Table des matières

1 Espaces vectoriels normés **3**
- 1 Notion de norme . . . 3
- 2 Propriétés des espaces vectoriels normés . . . 4
- 3 Espace produit . . . 5
- 4 Suites et séries dans un e.v.n . . . 5
- 5 Applications linéaires continues d'un e.v.n dans un e.v.n . . . 7

2 Applications différentiables **11**
- 1 Notion de différentiabilité . . . 11
- 2 Exemples . . . 11
- 3 Opération sur les différentielles . . . 12
- 4 Dérivée directionnelle . . . 13
- 5 Cas d'un espace produit . . . 13
  - 5.1 Cas où F est un espace produit . . . 13
  - 5.2 Cas où E est un espace produit . . . 14
  - 5.3 Combinaison des cas précédents . . . 14
- 6 Cas de la dimension finie . . . 14
  - 6.1 Dérivées partielles . . . 14
  - 6.2 Matrice Jacobienne . . . 15
- 7 Exercices . . . 16

3 Théorème des accroissements finis **18**
  - 0.1 Fonction d'une variable réelle à valeurs réelles . . . 18
  - 0.2 Fonction définie sur un espace de Banach à valeurs réelles . . . 18
  - 0.3 Fonction d'une variable réelle . . . 18
  - 0.4 Cas général . . . 19
- 1 Applications . . . 19

4 Difféomorphismes **20**
- 1 Théorème des fonctions implicites . . . 20

5 Différentielles d'ordre supérieur **22**
- 1 Différentielle d'ordre 2 . . . 22
  - 1.1 En dimension finie . . . 23
- 2 Différentielle d'ordre n . . . 23

WWW.TALIB24.COM

6 Formule de Taylor **25**
1 Formule de Taylor avec reste intégrale 25
1.1 Fonction d'une variable réelle à valeur réelle 25
1.2 Fonction d'une variable réelle à valeur dans un espace de Banach 25
2 Formule de taylor Lagrange 25
2.1 Fonction d'une varaible réelle à valeur dans un espace de Banach 25
2.2 Fonction d'un espace de Banach à valeur dans un espace de Banach 26
3 Formule de Taylor Young 26

7 Extremums **27**
1 Extremums libres 27
2 Extremums liés 28

WWW.TALIB24.COM

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels considérés sont sur $\mathbb{R}$.

1 Notion de norme

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 *Une* ***application*** *p de E dans $\mathbb{R}^+$ est dite une norme sur E si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *pour tous* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $x \in E$
3. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, *pour tous* $x, y \in E$

Exemple 1.2 1. *Sur $\mathbb{R}^n$, l'application :*

$$(x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme

2. *Si E est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$. L'application p définie sur E par :*

$$p(u) = \int_0^1 |u(x)| d\,x$$

est une norme sur E.

En général une norme sur E est notée $\| \ \|$ ou $\| \ \|_E$

Définition 1.3 *Un espace vectoriel muni d'une norme $\| \ \|$ est appelé espace vectoriel normé ; et noté $(E, \| \ \|)$.*

WWW.TALIB24.COM

2 Propriétés des espaces vectoriels normés

Soit $(E, \| \ \|)$ un e.v.n. On a les propriétés suivantes :

1. $\|-x\| = \|x\|$, pour tout $x \in E$
2. $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tous $x, y \in E$
3. $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$

Définition 2.1 *On dit que deux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe deux réels $a > 0$ et $b > 0$ tels que :*

$$a\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\,\|x\|_1\,, \quad \textit{pour tout } x \in E.$$

Exemple 2.2 *Sur $\mathbb{R}^n$, les normes définies par :*

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_1 = (x_1^2 + \cdots x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_2 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_3 = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$$

sont équivalentes.

Proposition 2.3 *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = x_1e_1 + \cdots x_ne_n$.
Soit N une norme quelconque sur E. Montrons que N est équivalente à la norme $\| \ \|$ définie sur E par :

$$\|x\| = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$$

On a :

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \leq \|x\| \sum_{i=0}^{n} N(e_i)$$

si on prend $b = \sum_{i=0}^{n} N(e_i)$, on obtient :

$$N(x) \leq b\|x\|, \quad \text{pour tout } x \in E$$

D'autre part, on sait que E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$; donc la sphère unité de E est isomorphe à la sphère unité de $\mathbb{K}^n$ qui est compacte. Donc, la sphère unité $S = S(0, 1)$ de E est compacte.

D'autre part, on a :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq b\|x - y\|$$

Donc, N est continue sur $(E, \| \ \|)$. Par suite, elle atteint sa borne inférieure sur S en un point x_0. On a :

$$Inf_{x \in S} N(x) = N(x_0) = a > 0$$

WWW.TALIB24.COM

On en déduit que pour tout $x \in E$ distinct de 0, on a :

$$N(\frac{x}{\|x\|}) \geq a$$

d'où $N(x) \geq a\|x\|$; cette inégalité est encore vraie pour $x = 0$. On conclut que :

$$a\|x\| \leq N(x) \leq b\|x\|, \text{ pour tout } x \in E$$

c'est-à-dire N et $\| \ \|$ sont équivalentes.

Remarque 2.4 *Ce résultat est faux en dimension infinie.*

En effet, si E est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$. Les normes N_1 et N_2 définies par :

$$N_1(u) = \int_0^1 |u(x)| d\,x$$

et

$$N_2(u) = \sup_{x \in [0,1]} |u(x)|$$

ne sont pas équivalentes. car, si $u_n(x) = x^n$, on a $N_1(u_n) = \dfrac{1}{n+1}$ et $N_2(u_n) = 1$, pour tout n

3 Espace produit

Soit $(E_1, N_1), \cdots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés. Et, posons :

$$E = E_1 \times \cdots \times E_p = \{(x_1, \cdots, x_p) \ / \ x_i \in E_i, \ \forall i = 1, \cdots, p\}$$

Posons :

$$\|(x_1, \cdots, x_p)\|_1 = (\sum_{i=1}^{p} N_i(x_i)^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$\|(x_1, \cdots, x_p)\|_2 = \max(N_1(x_1), \cdots, N_p(x_p)),$$
$$\|(x_1, \cdots, x_p)\|_3 = N_1(x_1) + \cdots + N_p(x_p)$$

Proposition 3.1 $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, *et* $\| \ \|_3$ *sont des normes équivalentes sur* E.

Corollaire 3.2 *Tout produit fini d'espaces vectoriels normés est un espace vectoriel normé.*

4 Suites et séries dans un e.v.n

Les suites se définissent comme dans le cas numérique. Et, on utilise les mêmes notations $(x_n)_n$, $(y_n)_n, \cdots$

Exemple 4.1 *Sur l'espace des fonctions continues sur* $[0,1]$, *si on pose* $u_n(x) = \dfrac{sin(nx)}{\sqrt{1+n}}$, $(u_n)_n$ *est une suite de* E.

WWW.TALIB24.COM

Définition 4.2 *Soit $(E, \| \ \|)$ un e.v.n et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E. On dit que $(x_n)_n$ converge vers x dans E si :*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in I\!N \text{ tel que } \forall n > N, \ \|x_n - x\| < \epsilon$$

Exemple 4.3 *Dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, la suite $u_n(x) = x^n$, converge vers 0 pour la nome N_1 définie par*

$$N_1(u) = \int_0^1 |u(x)|\, dx$$

mais ne converge pas pour la norme N_2, définie par

$$N_2(u) = \sup_{x \in [0,1]} |u(x)|$$

Cet exemple montre que la notion de convergence ainsi que la valeur de la limite dépend de la norme.

Proposition 4.4 *Une suite $(x_n)_n$ converge vers x dans $(E, \| \ \|)$ si et seulement si $(\|x_n - x\|)_n$ converge vers 0 dans $I\!R$.*

Définition 4.5 *Soit $(E, \| \ \|)$ un e.v.n. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E si :*
$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in I\!N$ *tel que* $\forall n, m > N$, *on a* $\|x_n - x_m\| < \epsilon$

Exemple 4.6 *Dans l'exemple 4.3 la suite $u_n(x) = x^n$ est de Cauchy pour la norme N_1 mais elle n'est pas de Cauchy pour N_2.*

En effet, soit $\epsilon > 0$, il existe $N \in I\!N$ tel que $\dfrac{1}{N+1} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Pour tout $n, m > N$, on a :

$$N_1(u_n - u_m) \leq \frac{2}{1+N} < \epsilon$$

Donc, $(u_n)_n$ est de Cauchy pour N_1.

Supposons maintenant que $(u_n)_n$ est de Cauchy pour N_2. Soit $\epsilon = \dfrac{1}{2}$; il existe $N \in I\!N$ tel que :

$$|x^n - x^m| < \epsilon, \text{ pour tous } n, m > N \text{ et } x \in [0,1]$$

Si m tend vers $+\infty$, on obtient $|x^n| \leq \epsilon$, pour tous $n \geq N$ et $x \in [0, 1.[$ Si on fait tendre x vers 1, on obtient $1 \leq \dfrac{1}{2}$; ce qui est absurde.

Proposition 4.7 *Si deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur E, alors elles ont les mêmes suites de Cauchy et les mêmes suites convergentes.*

Proposition 4.8 *Si $(x_n)_n$ converge vers x, alors $(\|x_n\|)_n$ converge vers $\|x\|$. La réciproque de ce résultat est fausse.*

Proposition 4.9 *Toute suite convergente est de Cauchy*

WWW.TALIB24.COM

Définition 4.10 *On dit qu'un e.v.n est de Banach si toute suite de Cauchy est convergente*

Exemple 4.11 *L'espace vectoriel des fonctions continues sur* $[0,1]$ *muni de la norme* $\| \ \|_\infty$ *est un espace de Banach.*

Définition 4.12 *Soit* $(x_n)_n$ *une suite d'éléments d'un e.v.n et posons* $s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$; *la suite* $(s_n)_n$ *est appelée série de terme général* x_n.

Notations. La série est notée $\sum_n x_n$ et si elle converge sa limite est notée $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et appelée somme de la série.

Proposition 4.13 *Si* E *est un espace de Banach, alors la série de terme général* x_n *est convergente si et seulement si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\| \sum_{n=p}^{q} x_n \| < \epsilon$, *pour tout* $q \geq p > N$.

5 Applications linéaires continues d'un e.v.n dans un e.v.n

Définition 5.1 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés. On dit que* $f : U \subset E \longrightarrow F$ *est continue en un point* $x_0 \in U$ *si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que* $\|x - x_0\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Définition 5.2 *Une application* u E *dans* F *est dite linéaire si :*

1. *Pour tous* $x, y \in E$ *on a* $u(x+y) = u(x) + u(y)$
2. *Pour tous* $x \in E$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$, *on a* $u(\alpha x) = \alpha u(x)$

Exemple 5.3 *Si* E *désigne l'espace des fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et* F *l'espace des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *alors l'application :*

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ u &\longrightarrow u' = \textit{dérivée de } u \end{aligned}$$

est linéaire

Définition 5.4 *Toute application linéaire de* E *dans* $\mathbb{R}$ *est appelée forme linéaire*

Proposition 5.5 *Soit* u *une application linéaire de* E *dans* F. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. u *est continue*
2. u *est continue en 0*
3. *Il existe* $M > 0$ *tel que* $\|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E$, *pour tout* $x \in E$.

WWW.TALIB24.COM

4. u est bornée sur la boule unité de E.

Corollaire 5.6 *Une application linéaire est continue si et seulement si elle est uniformément continue*

Proposition 5.7 *Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire u de E dans F est continue.*

Remarque 5.8 *Ce résultat est faux si E n'est pas de dimension finie.*

Exemple 5.9 *Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par :*

$$\|u\| = \int_0^1 |u(x)| dx$$

L'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ u &\longrightarrow u(1) \end{aligned}$$

est linéaire ; mais elle n'est pas continue.

En effet, si on pose $u_n(x) = x^n$, on a $\|u_n\| = \dfrac{1}{1+n}$ qui converge vers 0 ; mais $\varphi(u_n) = u_n(1) = 1$ ne converge pas vers $\varphi(0) = 0$.

Définition 5.10 *Soient E et F deux e.v.n ; on appelle isomorphisme de E sur F toute application linéaire continue telle que f^{-1} soit continue.*

Soit $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on pose :

$$\|u\| = \inf\{M > 0 \quad \|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E, \ \forall x \in E\}$$

Proposition 5.11 *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on a :*

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F = \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|_E}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \frac{\|u(x)\|_E}{\|x\|_E}.$$

Proposition 5.12 *$(\mathcal{L}(E,F), \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé.*
Si F est un espace de Banach, alors $(\mathcal{L}(E,F), \| \ \|)$ est un espace de Banach.

Définition 5.13 *Soient $E_1, \cdots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés. Une application multilinéaire définie sur $E = \pi_{i=1}^n E_i$ à valeur dans F (ou application $n-$linéaire) est une application qui est linéaire sur chaque facteur ; c'est-à-dire : Pour tous $a = (a_1, \cdots, a_n) \in E$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$, l'application*

$$\begin{aligned} L_j : E_j &\longrightarrow F \\ h &\longrightarrow L_j(h) = L(a_1, \cdots, a_{j-1}, h, a_{j+1}, \cdots, a_n) \end{aligned}$$

est linéaire.

WWW.TALIB24.COM

Exemple 5.14 *1.*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & xy \end{array}$$

est une application bilinéaire.

2.

$$\begin{array}{rcl} l^2 \times l^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((u_n)_n,(v_n)_n) & \longrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \end{array}$$

est bilinéaire.

3. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (h,k,l) & \longrightarrow & (h_1k_2+3l_1, h_2+5k_1l_2) \end{array}$$

avec $h=(h_1,h_2)$, $k=(k_1,k_2)$ et $l=(l_1,l_2)$. est multilinéaire.

Proposition 5.15 *Soit L une application multilinéaire de $E=\pi_{i=1}^n E_i$ dans F. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *L est continue*
2. *L est continue en 0_E*
3. *L est bornée sur le produit des boules unités des espaces E_i.*
4. *L est bornée sur le produit des sphères unités des espaces E_i.*
5. *Il existe $M>0$ telle que*

$$\|L(x_1,\cdots,x_n)\|_F \leq M\,\|x_1\|_{E_1}\,\|x_2\|_{E_2}\cdots\|x_n\|_{E_n}$$

pour tout $(x_1,\cdots,x_n)\in E$.

Exercices

Exercice 1 Soient $(E_1,\|\ \|_1),\cdots,(E_n,\|\ \|_n)$ et $(F,\|\ \|)$ des espaces vectoriels normés et L une application multilinéaire de $E_1\times\cdots\times E_n$ dans F. Montrer que :

$$\|L\| = \sup_{(x_1,\cdots,x_n)\in E_1^*\times\cdots\times E_n^*} \frac{\|L(x_1,\cdots,x_n)\|}{\|x_1\|_1\,\|x_2\|_2\cdots\|x_n\|_n}$$

où $E_i^*=E_i-\{0\}$, est une norme sur $\mathcal{L}_n(E_1\times\cdots\times E_n,F)$.

Exercice 2 Montrer que si $E_1,\cdots,E_n$ sont de dimensions finies, alors toute application multilinéaire sur $E_1\times\cdots\times E_n$ est continue.

Exercice 3 Soient E un e.v.n et F un espace de Banach. Montrer que si $u\in\mathcal{L}(E,F)$ est telle que $\|u\|<1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ est convergente.

Exercice 4 Montrer que si E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

WWW.TALIB24.COM

Exercice 5 Montrer que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.

Exercice 6 Pour $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, montrer que $\|x\|_k=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^k)^{\frac{1}{k}}$ est une norme.

Exercice 7 Soit E un espace de Banach et $u\in(\mathcal{L}(E),\|\ \|)$. Montrer que $1-u$ est inversible si et seulement si $\|u\|<1$ et que dans ce cas, on a : $(1-u)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}u^n$.

Exercice 8 Notons $Is(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F.

1. Montrer que $Is(E,F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E,F)$.
2. Montrer que l'application $u\longrightarrow u^{-1}$ est continue.

Exercice 9 Soit f une application multilinéaire de $E=\pi_{i=1}^{n}$ dans F et $a=(a_1,\cdots,a_n)\in E$.

1. Montrer que $f(x_{1,c}dots,x_n)-f(a_1,\cdots,a_n)=f(x_1-a_1,x_2,\cdots,x_n)+f(a_1,x_2-a_2,,x_3\cdots,x_n)+f(a_1,a_2,x_3-a_3,x_4,\cdots,x_n)+\cdots+f(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},x_n-a_n)$
2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est continue en a
   (b) f est continue en 0
   (c) f est bornée sur le produit des boules unités.
   (d) Il existe $M>0$ telle que
   $$\|f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|\leq M\,\|x_1\|_1\,\|x_2\|_2\cdots\|x_n\|_n$$

Exercice 10 Soit E,F et G des espaces vectoriels normés.

1. Montrer que $\mathcal{B}(E\times F,G)$ et $\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$ sont isomorphes.
2. Généraliser au cas multilinéaire.

WWW.TALIB24.COM

Chapitre 2

Applications différentiables

1 Notion de différentiabilité

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés et U un ouvert non vide de E.

Définition 1.1 *Une application $f : U \longrightarrow F$ est dite différentiable en un point $a \in U$ s'il existe une application linéaire continue L de E dans F telle que*

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|}{\|x-a\|_E} = 0$$

Si l'on pose $h = x - a$, on obtient

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|_E} = 0$$

Si L existe elle est appelée ***différentielle*** *de f au point a et notée df_a ou $f'(a)$.*

Proposition 1.2 *f est différentiable en a si et seulement si $\|f(x) - f(a) - L(x-a)\| = o(\|x-a\|)$.*

2 Exemples

1. Toute application constante est différentiable et on a $df_x = 0$, pour tout x.
2. Toute fonction à variable réelle est différentiable si et seulement si elle est dérivable et on a $df_a(h) = h.f'(a)$.
3. Toute application linéaire continue f est différentiable et on a $df_a = f$ sur E.
4. Si B est bilinéaire continue sur $E \times E$ alors elle est différentiable et on a

$$dB_{(a_1,a_2)}(h_1, h_2) = B(a_1, h_2) + B(h_1, a_2)$$

Proposition 2.1 *Si f est différentiable en a alors sa différentielle en a est unique*

Proposition 2.2 *Si f est différentiable en a alors elle est continue en a.*

WWW.TALIB24.COM

Définition 2.3 *On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U.*
Dans ce cas, on obtient une application df

$$\begin{aligned} df : \ & U \longrightarrow \mathfrak{L}(E,F) \\ & x \longrightarrow df_x \end{aligned}$$

df est appelée différentielle de f.
Si de plus, df est continue, on dit que f est continument différentiable ou que f est de classe C^1

Remarque 2.4 *La différentiabilité d'une application ne change pas si on remplace une norme par une norme équivalente.*

3 Opération sur les différentielles

Proposition 3.1 *Si $f, g : U \subset E \longrightarrow F$ sont différentiables, alors*

1. *$f+g$ est différentiable sur U et on a $d(f+g)_x = df_x + dg_x$, pour tout $x \in U$.*
2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est différentiable sur U et on a $d(\lambda f)_x = \lambda df_x$, pour tout $x \in U$.*

Preuve. Evidente.

Corollaire 3.2 *L'ensemble des applications différentiables est un sous espace vectoriel de $\mathfrak{F}(U,F)$; et l'application d est linéaire de ce sous espace vectoriel dans $\mathfrak{L}(E,F)$.*

Proposition 3.3 *Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $g : V \longrightarrow G$. Si f est différentiable en $x \in U$ et g différentiable en $y = f(x) \in V$, alors gof est différentiable en x; et on a $d(gof)_x = dg_{f(x)} o df_x$*

Proposition 3.4 *Soient f et g deux applications définies sur un ouvert non vide d'un e.v.n et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si f et g sont différentiables en $x \in U$, alors fg est différentiable en x; et on a*

$$d(fg)_x = f(x)dg_x + g(x)df_x$$

Proposition 3.5 *Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en x et si $f(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est différentiable en x et on a : $d(\frac{1}{f})_x = -\frac{df_x}{(f(x))^2}$.*

Corollaire 3.6 *Si f et g sont différentiables en a et si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est différentiable en a et on a :*

$$d(\frac{f}{g})_a = \frac{f(a)dg_a - g(a)df_a}{(g(a))^2}$$

WWW.TALIB24.COM

4 Dérivée directionnelle

Définition 4.1 *Soit $f : U \longrightarrow F$ et $a \in U$. On dit que f admet au point a une dérivée directionnelle suivant la direction $h \in E$ si l'application*

$$t \longrightarrow f(a + th)$$

est dérivable en 0. (On notera $D_{\vec{h}}f(a)$.

Exemple 4.2 *Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \dfrac{y^3}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$. Pour tout $\vec{h} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$f((0,0) + t(a,b)) = \frac{t^3b^3}{ta}$$

pour $a \neq 0$ et égal à 0 pour $a = 0$. On en déduit que pour tout $\vec{h}$, on a $D_{\vec{h}}f(0,0)$ existe et vaut 0.

Proposition 4.3 *Si $f : U \subset E \longrightarrow F$ est différentiable alors pour tout $x \in U$ et $h \in E$, l'application définie par*

$$g(t) = f(x + th)$$

est dérivable en 0; et on a $g'(0) = df_x(h)$.
$g'(0)$ est la dérivée de f au point x dans la direction de h.

La réciproque est fausse

Exemple 4.4 *Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \dfrac{y^3}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$.*
L'application $t \longrightarrow \gamma(t) = (t^3, t)$ est continue en $t = 0$ et $\gamma(0) = (0, 0)$.
Si f est continue en $(0, 0)$, $fo\gamma$ serait continue en 0; mais $fo\gamma(t) = 1$ et $fo\gamma(0) = 0$.
On en déduit que f est non continue en $(0, 0)$; et donc elle est non différentiable.

5 Cas d'un espace produit

5.1 Cas où F est un espace produit

Supposons que $F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$; et

$$\begin{aligned} f : \ & U \subset E \longrightarrow F \\ & x \longrightarrow f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \end{aligned}$$

Proposition 5.1 *f est différentiable en x si et seulement si les applications $f_1, \cdots, f_n$ sont différentiables en x; et dans ce cas, on a :*

$$df_x = (d(f_1)_x, \cdots, d(f_n)_x)$$

Exemple 5.2 *Soit F est un espace vectoriel de dimension n avec $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de F. Si $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$, alors f est différentiable si et seulement si les f_i sont différentiables; et dans ce cas, on a :*

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} d(f_i)_a(h)e_i$$

WWW.TALIB24.COM

5.2 Cas où E est un espace produit

Supposons que $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$; et

$$\begin{aligned} f: \ & U \subset E \longrightarrow F \\ & x = (x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

et on définit les applications partielles f_i par $f_i(t) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n)$

Proposition 5.3 *Si f est différentiable en x alors pour tout $i = 1, \cdots, n$, l'application partielle f_i est différentiable en x_i; et on a :*

$$df_x(h) = \sum_{j=1}^{n} d(f_j)_{x_j}(h_j)$$

Remarque 5.4 *La différentiabilité des applications partielles n'entraîne pas la différentiabilité de f*

Proposition 5.5 *Si f est différentiable dans U alors f est de classe C^1 si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues de U dans $\mathcal{L}(E_i, F)$.*

5.3 Combinaison des cas précédents

Soit $f : U \subset E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F = F_1 \times \cdots \times F_m$.
Soit p_i la projection de E sur E_i et q_i l'injection canonique de F_i dans F définies par :

$$p_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i \quad \text{et} \quad q_i(y_i) = (0, \cdots, 0, y_i, 0 \cdots, 0)$$

Si f est différentiable en $a \in U$, alors

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} q_i o \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) o p_j$$

où $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \in \mathcal{L}(E_j, F_i)$.

6 Cas de la dimension finie

Soit $E = I\!R^p$, $F = I\!R^q$, $x \in I\!R^p$ de coordonnées $(x_1, \cdots, x_p)$ et $y \in I\!R^q$ de coordonnées $(y_1, \cdots, y_p) \in I\!R^p$ dans les bases canoniques.

6.1 Dérivées partielles

Pour $x \in U$ de composantes $(x_1, \cdots, x_p)$, on pose

$$V_i(x) = \{t \in I\!R / \quad (x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_p) \in U\}$$

V_i est un voisinage de x_i.
On suppose que $f : U \longrightarrow F$ est différentiable.

WWW.TALIB24.COM

Proposition 6.1 *L'application*

$$\begin{aligned} g_i : V_i(x) &\longrightarrow F \\ t &\longrightarrow f(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_p) = f(x + (t - x_i)e_i) \end{aligned}$$

est dérivable en x_i; et on a $g_i'(x_i) = df_x(e_i)$. C'est la dérivée de f au point x dans la direction de e_i.
Notations. Il est d'usage de noter cette dérivée sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad \partial_{x_i} f(x) \quad \partial_i f(x)$$

Définition 6.2 *Ces dérivées sont appelées dérivées partielles de f*

Proposition 6.3 *Pour tous $x \in U$ et $h \in E$, on a*

$$df_x(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Preuve. Par linéarité de df_x, on obtient :

$$df_x(h) = df_x(\sum_{i=1}^{p} h_i e_i) = \sum_{i=1}^{p} h_i df_x(e_i) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Si on désigne par $dx_i : h \longrightarrow h_i$, on obtient une forme linéaire continue sur E. On obtient ainsi

$$df_x = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$$

Si $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_q(x))$, on obtient

$$df_x(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \cdots, \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(x)) \quad = \quad h_i \cdot \nabla f_i$$

Théorème 6.4 *$f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est continument différentiable si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.*

6.2 Matrice Jacobienne

Si

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^q \\ x &\longrightarrow (f_1(x), \cdots, f_q(x)) \end{aligned}$$

est différentiable au point x, alors sa matrice Jacobienne est définie comme étant la matrice de df_x dans les bases canoniques ; elle est donnée par :

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x) & \cdots & \partial_{x_p} f_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{x_p} f_q(x) & \cdots & \partial_{x_p} f_q(x) \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{R})$$

On obtient ainsi

$$df_x(h) = Df(x)(h_1, \cdots, h_p)^t$$

Si $p = q$, le déterminant de $Df(x)$ est appelé Jacobien de f en x.

WWW.TALIB24.COM

Remarque 6.5 *1. S $p = q$ df_x est un isomorphisma linéaire si et seulement le Jacobien est non nul.*

2. Les coefficients de la matrice jacobienne sont

$$Df(x)_{ij} = \partial_{x_j} f_i(x)$$

En particulier si $q = 1$, $Df(x)$ est une matrice uniligne

3. On note $\nabla f(x)$, la transposée de la matrice jacobienne. Autrement dit

$$(\nabla f(x))_{ij} = (\partial_{x_i} f_j(x)$$

ceci est utilisé souvent dans le cas où $q = 1$. Dans ce cas, $\nabla f(x)$ est un vecteur colonne appelé gradient de f au point x.

4. $D(gof)(x) = Dg(f(x))Df(x)$

7 Exercices

Exercice 1 Si f est continue en a et si

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|}{\|x-a\|_E} = 0$$

alors L est continue.

Exercice 2 Soit U un ouvert non vide d'un e.v.n et $x_0 \in U$. Deux applications f et g définies de U dans un e.v.n F sont dites tangentes en x_0 si

$$\sup_{x \in B(x_0,r)} \|f(x) - g(x)\| = o(r).$$

C'est-à-dire

$$\lim_{r \to 0} \frac{\sup_{x \in B(x_0,r)} \|f(x) - g(x)\|}{r} = 0$$

Exercice 3 Si f et g sont tangentes en x_0, alors $f - g$ est continue en x_0

Exercice 4 Une application f est différentiable en x_0 s'il existe une application linéaire continue L sur E telle que $f(x) - f(x_0)$ et $L(x) - L(x_0) = L(x - x_0)$ soient tangentes en x_0.

Exercice 5 Toute application multilinéaire continue est différentiable. si φ est une application multilinéaire, on obtient

$$d\varphi_{(a_1,\cdots,a_n)}(h_1,\cdots,h_n) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(a_1,\cdots,a_{j-1},h_j,a_{j+1},\cdots,a_n)$$

En effet, si $h = (h_1,\cdots,h_n)$ et $a = (a_1,\cdots,a_n)$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a_1+h_1,\cdots,a_n+h_n) = \sum_{x_i \in \{a_i,h_i\}} f(x_1,\cdots,x_n) \\ &= f(a_1,\cdots,a_n) + f(h_1,a_2\cdots,a_n) \\ &+ f(a_1,h_2,a_3,\cdots,a_n) + \cdots + f(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},h_n) + g(a,h) \end{aligned}$$

WWW.TALIB24.COM

où $g(a,h)$ est une somme de termes de la forme $f(x_1,\cdots,x_n)$ avec $x_i = h_i$ si $i \in I$ et $x_i = a_i$ si $i \notin I$ avec $I \subset \{1,2,\cdots,n\}$ tel que card $I \geq 2$.
Par continuité de f, on a

$$\|g(x,h)\| \leq \|f\| \max_{i=1,\cdots,n} \|x_i\|_i \leq \max \|a_i\|_i \pi_{i\in I} \|h_i\| \leq \|f\| \, \|a\| \, \|h\|^2$$

Il en résulte que $g(a,h) = o(\|h\|)$. D'où le résultat.

Exercice 6 Une fonction continue admettant des dérivées directionnelles continues et non différentiable.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

L'application g définie par :

$$g(x,x^2) = |x|^3$$

et $g(x,y) = 0$ si $y \neq x^2$

Exercice 7 Soient E et F deux espaces de Banach et $U = Is(E,F)$. Monter que l'application φ définie sur U par $\varphi(u) = u^{-1}$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 8 Différentiabilté de la norme? $\|x\|^2 =< x,x >$; on trouve $df_x(h) = 2 < x,h >$.
$dg_x(h) = \dfrac{< x,h >}{\|x\|}$ non diff en 0
la norme max sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas diff pour $x = y$?

WWW.TALIB24.COM

Chapitre 3

Théorème des accroissements finis

0.1 Fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

Théorème 0.1 (Théorème de Rolle) *Soit $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ qui est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème 0.2 (Théorème des accroissements finis) *Soit $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ qui est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.*

0.2 Fonction définie sur un espace de Banach à valeurs réelles

On rappelle que

$$[a,b] = \{ta + (1-t)b; \qquad t \in [0,1]\}$$

$$]a,b[= \{ta + (1-t)b; \qquad t \in]0,1[\}$$

Définition 0.3 *Une partie non vide C de E est dite convexe si pour tous $a, b \in C$, on a $[a,b] \subset C$.*

Théorème 0.4 *Soit U un convexe de E, $f : U \longrightarrow I\!R$ une application continue. Soient $a, b \in U$ telle que f soit différentiable en tout point de $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = df_c(b-a)$$

Remarque 0.5 *Ce théorème est non valable pour les fonctions à valeurs non réelles.*

0.3 Fonction d'une variable réelle

Soit I un intervalle ouvert de $I\!R$, F un espace de Banach et $f : I \longrightarrow F$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe k tel que $|f'(t)| \leq k$, pour tout $t \in I$. Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k|x-y|, \quad \text{pour tous } x, y \in I$$

Remarque 0.6 *On peut raffiner cette inégalité, en remplaçant k par $\sup_{t \in I} \|f't)\|$*

WWW.TALIB24.COM

Théorème 0.7 *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ à valeur dans un espace de Banach F. On suppose qu'il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que*

$$\|f'(t)\|_F \leq \varphi'(t), \quad \text{pour tout } t \in I$$

Alors $\|f(x) - f(y)\| \leq |\varphi(x) - \varphi(y)|$, pour tous $x, y \in I$.

0.4 Cas général

Supposons que E et F sont des espaces de Banach.

Théorème 0.8 *Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ une fonction différentiable sur un ouvert convexe U. On suppose qu'il existe une constante k telle que $\|df_u\| \leq k$, pour tout $u \in U$. Alors*

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E, \quad \text{pour tous } x, y \in U$$

Remarque 0.9 *On peut raffiner l'inégalité en remplaçant k par $\sup\limits_{t\in[0,1]} \left\|df_{x+t(y-x)}\right\|$ et même par $\sup\limits_{t\in]0,1[} \left\|df_{x+t(y-x)}\right\|$*

Proposition 0.10 *Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ et soient $x, y \in U$ tels que $[x, y] \subset U$. On suppose que f est continue sur $[x, y]$ et différentiable sur $]x, y[$. Alors*

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \sup_{t\in]0,1[} \left\|df_{x+t(y-x)}\right\| \|x - y\|_E$$

Corollaire 0.11 *Soit $U \subset E$ convexe et $f : U \longrightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $M = \sup\limits_{x\in E} \|df_x\| < +\infty$ alors f est lipschitzienne sur U.*

1 Applications

Proposition 1.1 *Soit $f : U \longrightarrow F$. Si U est un ouvert connexe non vide et si f est différentiable sur U avec $df = 0$ sur U, alors f est constante.*

Proposition 1.2 *Soit $f : U \longrightarrow F$ continue et différentiable sur $U - \{a\}$. Si $df : U - \{a\} \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ se prolonge par continuité en a en prenant la valeur $L \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est différentiable en a et on a $df_a = L$.*

Théorème 1.3 *Supposons que $E = \pi_{i=1}^n E_i$. Une fonction $f : U \subset E \longrightarrow F$ est continument différentiable si et seulement si pour tous $i = 1, \cdots, n$ et $x \in U$, l'application partielle $f_i(y_i) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ est différentiable en x_i et sa différentielle est continue de U dans $\mathcal{L}(E_i, F)$.*

WWW.TALIB24.COM

Chapitre 4

Difféomorphismes

Définition 0.1 *Soient U et V deux ouverts de E et F; on dit que $f : U \longrightarrow V$ est un difféomrphisme si*

- *f est une bijection*
- *f est continument différentiable*
- *f^{-1} est continument différentiable*

Proposition 0.2 *Si f est un difféomorphisme, alors sa différentielle en tout point x est un isomorphisme de E sur F; et la différentielle de f^{-1} est liée à celle de f par*

$$d(f^{-1})_y = (df_{f^{-1}(y)})^{-1}, \quad \textit{pour tout } y \in V$$

Proposition 0.3 *S'il existe un difféomorphisme d'un ouvert de E sur un ouvert V de F, alors les deux espaces sont isomorphes*

Théorème 0.4 (Théorème d'inversion locale) *Si $f : U \longrightarrow V$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $a \in U$ est tel que df_a est un isomorphisme de E dans F, alors il existe un voisinage U_a de a dans U et un voisinage V_b de $b = f(a)$ dans V tel que la restriction de f à U_a soit un difféomorphisme de U_a sur V_b.*

Corollaire 0.5 *Soit $f : U \longrightarrow F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est un difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si*

1. *f est injective*
2. *sa différentielle est en tout point de U un isomorphisme de E sur F.*

Corollaire 0.6 *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ injective et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est un difféomorphisme si et seulement si le déterminant de sa matrice jacobienne ne s'annule pas sur U.*

1 Théorème des fonctions implicites

Le théorème traite la résolution des équations non linéaires de la forme

$$f(x, y) = 0$$

Soient E, F et G trois espaces de Banach.

WWW.TALIB24.COM

Théorème 1.1 *Soit U un ouvert non vide de $E \times F$ et $f : U \longrightarrow G$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$. Et, la différentielle partielle $\partial_2 f$ par rapport à y est telle que $\partial_2 f_{(a,b)}$ soit un isomorphisme de F sur G. Alors il existe un voisinage ouvert $U_{(a,b)}$ de (a, b) dans U et un voisinage ouvert W_a de a dans E et une fonction de classe $\mathcal{C}^1(W_a, F)$*

$$\varphi : W_a \longrightarrow F$$

telle que

$$(x, y) \in U_{(a,b)} \quad \text{et} \quad f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$$

Proposition 1.2 *Sous les conditions du théorème des fonctions implicites, on a :*

$$d\varphi_x(h) = -(d_2 f_{(x,\varphi(x))})^{-1} d_1 f_{(x,\varphi(x))}(h)$$

pour tout $x \in W_a$ et pour tout $h \in E$.

WWW.TALIB24.COM

Chapitre 5

Différentielles d'ordre supérieur

1 Différentielle d'ordre 2

Définition 1.1 *Une fonction f définie sur un ouvert non vide U d'un espace de Banach réel E et à valeur dans un espace de Banach réel F est dite deux fois différentiable en $x \in U$ si*

1. *elle est différentiable dans un voisinage ouvert U_x de x*
2. *sa différentielle $df : U_x \longrightarrow \mathfrak{L}(E, F)$ est différentiable en x*

On dit que f est deux fois différentiable dans U si elle est différentiable en tout point de U.

Par définition, la différentielle de df en x que l'on écrit $d(df)_x$ est une application linéaire continue de E dans $\mathfrak{L}(E, F)$.
Autrement dit, on a

$$df : U \longrightarrow \mathfrak{L}(E, F)$$

et

$$d(df)_x : U \longrightarrow \mathfrak{L}(E, \mathfrak{L}(E, F))$$

mais elle s'identifie naturellement à une application linéaire continue sur $E \times E$ grâce au résultat suivant :

Proposition 1.2 *Soient E, F et G des espaces de Banach. Alors les espaces $\mathfrak{L}(E, \mathfrak{L}(E, F))$ et $\mathfrak{L}(E \times F, G))$ munis des normes naturelles*

$$\|l\|_{\mathfrak{L}(E,\mathfrak{L}(E,F))} = \sup\{\|l(h)\|_{\mathfrak{L}(F,G))}, \quad \|h\|_E \leq 1\}$$

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{L}(E\times F,G)} = \sup\{\|\varphi(h,k)\|_G, / \quad \|h\|_E \leq 1, \|k\|_F \leq 1\}$$

sont isométriques.

Preuve.

Définition 1.3 *La différentielle seconde d'une fonction $f : U \subset\longrightarrow F$ deux fois différentiables est l'application définie par :*

$$\begin{aligned} d^2 f : U &\longrightarrow \mathfrak{E} \times \mathfrak{F}, \mathfrak{G} \\ x &\longrightarrow d^2 f_x \end{aligned}$$

où $d^2 f_x(h, k) = d(df)_x(h)(k), \quad$ pour tout $(h, k) \in E \times E$

WWW.TALIB24.COM

Remarque 1.4 *On peut interpréter cette définition de la façon suivante (que l'on peut utiliser en pratique pour calculer $d^2 f$) :*
Si Si f est deux fois différentiable sur U, alors pour chaque $k \in E$, l'application

$$\begin{aligned} g : U &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow df_x(k) \end{aligned}$$

est différentiable et on a $dg_x(h) = d^2 f(h, k)$

Théorème 1.5 (Theorem de Schwartz) *Si $f : U \subset E \longrightarrow F$ est deux fois différentiable en x, alors $d^2 f_x$ est bilinéaire symétrique ; c'est-à-dire pour tout $(h, k) \in E \times E$, on a $d^2 f_x(h, k) = d^2 f_x(k, h)$*

Preuve.

Exemple 1.6
1. *Une application affine $f(x) = l(x) + b$ avec $l \in \mathfrak{L}(E, F)$ et $b \in F$ est deux fois diférentiable et sa différentielle seconde est nulle.*
2. *Une application quadratique $f : x \longrightarrow \varphi(x, x)$ avec $\varphi \in \mathfrak{L}(E \times E, F)$ est deux fois différentiable et sa différentielle seconde est constante ; égale à 2φ si φ est symétrique.*

1.1 En dimension finie

Définition 1.7 (Matrice Hessienne) *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Si f est deux fois différentiable sur l'ouvert U, alors pour tout $x \in U$ et pour tous $i, j \in \{1, \cdots, p\}$*

$$d_x^2 f(e_i, e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

Alors la matrice

$$d^2 f_x := Hess f_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(x) \end{pmatrix}$$

est appelée matrice Hessienne de f en x.

Le théorème de Schwartz montre que la matrice Hessienne est symétrique.

2 Différentielle d'ordre n

Pour les entiers $n \geq 2$, on définit par récurrence les notions suivantes, qui généralisent le $n = 2$.

Définition 2.1 *Soit une fonction f définie sur un ouvert U d'un espace de Banach réel E et à valeurs dans espace de Banach F et $n \geq 2$. On dit qu'elle est :*

WWW.TALIB24.COM

1. *n fois différentiable en $x \in U$ si elle est différentiable dans un voisinage ouvert U_x de x et si sa différentielle $df : U_x \longrightarrow \mathfrak{L}(E, F)$ est $n-1$ fois différentiable en x*
2. *n fois différentiable sur U si elle est n fois différentiable en tout point de U.*

Proposition 2.2 *les applications k-linéaires sont de classe $\mathfrak{C}^\infty$*

Proposition 2.3 *Si $f : U \subset E \longrightarrow F$ est n fois différentiable en x et $g : V \subset F \longrightarrow G$ est n fois différentiable en $y = f(x) \in V$, alors gof est différentiable en x.*

Proposition 2.4 *Si f est un difféomorphisme de U sur V et si f est de classe $\mathfrak{C}^n$, alors f^{-1} est de classe $\mathfrak{C}^n$.*

WWW.TALIB24.COM

Chapitre 6

Formule de Taylor

1 Formule de Taylor avec reste intégrale

1.1 Fonction d'une variable réelle à valeur réelle

Théorème 1.1 *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^{p+1}(I, \mathbb{R})$ et $a, b = a + h \in I$, alors*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^{p+1}}{p!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(a+th) dt$$

1.2 Fonction d'une variable réelle à valeur dans un espace de Banach

Lemme 1.2 *Soient I un ouvert de $\mathbb{R}$, F un espace de Banach et $g : I \longrightarrow F$ une fonction $(n+1)$ fois dérivable. Alors pour tout $t \in I$, on a :*

$$\frac{d}{dt}\left(g(t) + \sum_{p=1}^{n} \frac{(1-t)^p}{p!} g^{(p)}(t)\right) = \frac{(1-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)$$

Preuve.

Proposition 1.3 *Si $g : [a, b] \longrightarrow F$, alors*

$$\left\| \int_a^b g(t)_d x t \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt$$

2 Formule de taylor Lagrange

2.1 Fonction d'une varaible réelle à valeur dans un espace de Banach

Proposition 2.1 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $[0, 1]$, F un espace de Banach et $g : I \longrightarrow F$ une fonction $(n+1)$ fois différentiable telle que*

$$\left\| g^{(n+1)}(t) \right\| \leq M, \quad \textit{pour tout } t \in [0, 1]$$

WWW.TALIB24.COM

alors

$$\left\| g(1) - g(0) - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} g^{(p)}(0) \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!}$$

Preuve.

2.2 Fonction d'un espace de Banach à valeur dans un espace de Banach

Théorème 2.2 *Soit U est un ouvert d'un espace de Banach et F un espace de Banach. Soit $f : U \longrightarrow F$ une fonction $(n+1)$ fois différentiable et $(x, h) \in U \times F$ tel que $[x, x+h] \subset U$.*
Si $\sup_{y \in [x, x+h]} \left\| d^{n+1} f_y \right\|_{\mathcal{L}_{n+1}(E,F)} \leq M$ *alors*

$$\left\| f(x+h) - f(x) - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} d^p f_x(h^{[p]}) \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!} \|h\|^{n+1}$$

Cette inégalité généralise le théorème des accroissements finis et connue sous le nom de la Formule de Taylor avec reste de Lagrange. (Le reste n'est connu que par une majoration contrairement au reste intégral qui est entièrement déterminé.

3 Formule de Taylor Young

Théorème 3.1 *Soit U est un ouvert d'un espace de Banach et F un espace de Banach. Soit $f : U \longrightarrow F$ une fonction n fois différentiable en $x \in U$, alors*

$$\left\| f(x+h) - f(x) - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} d^p f_x(h^{[p]}) \right\| = o(\|h\|^n)$$

WWW.TALB24.COM

Chapitre 7

Extremums

On étudie les extremums d'une fonction à valeurs réelles. L'objectif est de déterminer les conditions nécessaires et (ou) suffisantes pour l'existence de minimum selon le degré de différentiabilité.

1 Extremums libres

Définition 1.1 *Soit f une fonction définie sur une partie D d'un espace de Banach E à valeurs réelles. Un point $a \in D$ est dit un minimum local s'il existe un voisinage ouvert V_a de a dans D tel que*

$$f(x) \geq f(a), \qquad \text{pour tout } x \in V_a$$

Dans le cas où $V_a = D$, on dit que c'est un minimum global.
Si de plus,

$$f(x) > f(a), \qquad \text{pour tout } x \in V_a - \{a\}$$

on dit que c'est minimum strict.

Proposition 1.2 *Soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en $a \in I$. Si a est un minmum local de g, alors $g'(a) = 0$. Si g est deux fois dérivable en a, alors $g''(a) \geq 0$.*
Réciproquement, si $b \in I$ est tel que $g'(b) = 0$ et $g''(b) > 0$, alors b est un minimum local de g.

Plus généralement, on a :

Théorème 1.3 *Soit f est une fonction définie sur un ouvert U d'un espace de Banach E à valeurs réelles, différentiable en $a \in U$. Si a est un minimum local de f, alors $df_a = 0$.*
Si de plus, f est deux fois différentiable en a, alors $d^2 f_a(h,h) \geq 0$ pour tout $h \in E$.
Inversement si $b \in U$ est tel que $df_b = 0$ et s'il existe $c > 0$ tel que $d^2 f_b(h,h) \geq c\,\|h\|^2$, pour tout $h \in E$, alors b est un minimum local de f.

WWW.TALIB24.COM

2 Extremums liés

Définition 2.1 *Soit $f, g_1, \cdots, g_p$ des fonctions définies sur un ouvert U d'un espace de Banach E et à valeurs réelles. Un point $a \in U$ tel que $g_1(a) = g_2(a) = \cdots = g_p(a) = 0$ est un minimum local de f sous les contraintes $g_1, \cdots, g_p$ s'il existe un voisinage ouvert V_a de a tel que*

$$f(x) \geq f(a), \quad \textit{pour tout } x \in V_a \textit{ vérifiant } g_1(a) = g_2(a) = \cdots = g_p(a) = 0$$

Définition 2.2 *On dira que les contraintes $g_1, \cdots, g_p$ sont indépendantes au point a si la famille des formes linéaires continues*

$$\{d(g_1)_a, \cdots, d(g_p)_a\} \textit{estlibre.}$$

Théorème 2.3 *Soit $f, g_1, \cdots, g_p$ des fonctions de classe Cç1 sur un ouvert U d'un espace de Banach E et à valeurs réelles. Soit $a \in U$ tel que $g_1(a) = g_2(a) = \cdots = g_p(a) = 0$ et les contraintes $g_1, \cdots, g_p$ sont indépendantes au point a.*
Si a est un minimum local de f sous les contraintes $g_1, \cdots, g_p$ alors il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ réels tels que

$$df_a = \lambda_1 d(g_1)_a + \cdots + \lambda_p d(g_p)_a$$

Les réels λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

WWW.TALIB24.COM