que $(a) \Longleftrightarrow (c)$.

Puisque $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}}$, alors $(a) \Longrightarrow (c)$.

De la même façon, l'égalité $A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}}$ permet d'affirmer que $(c) \Longrightarrow (a)$.

Remarque 2.3.1 *Si f est à valeurs complexes, elle se décompose en partie réelle et partie imaginaire de la façon suivante*

$$f = \mathcal{R}e(f) + i\mathcal{I}m(f)$$

où $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.3.2 *L'application $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite mesurable si $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont mesurables.*

Définition 2.3.3 *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et E un sous-ensemble quelconque de X. On appelle fonction caractéristique de E, la fonction χ_E définie par*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in E \\ 0 & si \quad x \notin E. \end{cases}$$

La fonction caractéristique possède les propriétés suivantes :

1. $\chi_\emptyset = 0$;
2. $\chi_X = 1$;
3. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$;
4. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$;
5. $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

Proposition 2.3.1 *Soit $A \subset X$. Alors la fonction caractéristique de A est mesurable si et seulement si l'ensemble A est mesurable.*

Démonstration :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$A_\alpha = \{x \in X : \chi_A(x) > \alpha\} = \begin{cases} X & \text{si} \quad \alpha < 0 \\ A & \text{si} \quad 0 \leq \alpha < 1 \\ \emptyset & \text{si} \quad \alpha \geq 1. \end{cases}$$

On voit que $A_\alpha \in \mathcal{A}$ si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

Donnons à présent une classe importante de fonctions mesurables.

Proposition 2.3.2 *On considère l'espace mesurable* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$ *où* $\mathcal{L}$ *est la tribu de Lebesgue et* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*. Si* f *est continue alors* f *est* $\mathcal{L}$*-mesurable.*

Démonstration :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intervalle $]\alpha, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. L'ensemble $A_\alpha = f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^n$ car f est continue. Il en résulte que $A_\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et par conséquent $A_\alpha \in \mathcal{L}$. La fonction f est donc $\mathcal{L}$-mesurable.

Remarque 2.3.2 *Il existe des fonctions mesurables qui ne sont pas continues. C'est le cas par exemple de la fonction caractéristique de l'intervalle* $]0,1[$ *avec* $X = \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{A} = \mathcal{L}$.

Proposition 2.3.3 *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et* f, g *deux applications* $\mathcal{A}$*-mesurables définies sur* X *et à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$*. Alors les fonctions suivantes sont* $\mathcal{A}$*-mesurables*

1. $f + g$, *lorsque cette somme existe ;*
2. $\max(f, g)$ *et* $\min(f, g)$ *;*
3. *Pour tout* $\beta \in \mathbb{R}$, βf *;*
4. $|f|$, f^2 *et* $f \times g$.

Démonstration :

Pour simplifier la démonstration on se limite aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il vient :

   $$[f + g > \alpha] = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [f > r] \cap [g > \alpha - r].$$

   Puisque les fonctions f et g sont $\mathcal{A}$-mesurables et que $\mathbb{Q}$ est dénombrable, nous en déduisons que $A_\alpha \in \mathcal{A}$.

2. Les fonctions max et min sont $\mathcal{A}$-mesurables car

   $$[\max(f, g) > \alpha] = [f > \alpha] \cup [g > \alpha]$$

et

$$[\min(f,g) > \alpha] = [f > \alpha] \cap [g > \alpha]$$

3. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$[\beta f > \alpha] = \begin{cases} \emptyset \text{ ou } X & \text{si } \beta = 0 \\ \left[f > \dfrac{\alpha}{\beta}\right] & \text{si } \beta > 0 \\ \\ \left[f < \dfrac{\alpha}{\beta}\right] & \text{si } \beta < 0. \end{cases}$$

On voit que pour toute valeur de β, l'ensemble

$$[\beta f > \alpha]$$

est $\mathcal{A}$-mesurable.

4. • Montrons que $|f|$ est $\mathcal{A}$-mesurable

   i. Si $\alpha \geq 0$, alors

$$[|f(x)| > \alpha] = [f(x) > \alpha] \cup [f(x) < -\alpha].$$

   ii. Si $\alpha < 0$, alors

$$[|f(x)| > \alpha] = X.$$

   Donc $|f|$ est $\mathcal{A}$-mesurable.

   • Pour f^2, on a

   i. Si $\alpha \geq 0$, alors

$$\left[f^2(x) > \alpha\right] = \left[|f(x)| > \sqrt{\alpha}\right].$$

   ii. Si $\alpha < 0$, alors

$$\left[f^2(x) > \alpha\right] = X.$$

   Donc f^2 est $\mathcal{A}$-mesurable.

   • D'autre part $f \times g = \dfrac{1}{2}\left\{(f+g)^2 - f^2 - g^2\right\}$. Par conséquent $f \times g$ est $\mathcal{A}$-mesurable.

Proposition 2.3.4 *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables définies sur X et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors $f = \sup_n f_n$, $g = \inf_n f_n$, $f^* = \liminf_n f_n$ et $g^* = \limsup_n f_n$ sont $\mathcal{A}$-mesurables.*

Démonstration :

Pour la fonction g, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$[g(x) \geq \alpha] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [f_n(x) \geq \alpha].$$

De façon analogue

$$[f(x) > \alpha] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [f_n(x) > \alpha].$$

Puisque toutes les fonctions f_n sont mesurables, alors f et g sont mesurables.

On rappelle d'autre part que

$$f^* = \liminf_n f_n = \sup_n \inf_{m\geq n} f_m \text{ et } g^* = \limsup_n f_n = \inf_n \sup_{m\geq n} f_m.$$

On en déduit que f^* et g^* sont aussi mesurables.

Corollaire 2.3.1 *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables définies sur X et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur X alors f est une fonction mesurable.*

Démonstration :

Pour tout $x \in X$, on a $f(x) = \lim_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)$. Donc f est mesurable.

Définition 2.3.4 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une fonction e définie sur X est dite étagée (ou simple) s'il existe un nombre fini d'ensembles mesurables $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et n réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que*

$$e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}. \tag{2.2}$$

On notera que l'écriture (2.2) n'est pas unique. Une fonction étagée est donc une fonction mesurable finie et qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Notons que la somme, le produit et le module de fonctions étagées sont étagées. Le théorème d'approximation suivant montre l'importance des fonctions étagées

Théorème 2.3.1 *Soit $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Il existe une suite de fonctions étagées positives $(e_n)_{n\geq 1}$ telle que*

i) $0 \leq e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq f$,

ii) Pour tout $x \in X$, la suite $(e_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

Autrement dit, toute fonction positive mesurable est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives.

Démonstration :

i) Pour $n \in \mathbb{N}$, découpons l'intervalle $[0, n]$ en $n2^n$ intervalles de longueur $\dfrac{1}{2^n}$.

Considérons les ensembles

$$I_{n,k} = \begin{cases} \left[\dfrac{k}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k+1}{2^n}\right] & si \quad 0 \leq k < n2^n \\ \\ [f(x) \geq n] & si \quad k = n2^n. \end{cases}$$

Les ensembles $I_{n,k}$ sont mesurables car f l'est. Les ensembles $I_{n,k}$ sont deux à deux disjoints et $X = \bigcup\limits_{k=0}^{n2^n} I_{n,k}$. Posons

$$e_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & si \quad x \in I_{n,k} \quad avec \quad 0 \leq k < n2^n \\ n & si \quad x \in I_{n,k} \quad avec \quad k = n2^n. \end{cases}$$

On voit que $e_n \geq 0$ et que $e_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n2^n} \dfrac{k}{2^n}\chi_{I_{n,k}}(x)$. La fonction e_n est donc étagée et par construction $e_n \leq f$, pour tout $n \geq 1$. Il reste à prouver que $(e_n)_n$ est une suite croissante. Soit $x \in X$.

<u>1^{er} cas</u> : Il existe k, $0 \leq k < n2^n$ tel que $\dfrac{k}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k+1}{2^n}$. Ceci donne

$$e_n(x) = \frac{k}{2^n} \text{ et } \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}.$$

- Si $\dfrac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \dfrac{2k+1}{2^{n+1}}$ alors

$$e_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = e_n(x)\,;$$

- Si $\frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}$ alors

$$e_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} > e_n(x).$$

Notons que $k < n2^n$, entraîne $2k+1 < (n+1)2^{n+1}$.

$\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas}}$: On suppose que x est tel que $f(x) \geq n$.

- Si $f(x) \geq n+1$ alors

$$e_n(x) = n, \; e_{n+1}(x) = n+1.$$

Par conséquent $e_{n+1}(x) \geq e_n(x)$.

- Si $n \leq f(x) < n+1$ alors

$$n2^{n+1} \leq 2^{n+1}f(x) < (n+1)2^{n+1}.$$

D'autre part, il existe k' tel que $k' \leq 2^{n+1}f(x) < k'+1$, c'est à dire $\frac{k'}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{k'+1}{2^{n+1}}$ avec $k' < (n+1)2^{n+1}$.
Il en découle que

$$e_{n+1}(x) = \frac{k'}{2^{n+1}}.$$

L'inégalité $k'+1 > n2^{n+1}$ ou encore $k' \geq n2^{n+1}$ implique alors $e_{n+1}(x) \geq n = e_n(x)$.

Finalement $(e_n)_n$ est une suite croissante et pour tout entier naturel non nul n, nous avons $e_n \leq f$.

ii) Pour montrer la convergence simple, considérons un point $x \in X$. On a deux possibilités :

$$f(x) < +\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) = +\infty.$$

a) Si $f(x) < +\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$f(x) < n_0 \text{ et } \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

D'autre part

$$\forall n \geq n_0, \; \exists k' \text{ tel que } \frac{k'}{2^n} \leq f(x) < \frac{k'+1}{2^n}.$$

On remarque que $k' \leq f(x)2^n < n_0 2^n \leq n2^n$, ce qui entraîne

$$e_n(x) = \frac{k'}{2^n}.$$

En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \ |e_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Ceci prouve que la suite $(e_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

b) Si $f(x) = +\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) \geq n$ d'où $e_n(x) = n$. Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n(x) = +\infty = f(x)$.

Nous concluons que pour tout $x \in X$, la suite $(e_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

2.4 Intégrale de fonctions positives

Toutes les fonctions utilisées dans la suite de ce cours seront supposées mesurables. On défiuira l'intégrale de Lebesgue uniquement pour les fonctions mesurables.
On considère $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Commençons par considérer le cas d'une fonction positive étagée.

Définition 2.4.1 *Soit* $e = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ *une fonction étagée positive sur* X. *On appelle intégrale de* e *sur* X *par rapport à la mesure* μ*, le nombre positif (éventuellement* $+\infty$*) noté* $\int_X e \, d\mu$ *égal à* $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$.
(On admettra que la valeur de cette intégrale est indépendante de la représentation de e)

Remarque 2.4.1 *Si pour un indice* i *on a* $\alpha_i = 0$ *et* $\mu(A_i) = +\infty$*, alors le produit* $\alpha_i \mu(A_i) = 0$.

Définition 2.4.2 *On dit que* e *est* μ*-intégrable sur* X *par rapport à* μ *si* $\int_X e \, d\mu$ *est finie.*

Définition 2.4.3 *Si E est un ensemble mesurable, on définit l'intégrale de e sur E par*

$$\int_E e d\mu = \int_X e\chi_E d\mu.$$

En particulier si $E \in \mathcal{A}$, alors $\int_E d\mu = \mu(E)$.

Exemple 2.4.1 *On se place dans $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ et on considère la fonction e appelée fonction de Dirichlet et définie par*

$$e(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

La fonction e est positive étagée car $e = 1\chi_{\mathbb{Q}} + 0\chi_{\mathbb{Q}^c}$.
Si $E = [0,1]$, alors

$$\int_{[0,1]} e \, d\lambda = \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0.$$

La fonction e est donc λ-intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$.

L'intégrale d'une fonction étagée positive possède les propriétés suivantes :

Proposition 2.4.1 *Soient f, g deux fonctions étagées positives et α un réel positif. On a*

1. $\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$;
2. $\int_X \alpha f \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu$;
3. *Si $f \leq g$, alors* $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Nous sommes à présent en mesure de définir l'intégrale d'une fonction mesurable positive en s'appuyant sur le théorème 2.3.1.

Définition 2.4.4 *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. L'intégrale de f sur X par rapport à μ est définie par*

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X e \, d\mu \, ; 0 \leq e \leq f \text{ et } e \text{ étagée} \right\}.$$

(La borne supérieure est prise sur toutes les fonctions étagées positives qui minorent la fonction f)

Remarque 2.4.2 *Toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ positive, mesurable, possède une intégrale au sens de Lebesgue. Cependant, cette intégrale est soit positive finie, soit égale à $+\infty$.*

Définition 2.4.5 *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. La fonction f est dite intégrable si $\int_X f\, d\mu$ est finie.*

Si $E \in \mathcal{A}$, on pose

$$\int_E f\, d\mu = \int_X f\, \chi_E\, d\mu.$$

La proposition suivante contient des propriétés élémentaires de l'intégrale qui se démontrent par application directe de la définition.

Proposition 2.4.2 *Soient $f,\ g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ deux fonctions mesurables et $E,\ F \in \mathcal{A}$.*

1. *Si $f \leq g$ alors $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$;*
2. *Si $E \cap F = \emptyset$ alors $\int_{E \cup F} f\, d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu$;*
3. *Si $E \subset F$ alors $\int_E f\, d\mu \leq \int_F f\, d\mu$.*

Nous donnons à présent le théorème de la convergence monotone appelé aussi théorème de Beppo-Levi qui est l'un des principaux résultats de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 2.4.1 *Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers une fonction f. Alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Démonstration :
Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante d'ensembles mesurables alors

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

Montrons le lemme suivant :

Lemme 2.4.1 *Soit e une fonction étagée positive et $(B_n)_n$ une suite croissante d'ensembles mesurables avec $X = \bigcup_n B_n$. Alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} e\, d\mu = \int_X e\, d\mu.$$

Démonstration :

On a $e = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$, donc $\int_{B_n} e\, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_n)$.

La suite $(A_i \cap B_n)_n$ est croissante et $A_i = \bigcup_n (A_i \cap B_n)$ d'où

$$\mu(A_i) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_i \cap B_n).$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} e d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = \int_X e d\mu.$$

Démontrons à présent le théorème 2.4.1 :

La fonction f est mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables.

D'une part, on a

$$\begin{aligned} f_n \le f \quad &\Longrightarrow \quad \int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu \\ &\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu. \end{aligned} \tag{2.3}$$

D'autre part, soit e une fonction étagée positive telle que $0 \le e \le f$ et soit $\varepsilon \in]0,1[$.

On pose

$$B_n = \{x \in X / \ f_n(x) \ge (1-\varepsilon)e(x)\}.$$

L'ensemble B_n est mesurable et la suite $(B_n)_n$ est croissante. De plus on a $X = \bigcup_n B_n$.

En effet pour $x \in X$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$:

- Si $f(x) = 0$ alors $e(x) = 0$ et donc $x \in B_n$;
- Si $0 < f(x) < +\infty$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

  $$f_{n_0}(x) \ge (1-\varepsilon)f(x) \ge (1-\varepsilon)e(x),$$

  donc $x \in B_{n_0}$;
- Si $f(x) = +\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

  $$f_{n_0}(x) \ge (1-\varepsilon)e(x),$$

  d'où $x \in B_{n_0}$.

On constate que $f_n \geq (1-\varepsilon)e\,\chi_{B_n}$, donc

$$\int_X f_n\, d\mu \geq (1-\varepsilon)\int_{B_n} e d\mu.$$

En utilisant le lemme 2.4.1, il vient

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu &\geq (1-\varepsilon)\lim_{n\to+\infty}\int_{B_n} ed\mu\\ &\geq (1-\varepsilon)\int_X ed\mu.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\, d\mu \geq \int_X e\, d\mu,$$

et par suite

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\, d\mu \geq \int_X f\, d\mu. \tag{2.4}$$

De (2.4) et (2.3), on tire

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu,$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque 2.4.3 *Nous savons que toute fonction positive mesurable de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est limite simple croissante de fonctions étagées positives. La proposition 2.4.1 et le théorème 2.4.1 permettent de démontrer les propriétés suivantes de l'intégrale d'une fonction mesurable positive.*

Proposition 2.4.3 *Soient $f,\ g :\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ deux fonctions positives mesurables et $\alpha \in \mathbb{R}_+$.*

1. $\displaystyle\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$;
2. $\displaystyle\int_X \alpha f\, d\mu = \alpha\int_X f\, d\mu$.

Dans la suite, on désignera par M^+ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Lemme 2.4.2 *(Lemme de Fatou) Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de M^+. On a*

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.$$

Démonstration :

Soit la fonction $g_n = \inf_{m \geq n} f_m$. La suite $(g_n)_n$ est croissante, pour tout n la fonction g_n est positive mesurable et

$$\lim_n g_n = \sup_n g_n = \liminf_n f_n.$$

Le théorème 2.4.1 entraîne que

$$\int_X \liminf_n f_n \, d\mu = \lim_n \int_X g_n \, d\mu = \liminf_n \int_X g_n \, d\mu.$$

Or $g_n \leq f_n$ donc $\int_X g_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu$ et par conséquent

$$\liminf_n \int_X g_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \, d\mu.$$

Proposition 2.4.4 *Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable, alors l'application*

$$\begin{array}{rccl} \eta : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & A & \longmapsto & \eta(A) = \int_A f \, d\mu \end{array}$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Démonstration :

- Pour tout $A \in \mathcal{A}$, nous avons

$$\eta(A) = \int_X f \chi_A d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+ ;$$

- $$\begin{aligned} \eta(\emptyset) &= \int_\emptyset f d\mu \\ &= \int_X f \chi_\emptyset d\mu \\ &= \int_X 0 d\mu = 0 ; \end{aligned}$$

- Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints. Montrons que

$$\eta\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \eta(A_n).$$

Posons $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ et $f_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{A_k} = f\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}$. On constate que $(f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions positives et mesurables qui converge simplement vers $f\chi_A$. Le théorème 2.4.1 entraîne que

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_X f_n d\mu &= \int_X f\chi_A d\mu \\
&= \int_A f d\mu \\
&= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A_n} f d\mu,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\eta\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \eta(A_n).$$

Proposition 2.4.5 *Soit $f \in M^+$. On a*

$$f = 0 \ \ \mu - pp \Longleftrightarrow \int_X f \, d\mu = 0.$$

Démonstration :

$\Longleftarrow$) Soit $E_n = \left\{x \in X / \ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$. L'ensemble E_n est mesurable et on a $f \geq \frac{1}{n}\chi_{E_n}$. Donc

$$\int_X f \, d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n),$$

ce qui prouve que $\mu(E_n) = 0$. On a

$$\{x \in X / \ f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Cet ensemble mesurable est donc négligeable comme réunion dénombrable d'ensembles négligeables.

$\Longrightarrow$) Posons $E = \{x \in X/\ f(x) > 0\}$. Il existe un ensemble N négligeable tel que $E \subset N$. Or $E \in \mathcal{A}$, donc $\mu(E) = 0$. Considérons la suite de fonctions de terme général $f_n = n\chi_E$. Nous avons

$$\int_X f_n d\mu = n\mu(E) = 0.$$

Notons que $f \leq \liminf_n f_n = \lim_n f_n$. En utilisant le lemme 2.4.2, il vient

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_X f d\mu \\ &\leq \int_X \liminf_n f_n d\mu \\ &\leq \liminf_n \int_X f_n d\mu = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_X f d\mu = 0.$$

Proposition 2.4.6 *Soit $f \in M^+$ et N un ensemble μ-négligeable. Alors, on a*

$$\int_N f d\mu = 0.$$

Proposition 2.4.7 *Soient f, g : $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurables. On a*

$$f = g\ \mu - pp \Longrightarrow \int_X f d\mu = \int_X g d\mu.$$

2.5 Fonctions intégrables

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, f^+ et f^- les fonctions positives définies par :

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} \text{ et } f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}.$$

f^+ (*resp.* f^-) est dite partie positive (*resp.* négative) de f. On vérifie que

1. $f = f^+ - f^-$,
2. $|f| = f^+ + f^-$,
3. $f^+ = \frac{1}{2}\left(|f|\chi_{[f\neq-\infty]} + f\chi_{[f\neq-\infty]}\right)$,
4. $f^- = \frac{1}{2}\left(|f|\chi_{[f\neq+\infty]} - f\chi_{[f\neq+\infty]}\right)$.

Remarque 2.5.1 *L'application f est mesurable si et seulement si f^+ et f^- sont mesurables.*

Définition 2.5.1 *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. On dit que f est intégrable sur X par rapport à μ, si f^+ et f^- le sont. L'intégrale de f est alors définie par*

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Si $E \in \mathcal{A}$ et f intégrable, on définit :

$$\int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Proposition 2.5.1 *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable;*

$$f \text{ est intégrable} \iff |f| \text{ est intégrable.}$$

Démonstration :

$\Longrightarrow$) Les applications f^+ et f^- sont intégrables, donc

$$\begin{aligned}\int_X |f| d\mu &= \int_X \left(f^+ + f^-\right) d\mu \\ &= \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu < +\infty.\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) On a f mesurable et $\int_X |f| d\mu < +\infty$. Les fonctions positives f^+ et f^- sont mesurables et vérifient $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$. On en déduit que $\int_X f^+ d\mu < +\infty$ et $\int_X f^- d\mu < +\infty$, donc f est intégrable.

Cette proposition est fausse pour l'intégrale de Riemann. En effet la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ +1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur $X = [0, 1]$. Cependant $|f| = 1$ est Riemann-intégrable sur $X = [0, 1]$.

Proposition 2.5.2 *Soient $f,\ g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ intégrables. Alors on a*

$$f = g \text{ p.p.} \Longrightarrow \int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

Proposition 2.5.3 *Soient $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ intégrable et N un ensemble négligeable. Alors*

$$\int_N f d\mu = 0.$$

Pour les démonstrations des propositions 2.5.2 et 2.5.3 *cf.* les solutions respectives des exercices 2.8.35 et 2.8.34.

Proposition 2.5.4 *Toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ intégrable est finie pp*

Démonstration :
Posons $E = \{x \in X \ : \ |f(x)| = +\infty\}$. Nous avons $E = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$ où

$$E_n = \{x \in X \ : \ |f(x)| \geq n\}.$$

L'ensemble E_n est mesurable car $|f|$ l'est. On en déduit que E est mesurable.
On a $n\, \chi_{E_n} \leq |f|$, donc

$$\mu(E) \leq \mu(E_n) \leq \frac{1}{n} \int_X |f| d\mu, \ \forall n \geq 1.$$

Comme $\int_X |f| d\mu < +\infty$ on en déduit que

$$\mu(E) = 0.$$

Ainsi, lorsqu'on fait du calcul intégral, on peut se limiter aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Dans toute la suite, nous désignerons par $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{L}^1(X)$ ou tout simplement $\mathcal{L}^1$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrables sur X par rapport à la mesure μ. Notons que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Proposition 2.5.5 *Soient $f,\ g : X \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est mesurable et que g est intégrable. Si $|f| \leq g$ p.p. alors f est intégrable et*

$$\int_X |f| d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Démonstration :

Puisque f est mesurable alors $|f|$ est aussi mesurable. Considérons l'ensemble

$$N = \{x \in X / \ |f(x)| > g(x)\}.$$

On voit que $N \in \mathcal{A}$ et que $\mu(N) = 0$. De la proposition 2.4.2, on tire

$$\int_X |f| d\mu = \int_N |f| d\mu + \int_{N^c} |f| d\mu.$$

Comme $\int_N |f| d\mu = 0$, alors

$$\begin{aligned} \int_X |f| d\mu &= \int_{N^c} |f| d\mu \\ &\leq \int_{N^c} g d\mu \\ &\leq \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

Proposition 2.5.6 *Soient $f,\ g \in \mathcal{L}^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a*

1. *$\alpha f \in \mathcal{L}^1$ et $\int_X \alpha f \ d\mu = \alpha \int_X f d\mu$.*
2. *$f + g \in \mathcal{L}^1$ et $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.*

Nous avons déjà vu une justification du passage à la limite sous le signe somme pour une suite monotone (voir théorème 2.4.1). Le théorème fondamental suivant donne une autre justification

Théorème 2.5.1 *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)*
Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables définies de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que

i) La suite (f_n) converge simplement vers f ;

ii) Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_n| \leq g. \tag{2.5}$$

Alors

- *Pour tout n, $f_n \in \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{L}^1$;*
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Démonstration :

- La fonction f est mesurable car c'est une limite simple de fonctions mesurables ;
- L'inégalité (2.5) entraîne que pour tout n, $f_n \in \mathcal{L}^1$;
- De la convergence simple de (f_n) vers f et de l'inégalité (2.5) on tire $|f| \leq g$, d'où $f \in \mathcal{L}^1$;
- On a $|f_n - f| \leq 2g$. Définissons la suite de fonctions mesurables positives

$$\varphi_n = 2g - |f_n - f|.$$

On a $2g = \lim_n \varphi_n = \liminf_n \varphi_n$. L'application du lemme 2.4.2 conduit à

$$\begin{aligned} \int_X 2g d\mu &\leq \liminf_n \int_X \varphi_n d\mu \\ &\leq \int_X 2g d\mu + \liminf_n \left(- \int_X |f_n - f|\, d\mu \right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\limsup_n \int_X |f_n - f|\, d\mu \leq 0 \quad \text{ou encore} \quad \lim_n \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

L'inégalité

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu$$

permet de conclure.

Donnons une deuxième version de ce théorème

Théorème 2.5.2 *Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables telle que $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que*

i) La suite $(f_n)_n$ converge p.p. vers f ;

ii) Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour tout n, on a

$$|f_n| \leq g \ pp$$

Alors

- *Pour tout n, $f_n \in \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{L}^1$;*
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Terminons ce paragraphe par des résultats relatifs aux fonctions à valeurs complexes.

Définition 2.5.2 *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable. La fonction f est dite intégrable si $|f|$ est intégrable.*

Proposition 2.5.7 *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable telle que*

$$f = \mathcal{R}e(f) + i\mathcal{I}m(f).$$

La fonction f est intégrable si et seulement si $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont intégrables et nous avons

$$\int_X f d\mu = \int_X \mathcal{R}e(f) d\mu + i \int_X \mathcal{I}m(f) d\mu.$$

Remarque 2.5.2 *Si f est une fonction à valeurs complexes, intégrable, alors on a*

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Il est important de noter que le théorème de Lebesgue reste valable pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

2.6 Calcul intégral

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

2.6.1 Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ borné ou non. On considère

$$\begin{array}{rccl} f: & I \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & f(t,x). \end{array}$$

Théorème 2.6.1 *On suppose que*

i) l'application $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable pour tout $t \in I$,

ii) pour presque tout $x \in X$, l'application $t \longmapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in I$,

iii) il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour tout $t \in I$: $|f(t,x)| \leq g(x)$ pp

Alors, pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est intégrable et la fonction F définie par $F(t) = \int_X f(t,x) d\mu(x)$ est continue en t_0.

La notation $d\mu(x)$ signifie que la mesure porte sur l'ensemble dont la variable est x.
Démonstration :
L'inégalité $|f(t,x)| \leq g(x)$ p.p. entraîne que la fonction

$$x \longmapsto f(t,x) \in \mathcal{L}^1.$$

Pour montrer la continuité de F en t_0, on considère une suite convergente $(t_n)_n$ d'éléments de I dont la limite est t_0 et on va prouver que la suite $(F(t_n))_n$ converge et de limite égale à $F(t_0)$.

Pour tout n, posons $h_n(x) = f(t_n, x)$ et $h(x) = f(t_0, x)$. Les fonctions h_n et h sont mesurables, $|h_n| \leq g$ p.p. et $(h_n)_n$ converge vers h presque partout. L'application du théorème de convergence dominée 2.5.2 implique que h_n et h sont intégrables et

$$\begin{aligned} F(t_0) &= \int_X f(t_0, x)\, d\mu(x) \\ &= \int_X h(x) d\mu(x) \\ &= \lim_n \int_X h_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim_n \int_X f(t_n, x)\, d\mu(x) \\ &= \lim_n F(t_n). \end{aligned}$$

Théorème 2.6.2 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que*

i) l'application $x \longmapsto f(t,x)$ est intégrable pour tout $t \in I$,

ii) pour presque tout $x \in X$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ existe,

iii) il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour tout $t \in I$ on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right| \leq g(x) \ pp$$

Alors, pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ est intégrable, la fonction F définie par $F(t) = \int_X f(t,x) d\mu(x)$ est dérivable et on a

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) d\mu(x).$$

Remarque 2.6.1 *Ces deux théorèmes restent valables pour les fonctions $f(t,x)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

2.6.2 Intégrale de Lebesgue et de Riemann

La fonction $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas Riemann-intégrable. Cependant elle est Lebesgue-intégrable car

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 0.$$

Théorème 2.6.3 *Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable définie de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ alors f est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$ et on a l'égalité

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda(x). \tag{2.6}$$

Remarque 2.6.2 *On voit que dans le cas des intégrales propres, l'intégrale de Lebesgue est beaucoup plus générale que l'intégrale de Riemann. L'égalité* (2.6) *montre, toutefois, que l'on peut utiliser les techniques classiques (développement en somme, intégration par parties ou changements de variables, etc.) pour calculer l'intégrale de Lebesgue d'une fonction Riemann-intégrable.*

Théorème 2.6.4 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction localement Riemann-intégrable sur I. Alors f est Lebesgue-intégrable sur I si et seulement si l'intégrale de Riemann généralisée $\int_I f(x)dx$ est absolument convergente et on a*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_I f(x)d\lambda(x) \tag{2.7}$$

où α, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ sont les extrémités de l'intervalle I.

Remarque 2.6.3 *On constate que lorsqu'une intégrale généralisée existe, l'intégrale de Lebesgue existe si et seulement si l'intégrale est absolument convergente et on a l'égalité* (2.7).
On voit que les intégrales généralisées semi-convergentes échapperont ainsi aux théorèmes d'intégration. Ceci semble constituer une petite victoire de l'intégrale de Riemann sur l'intégrale de Lebesgue. Mais une intégrale généralisée n'est pas à proprement parler, une intégrale de Riemann.

Dans la suite, on notera

$$d\lambda(x) = dx \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } d\lambda(x) = dx_1 dx_2 \dots dx_n \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n.$$

2.6.3 Théorème de Fubini

Nous énoncerons ce théorème pour des fonctions de deux variables réelles.

Théorème 2.6.5 *Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $E \times F$ un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$.*

(i) Si f est positive sur $E \times F$ alors on a

$$\begin{aligned} \int_{E\times F} f(x,y)dxdy &= \int_E dx \int_F f(x,y)dy \\ &= \int_F dy \int_E f(x,y)dx, \end{aligned} \tag{2.8}$$

(= éventuellement à $+\infty$) ;

(ii) $f \in \mathcal{L}^1(E \times F) \Longleftrightarrow \int_E dx \int_F |f(x,y)|dy$ ou $\int_F dy \int_E |f(x,y)|dx$ est finie ;

(iii) Si $f \in \mathcal{L}^1(E \times F)$ alors on a les égalités (2.8).

Remarque 2.6.4 *L'aspect pratique à retenir est que l'on peut calculer une intégrale double en choisissant l'ordre d'intégrabilité que l'on veut, pourvu que l'une au moins des intégrales itérées en module existe.*

L'existence des deux intégrales

$$\int_E dx \int_F f(x,y)dy \text{ et } \int_F dy \int_E f(x,y)dx$$

n'implique pas l'intégrabilité de f sur $E \times F$.

2.6.4 Changement de variables

Soient X et Y deux domaines de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : Y \longrightarrow X$ une fonction bijective telle que ϕ et ϕ^{-1} soient de classe C^1. On note $J_\phi(y)$ la matrice jacobienne de ϕ au point y

$$J_\phi(y) = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(y)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

où pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ϕ_i est la $i^{ième}$ application coordonnée de ϕ.

Théorème 2.6.6 *Une fonction f est intégrable sur X si et seulement si $f(\phi(y)) \left|\det J_\phi(y)\right|$ est intégrable sur Y et on a*

$$\int_X f(x)dx = \int_Y f(\phi(y)) \left|\det J_\phi(y)\right| dy.$$

Exemple 2.6.1 *Soient f une fonction mesurable définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. On considère l'intégrale*

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax)dx.$$

Soit

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & x = \frac{1}{a}y \end{array}$$

la fonction bijective de classe C^1 et dont la réciproque , également de classe C^1, est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\phi^{-1}(x) = ax$. Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax)dx = \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}} f(y)dy.$$

2.7 Espaces L^p

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. L'ensemble $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu.$$

L'application $f \longmapsto \|f\|_1$ n'est pas une norme. En effet,

$$\|f\|_1 = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \text{ pp}$$

C'est une semi norme sur $\mathcal{L}^1$ car pour tout f, $g \in \mathcal{L}^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous avons

1. $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$,
2. $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$.

On sait (*cf.* l'exercice 2.8.35) que pour tout f, $g \in \mathcal{L}^1$

$$f = g \ \text{ pp} \Longrightarrow \int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

On introduit alors dans $\mathcal{L}^1$ la relation $\mathcal{R}$

$$f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow f = g \ \text{ pp}.$$

On vérifie que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et on pose

$$L^1 = L^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1/\mathcal{R}.$$

C'est l'espace vectoriel quotient, des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}^1$ modulo l'égalité pp

$$L^1 = \left\{ \dot{f} : \ f \in \mathcal{L}^1 \right\}.$$

Dans ce qui suit, on identifie $\dot{f}$ et f. Ainsi, si $f \in L^1$, f désignera l'ensemble des fonctions g telles que $g = f$ pp

Proposition 2.7.1 *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_1 : & L^1 & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longrightarrow & \|f\|_1 = \int_X |f| d\mu \end{array}$$

est bien définie et c'est une norme sur L^1.

En effet, $\|f\|_1$ est indépendant du représentant choisi dans la classe de f. De plus, pour tout $f \in L^1$

$$\begin{aligned} \|f\|_1 = 0 & \Longleftrightarrow f = 0 \text{ pp} \\ & \Longleftrightarrow \dot{f} = \dot{0} \\ & \Longleftrightarrow f = 0 \text{ dans } L^1. \end{aligned}$$

Il est important de noter que

- L^1 est considéré comme un espace de fonctions (on ne distingue pas deux fonctions égales pp).
- L^1 est un espace vectoriel normé.

Définition 2.7.1 *Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit l'ensemble*

$$L^p = \left\{ f \,:\, X \longrightarrow \mathbb{R} / \ |f|^p \in L^1 \right\}.$$

Nous avons les résultats suivants :

Proposition 2.7.2 *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_p : & L^p & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

est bien définie et c'est une norme sur L^p.

Proposition 2.7.3 *(Inégalité de Hölder)*
Soient $p,\ q \in]1, +\infty[$. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$fg \in L^1 \ \text{ et } \ \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème 2.7.1 *Pour $1 \leq p < +\infty$, L^p est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).*

Remarque 2.7.1 *Si $X = \mathbb{R}$ et μ est la mesure de Lebesgue, on définit l'ensemble des (classes de) fonctions localement intégrables noté L^1_{loc} par*

$$L^1_{loc} = \left\{ f \text{ mesurable} / \forall K \text{ compact}, \ \int_K |f| d\mu < +\infty \right\}.$$

Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, L^1_{loc} est un espace vectoriel.

2.8 Exercices

Exercice 2.8.1 *Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $[1, +\infty[$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ x > n \\ \dfrac{1}{x} & si \ \ 1 \leq x \leq n \end{cases}$$