TD 1 D'ALGEBRE 1 SMA SMI

Exercice 1

Donner la négation des propositions suivantes :

(a) $x < 4$

(b) $x > 2$ et $x \leq 4$

(c) (P et Q) ou R

(d) (Pou Q) et R

(e) (P et non(Q))$\Rightarrow$ R

(f) $\forall$ $x \in X$ P(x) et non Q(x)

(g) $\forall$ $x \in$ IR , $\exists$ $y \in$ IR $x=y^2$

(h) $\exists$ $x \in$ IR $\exists$ $y \in$ IR $x=y^2$ et $y>0$

Exercice 2

Soit $x \in$ IR . Trouver toutes les implications et les équivalences existant entre les propositions suivantes :

A : $x > 0$ B : $x < 3$ C : $x^2 < 9$ D : $|x| < 3$

Exercice 3

Soit f une fonction de IR dans IR . Ecrire les propositions suivantes à l'aide de symboles logiques et de quantificateurs

(a) f est décroissante sur IR .

(b) f est croissante sur IR .

(c) f admet un minimum en a

(d) f admet un minimum .

(e) f admet un maximum en a et n'est pas minorée .

(f) si f est positive en -1 et négative en 1 alors f s'annule entre 1 et -1 .

(g) f n'est jamais nulle .

WWW.TALIB24.COM

Exercice 4

Soit a et b deux entiers ,donner à l'aide de symboles logiques et de quantificateurs une expression des propositions suivantes , puis donner leur négation

(a) a divise b

(b) a et b sont de parité différente .

Exercice 5

Soit x et y deux réels . Montrer que si ($x \neq 1$) et ($y \neq 1$) alors ($xy + 1 - x - y \neq 0$)

Exercice 6

Demontrer par l'absurde que $(\forall \varepsilon > 0 \quad a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$

Exercice 7

Soit les quatres assertions suivantes :

(a) $\exists x \in IR \ \forall y \in IR \ x + y > 0$ (b) $\forall x \in IR \ \exists y \in IR \ x + y > 0$

(c) $\forall x \in IR \ \forall y \in IR \ x + y > 0$ (d) $\exists x \in IR \ \forall y \in IR \ y^2 > x$

1) Les assertions a ,b , c, d sont-elles vraies ou fausses ?

2) Donner leur négation .

Exercice 8

On cherche à determiner l'ensemble des applications de IR vers IR telles que :

$$\forall x , y \in IR \ f(x)f(y) - f(xy) = x+y$$

(a) On suppose qu'une telle foction f existe ,démontrer que necessairement $f(0) = 1$

(b) En déduire dans ce cas l'expression de f

(c) Conclure

Exercice 9

Completer les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

1) $x \in IR \ x^2 = 4$ ..$\Leftrightarrow$...$x = 2$

2) $z \in \mathbb{C} \ z = \bar{z}$..$\Rightarrow$..$z \in IR$

3) $x \in IR \ x = \pi$.....$\Rightarrow$.$e^{2ix} = 1$

Exercice 10

Dans IR^2 , on définit les ensembles $F_1 = \{(x , y) \in IR^2, y \leq 0\}$ et $F_2 = \{(x , y) \in IR^2, xy \geq 1, x \geq 0\}$

Evaluer les propositions suivantes :

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_1 \in F_1 \ \exists M_2 \in F_2 / \ \|\overrightarrow{M_1M_2}\| < \varepsilon$

2) $\exists M_1 \in F_1 \ \exists M_2 \in F_2 \ / \forall \varepsilon > 0 \ \|\overrightarrow{M_1M_2}\| < \varepsilon$

3) $\exists \varepsilon > 0 \ / \forall M_1 \in F_1 \ \forall M_2 \in F_2 \ \|\overrightarrow{M_1M_2}\| < \varepsilon$

4) $\forall M_1 \in F_1 \ \forall M_2 \in F_2 \ \exists \varepsilon > 0 \ / \ \|\overrightarrow{M_1M_2}\| < \varepsilon$

quant elles sont fausses , donner leur négation .

WWW.TALIB24.COM

Série d'Algèbre N° 1
(Logique)

Exercice 1 :

La négation des propositions :

	P	$\overline{P}$
(a)	$x < 4$	$x \geq 4$
(b)	$x > 2$ et $x \leq 4$	$x \leq 2$ ou $x > 4$
(c)	(P et Q) ou R	$(\overline{P \text{ et } Q})$ et $\overline{R}$ = ($\overline{P}$ ou $\overline{Q}$) et $\overline{S}$
(d)	(P ou Q) et R	($\overline{P}$ et $\overline{Q}$) ou $\overline{R}$
(e)	(P et non(Q)) $\Rightarrow R$	(P et $\overline{Q}$) et $\overline{R}$
(f)	$\forall x \in X$ $P(x)$ et non $Q(x)$	$\exists x \in X$: $\overline{P(x)}$ ou $Q(x)$
(g)	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ $x = y^2$	$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $x \neq y^2$
h	$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ $x = y^2$ et $y > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$: $x \neq y^2$ ou $y \leq 0$

$\Rightarrow$ Remarque : La proposition dans (g) est fausse. Elle devient vrai si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Exercice 2 :

$A : x > 0$; $B : x < 3$; $C : x^2 < 9$; $D : |x| < 3$

les implications et les équivalences possible :

$A \Rightarrow A$ $\qquad$ $(A \text{ et } B) \Rightarrow C$

$B \Rightarrow B$ $\qquad$ $C \not\Rightarrow (A \text{ et } B)$ $\qquad$ $C \not\Rightarrow B$

$\begin{cases} C \Rightarrow C \\ C \Leftrightarrow D \end{cases}$ $\qquad$ $B \not\Rightarrow C$ $\qquad$ $A \not\Rightarrow B$

$A \not\Rightarrow C$

WWW.TRUIB24.COM

Exercice 3 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Propositions	Expression en symboles
(a) f est décroissante sur $\mathbb{R}$	$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
(b) f est croissante sur $\mathbb{R}$	" : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
(c) f admet un minimum en a	$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(a)$
(d) f admet un minimum	$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(m)$
(e) f admet un maximum en a et n'est pas minorée	$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq f(a)$ et $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) \leq m$
(f) si f est positive en (-1) et négative en 1 alors f s'annule entre 1 et (-1)	f continue, $f(-1) > 0 > f(1)$ $\Rightarrow \exists \alpha \in]-1,1[: f(\alpha) = 0$
(g) f n'est jamais nulle.	$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0$

Exercice 4 :

Proposition	Traduction Mathématique	Négation Mathématique
- a divise b ($a \nmid b$)	$\exists k \in \mathbb{Z} : b = ka$	$\forall k \in \mathbb{Z} : b \neq ka$
- a et b de parité différente	$\exists k \in \mathbb{Z}, \exists k' \in \mathbb{Z} :$ $(a = 2k$ et $b = 2k'+1)$ ou $(a = 2k+1$ et $b = 2k')$	$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall k' \in \mathbb{Z} :$ $(a \neq 2k$ ou $b \neq 2k'+1)$ et $(a \neq 2k+1$ ou $b \neq 2k')$

$\Rightarrow$ Remarque : ① Dire que a et b sont de parité différente est équivalent à dire que $a+b$ est un nombre impaire

② a et b de même parité $\Rightarrow a+b$ est paire.

Exercice 5 :

si $x \neq 1$ et $y \neq 1$

alors $xy + 1 - x - y \neq 0$

supposons que $xy + 1 - x - y = 0$ et Montrons que $x = 1$ ou $y = 1$

$$x + y + 1 - x - y = 0 \Rightarrow x(y-1) - (y-1) = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)(x-1) = 0$$

WWW.TALIB24.COM

$xy + 1 - x - y \Rightarrow x = 1$ ou $y = 1$

Exercice 6 :

Demontrer par l'absurde que $(\forall \varepsilon > 0)$; $a < b + \varepsilon \Rightarrow a \leq b$

on suppose que $a > b$

$a > b \Rightarrow a - b > 0$

soit $a - b = \varepsilon > 0$

$a < b + \varepsilon = b + a - b = a$ (Absurde)

Exercice 7 :

P	$\bar{P}$
(a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$ on prend en particulier pour : $y = -x - 1$ (Fausse)	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$ (Vraie)
(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$ (on prend $y = 1 - x$) (Vraie)	$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$ (Fausse)
(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$ (Fausse)	$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$ (Vraie)
(d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$ on prend $x = -1$ (Vraie)	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 \leq x$ (Fausse)

Exercice 8 :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) f(y) - f(xy) = x + y \quad (*)$

a)

on particulier $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) \times f(0) - f(0) = 0$

$\Rightarrow f(0) [f(0) - 1] = 0$

$\Rightarrow f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$

si $f(0) = 0$ on prend en particulier $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

WWW.TALIB24.COM

alors $f(0) \times f(1) - f(0) = 1$

$\Rightarrow \quad 0 = 1 \quad$ (Absurde)

donc $f(0) = 1$

(b) on prend $x \in \mathbb{R}$, $y = 0$: $f(x) f(0) - f(0) = x$

c'est à dire : $f(x) = x + 1$

$\Leftrightarrow (x+1)(y+1) - (xy+1) = \cancel{xy} + x + y + \cancel{1} - \cancel{xy} - \cancel{1}$

$= x + y$

Donc la fonction $f(x) = x + 1$ satisfait à $(*)$.

conclusion : f existe et est unique.

Exercice 9 :

1- $x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \Leftarrow x = 2$

2- $z \in \mathbb{C} \quad z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

3- $x \in \mathbb{R} \quad x = \pi \Rightarrow e^{2ix} = 1$

Exercice 10 :

$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leq 0\}$; $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 1, x \geq 0\}$

1- $\forall \varepsilon > 0, \exists M_1 \in F_1, \exists M_2 \in F_2 : \|\overrightarrow{M_1M_2}\| < \varepsilon$

soit $\varepsilon > 0$, on pose : $M_1 = \left(\frac{2}{\varepsilon}, 0\right) \in F_1$

$M_2 = \left(\frac{2}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \in F_2$

et on a : $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

P_1 : Vraie.

2- $\exists M_1 \in F_1, \exists M_2 \in F_2 \ / \ \forall \varepsilon > 0 \quad \|\overrightarrow{M_1M_2}\| < \varepsilon$

si $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| < \varepsilon \quad : \forall \varepsilon > 0$

alors $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| < 0 \quad$ (Ex. 6)

Donc $M_1 = M_2 \in F_1 \cap F_2 = \emptyset$ Absurde

$\Rightarrow P_2$ est Fausse.

$\bar{P}_2 = \exists \varepsilon \leq 0, \forall M_1 \in F_1, \forall M_2 \in F_2 \ / \ \|\overrightarrow{M_1M_2}\| \geq \varepsilon$

WWW.TALIB24.COM

3- $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, \forall M_1 \in F_1,\ \forall M_2 \in F_2 \quad \|\overrightarrow{M_1M_2}\| < \varepsilon$

Pour un tel $\varepsilon > 0$

on prend $M_1 : (\varepsilon + 1, 0) \in F_1$

$M_2 : (1, 1) \in F_2$

$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \sqrt{\varepsilon^2 + 1} > \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$

Donc P_3 est Fausse / $\overline{P_3} : \forall \varepsilon < 0 / \exists M_1 \in F_1, \exists M_2 \in F_2 : \|\overrightarrow{M_1M_2}\| \geq \varepsilon$

4- $\forall M_1 \in F_1,\ \forall M_2 \in F_2,\ \exists\, \varepsilon > 0 : \|\overrightarrow{M_1M_2}\| < \varepsilon$

$\forall M_1 \in F_1,\ \forall M_2 \in F_2$, on pose : $\varepsilon = \|\overrightarrow{M_1M_2}\| + 1$

P_4 est vraie.

WWW.TALIB24.COM

Série d'Algèbre N° 2

-SMI-

Exercice 1

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$.
2. $A \backslash B = \complement_E B \backslash \complement_E A$.
3. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$ et $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
4. $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$.

Exercice 2

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on définit l'application caractéristique de A par

$$\begin{array}{rccl} \chi_A : & E & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Montrer les affirmations suivantes :

1. $A \subset B \Rightarrow \chi_A \leq \chi_B$.
2. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$.
3. $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$.
4. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$.

Exercice 3

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Notons $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ la différence symétrique de A et B.

1. Vérifier que $A \Delta B = B \Delta A$ et que Δ est associatif.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
3. Montrer que $A \Delta B = \bar{A} \Delta \bar{B}$
4. Démontrer que si $A \Delta B = A \Delta C$ alors $B = C$.

WWW.TALIB24.COM

Exercice 4

Soient E et F deux ensembles, A une partie de E et B une partie de F. Soit f une application de E vers F. Montrer que :

1. $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
2. $A \subset f^{-1}(f(A))$ et que l'inclusion peut être stricte. Montrer que
$$[\forall A \subset E, A = f^{-1}(f(A))] \Leftrightarrow f \text{ injective.}$$
3. $f^{-1}(f(B)) \subset B$. A quelle condition nécessaire et suffisante y-a-t-il égalité pour tout $B \subset F$? Justifier votre réponse.

Exercice 5

Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. On pose $h = g \circ f$. Montrer que

1. Si h est surjective et g est injective, alors f est surjective.
2. Si h est injective et f est surjective, alors g est injective.
3. Si h est bijectibe, alors f est surjective si et seulement si g est injective.

Exercice 6

Parmi les applications suivantes, déterminer les injections, les surjections et les bijections :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & x^2 \end{array}, \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & x^2 \end{array}, \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \rightsquigarrow & x^2 \end{array}, \quad u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \rightsquigarrow & x^2 \end{array}$$

Exercice 7

Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \rightsquigarrow & x+y \end{array}; \quad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \rightsquigarrow & (x+y, x-y) \end{array}; \quad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \rightsquigarrow & (x+y, x^2-y^2) \end{array}.$$

WWW.TALIB24.COM

Série d'Algèbre N°2

Rappel :

$A, B, C, D \subset E$

- $C_E^A = \bar{A} = E - A$
- $A - B = \{x \in A, x \notin B\} = A \cap \bar{B}$

  soit $x \in E$, alors : $x \in A - B \iff x \in A$ et $x \in \bar{B}$

  $\iff x \in A \cap \bar{B}$
- $A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$
- $\left.\begin{array}{l} A \subset B \\ C \subset D \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (A \cap C) \subset (B \cap D) \\ (A \cup C) \subset (B \cup D) \end{array}$

Exercice 1 :

1- 1ère Méthode :

$A \subset B \Rightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$

$\Rightarrow /$ $A \subset B \iff A \cap B = A$

$\iff A \cap B \cap \bar{B} = A \cap \bar{B}$

$\iff A \cap \emptyset = A \cap \bar{B}$

$\iff A \cap \bar{B} = \emptyset$

$\Leftarrow /$ $A \cap \bar{B} = \emptyset \Rightarrow A \subset B$

$A \not\subset B \Rightarrow A \cap \bar{B} \neq \emptyset$

on a $A \not\subset B \Rightarrow$ il existe $x \in A$ et $x \in \bar{B}$

$\Rightarrow$ il existe $x \in A \cap \bar{B} \neq \emptyset$

2ème Méthode :

$A \subset B \iff A - B = \emptyset$

$\iff A \cap \bar{B} = \emptyset$

WWW.TALIB24.COM

2 - $A - B = C_E^B - C_E^A = \bar{B} - \bar{A}$

1ère Méthode : Soit $x \in E$

$x \in A - B \iff x \in A$ et $x \in \bar{B}$

$\iff x \in \bar{B}$ et $x \in A$

$\iff x \in \bar{B}$ et $x \notin \bar{A}$

$\iff x \in \bar{B} - A$

2ème Méthode :

$A - B = A \cap \bar{B}$

$= \bar{B} \cap A$

$= \bar{B} \cap \bar{\bar{A}}$

$= \bar{B} - \bar{A}$

3- $(A-C) \cap (B-C) = (A \cap B) - C$ Soit $x \in E$,

$x \in (A-C) \cap (B-C) \iff x \in (A-C)$ et $x \in (B-C)$

$\iff (x \in A$ et $x \notin C)$ et $(x \in B$ et $x \notin C)$

$\iff x \in A$ et $x \in \bar{C}$ et $x \in B$ et $x \in \bar{C}$

$\iff x \in A \cap \bar{C} \cap B \cap \bar{C}$

$\iff x \in (A \cap B) \cap \bar{C}$

$\iff x \in (A \cap B) - C$

$(A-C) \cup (B-C) = (A \cup B) - C$ Soit $x \in E$,

$x \in (A-C) \cup (B-C) \iff x \in (A-C)$ ou $x \in (B-C)$

$\iff (x \in A$ et $x \in \bar{C})$ ou $(x \in B$ et $x \in \bar{C})$

$\iff (x \in A$ ou $x \in B)$ et $x \in \bar{C}$

$\iff x \in (A \cup B)$ et $x \in \bar{C}$

$\iff x \in (A \cup B) \cap \bar{C}$

$\iff x \in (A \cup B) - C$

4- $A \cap B = A \cap C \iff A \cap B = A \cap \bar{C}$

$\Rightarrow / A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap B \subset C$

$\Rightarrow \bar{C} \subset \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\Rightarrow A \cap \bar{C} \subset A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = A \cap \bar{B}$

WWW.TALIB24.COM

$\Rightarrow A \cap \bar{C} \subset A \cap \bar{B}$

Par symétrie $A \cap \bar{B} \subset A \cap \bar{C}$

c'est à dire : $A \cap \bar{C} = A \cap \bar{B}$

$\Leftarrow$ / D'après ce qui précède :

$A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C} \Rightarrow A \cap \bar{\bar{B}} = A \cap \bar{\bar{C}}$

$\Rightarrow A \cap B = A \cap C$

Exercice 2 :

$$\chi_A : E \longrightarrow \{0,1\}$$

$$x \longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

1- Montrons : $A \subset B \Rightarrow \chi_A \leq \chi_B$

Montrons que $\forall x \in E$:

$$\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$$

soit $x \in E$; on distingue les trois cas suivant

1ère cas : si $x \in A$ alors $x \in B$ et on a :

$$\chi_A(x) = 1 = \chi_B(x)$$

2ème cas : si $x \in B - A \neq \emptyset$ $(x \in B$ et $x \notin A)$

alors $\chi_A(x) = 0 < 1 = \chi_B(x)$

3ème cas : si $x \notin B$, alors :

$$\chi_A(x) = 0 = \chi_B(x)$$

$\Rightarrow$ Conséquence :

$$A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$$

$\Leftarrow$ / soit $x \in E$, alors : $x \in A \Leftrightarrow \chi_A(x) = 1$

$\Rightarrow \chi_B(x) = 1$

$\Rightarrow x \in B$

2- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$

soit $x \in E$, on distingue (sans perte de généralité) les trois cas suivantes :

WWW.TANLIB24.COM

i) si $x \in A \cap B$, alors : $\chi_{A\cap B}(x) = 1$ et

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 1 + 1 - 1 = 1$$

ii) si $x \in A - B$, alors : $\chi_{A\cup B}(x) = 1$ et

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 1 + 0 - 0 = 1$$

iii) si $x \notin A \cup B$, alors $\chi_{A\cup B}(x) = 0$ et

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 0 + 0 - 0 = 0$$

Donc : $\boxed{\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}}$

$\chi_{\bar{A}}(x) = 0$

$\chi_A(x) = 1$

$1 - \chi_A(x) = 0$

3 - $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$

soit $x \in E$, on distingue les deux cas suivants :

i) si $x \in A$, alors $x \notin \bar{A}$; et on a :

$$\chi_{\bar{A}}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \chi_A(x) = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \chi_A(x) = 0$$

alors $\chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$

ii) si $x \in \bar{A}$, alors $x \notin A$ et on a :

$$\chi_{\bar{A}}(x) = 1 = 1 - 0$$

$$= 1 - \chi_A(x)$$

$\boxed{\text{donc } \chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A}$

4 - $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$

soit $x \in E$, on distingue (spg) le trois cas suivants :

i) si $x \in A \cap B$, alors :

$$\chi_{A\cap B}(x) = 1 = 1 \times 1$$

$$= \chi_A(x)\chi_B(x)$$

ii) si $x \in A - B$, alors :

$$\chi_{A\cap B}(x) = 0 = 1 \times 0$$

$$= \chi_A(x)\chi_B(x)$$

iii) si $x \notin A \cup B$, alors :

$$\chi_{A\cap B}(x) = 0 = 0 \times 0 = \chi_A(x)\chi_B(x) \Rightarrow \boxed{\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B}$$

WWW.TALIB24.COM

5- $\chi_E = 1$, $\chi_\emptyset = 0$

6- $\chi_{A-B} = \chi_{A\cap\bar{B}} = \chi_A \chi_{\bar{B}}$

$= \chi_A (1 - \chi_B)$

$= \chi_A - \chi_A \chi_B$

Exercice 3 :

$(\bar{A}\cup B)\cap(\bar{B}\cup A)$

$[(\bar{A}\cup B)\cap\bar{B}] \cup [(\bar{A}\cup B)\cap A]$

$$\boxed{\begin{aligned} \chi_{A\Delta B} &= \chi_{(A-B)\cup(B-A)} \\ &= \chi_{A-B} + \chi_{B-A} - \underbrace{\chi_{(A-B)\cap(B-A)}}_{=\emptyset} \\ &= \chi_{A-B} + \chi_{B-A} \\ \chi_{A\Delta B} &= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B \end{aligned}}$$

1- vérifions que $A\Delta B = B\Delta A$ et que Δ est associatif :

+ $A\Delta B = B\Delta A$

+ $\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = \chi_{A\Delta B} + \chi_C - 2\chi_{A\Delta B}\chi_C$

$= (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B) + \chi_C - 2(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\chi_C$

$= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2(\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C) + 4\chi_A\chi_B\chi_C$

(invariante par permutation circulaire)

$= \chi_B + \chi_C + \chi_A - 2(\chi_B\chi_C + \chi_B\chi_A + \chi_{CA}) + 4\chi_B\chi_C\chi_A$

$= \chi_{(B\Delta C)\Delta A}$

$= \chi_{A\Delta(B\Delta C)}$ (Δ est commutatif)

Donc : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

4- Démontrons : $A\Delta B = A\Delta C \iff B = C$

$\Rightarrow$ $A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow A\Delta(A\Delta B) = A\Delta(A\Delta C)$

$\Rightarrow (A\Delta A)\Delta B = (A\Delta A)\Delta C$

$\Rightarrow \emptyset\Delta B = \emptyset\Delta C$

$\Rightarrow B = C$

WWW.TALIB24.COM

2- $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

* $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

$= [(A \cap \bar{B}) \cup B] \cap [(A \cap \bar{B}) \cup \bar{A}]$

$= (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup \bar{A})$

$= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$

$(A \cup B) \cap (\bar{B} \cup \bar{A})$ $A \cap \bar{B}$

$(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$ $A - B$

$(A \cup B)$

* $\chi_{A \cup B - A \cap B} = \chi_{A \cup B} - \chi_{A \cup B} \chi_{A \cap B}$

$= (\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B) - (\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B) \chi_A \chi_B$

$= \chi_A + \chi_B - 2 \chi_A \chi_B$

$= \chi_{A \Delta B}$

3- $A \Delta B = \bar{A} \Delta \bar{B}$

$\bar{A} \Delta \bar{B} = (\bar{A} - \bar{B}) \cup (\bar{B} - \bar{A})$

$= (B - A) \cup (A - B)$

$= B \Delta A = A \Delta B$

Exercice 4 :

1- $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

soit $y \in F$, alors :

$y \in f(A \cap f^{-1}(B)) \iff$ il existe $x \in A \cap f^{-1}(B)$; $y = f(x)$

$\iff$ ... $x \in A$ et $x \in f^{-1}(B)$; $y = f(x)$

$\Rightarrow f(x) = y \in f(A) \cap B$

$y \in f(A) \cap B \Rightarrow$ il existe $x \in A$: $y = f(x)$ et $y \in B$

$\Rightarrow$ il existe $x \in A$ $y = f(x)$ et $x \in f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$ il existe $x \in A \cap f^{-1}(B)$

$y = f(x)$

$\Rightarrow y \in f(A \cap f^{-1}(B))$

alors : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

WWW.TALIB24.COM

2 - $[\forall A \subset E,\ A = f^{-1}(f(A))] \iff f$ injective.

$\Rightarrow /$ soient $x, y \in E$, alors

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(\{x\}) = f(\{y\})$$
$$\Rightarrow f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(f(\{y\}))$$
$$\Rightarrow \{x\} = \{y\}$$
$$\Rightarrow x = y$$

$\Leftarrow /$ soit $x \in E$, alors

$$x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A)$$
$$\Rightarrow \exists\, a \in A : f(x) = f(a)$$
$$\overset{f \text{ injective}}{\Rightarrow} x = a \in A$$

3 -

f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$

$\Leftrightarrow f(E) = F$

$\Leftrightarrow \forall y \in F : f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(E) \subset F \\ f^{-1}(F) = E \end{array}}$$

$F \subset f(E)$

$\forall y \in F : y = f(x) \in f(E)$

$f(x) \in \{y\}$

$x \in f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

$\forall B \subset F : f(f^{-1}(B)) = B \iff f$ surjective.

$\Rightarrow /$ soit $y \in F$, on a : $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\} \neq \emptyset$

Donc $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

$\Leftarrow /$ soit $y \in B$, il existe $x \in E : y = f(x)$

Montrons que : f surjective $\Rightarrow B \subset f(f^{-1}(B))$

Comme $f(x) = y \in B$, on a : $x \in f^{-1}(B)$

Donc $y \in f(f^{-1}(B))$.

Exercice 5 : $h = g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

1 - $\left.\begin{array}{l} h \text{ surjective} \\ g \text{ injective} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ surjective

soit $y \in F$, montrons qu'il existe $x \in E : y = f(x)$

soit $y \in F$, alors $g(y) \in G$. Comme h est surjective, il existe $x \in E : g(y) = h(x)$

on a : $\left.\begin{array}{l} g(y) = g(f(x)) \\ g \text{ injective} \end{array}\right\} \Rightarrow y = f(x)$

WWW.TALEB24.COM

2- $\left.\begin{array}{l} h \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{array}\right\} \Rightarrow g$ injective.

soient $x, y \in E$, tel que $g(x) = g(y)$. Comme f est surjective il existe $a, b \in E$: $x = f(a)$, $y = f(b)$

on a : $\left.\begin{array}{l} h(a) = g(x) = g(y) = h(b) \\ h \text{ injective} \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$

Donc $x = f(a) = f(b) = y$.

3- h bijective, f surjective $\Leftrightarrow$ g injective.

$\Rightarrow$/ $\left.\begin{array}{l} h \text{ bijective} \\ f \text{ surjective} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} h \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{array}\right.$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ g injective.

$\Leftarrow$/ $\left.\begin{array}{l} h \text{ bijective} \\ g \text{ injective} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h \text{ surjective} \\ g \text{ injective} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ surjective.

$\boxed{\text{Exercice 6 :}}$ $x \longmapsto x^2$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $\qquad$ $u : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$

f surjective $\Leftrightarrow f(E) = F$.

l'image directe de ces 4 applications est $\mathbb{R}_+$. Donc seules : h, u sont surjectives.

si l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$, les applications correspondantes sont paires donc non injectives. Donc seules : g, u sont injectives.

Les injections sont g, u

Les surjections sont h, u

l'unique bijections est u.

WWW.TALIB24.COM

Exercice 7 :

$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto x+y$

on a : $f_1(0,0) = 0 = f_1(1,-1)$

Donc f_1 est non injective.

On a $f_1(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R} = f_1(\mathbb{R} \times \{0\}) \subset f_1(\mathbb{R}^2)$

Donc $f_1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$ c'est à dire f_1 est surjective.

$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$

① f_2 injective ? soient $(x,y), (z,t) \mathbb{R}^2$, alors

$f_2(x,y) = f_2(z,t) \Rightarrow (x+y, x-y) = (z+t, z-t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = z+t \\ x-y = z-t \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$(x,y) = \left(\frac{\begin{vmatrix} z+t & 1 \\ z-t & -1 \end{vmatrix}}{-2}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & z+t \\ 1 & z-t \end{vmatrix}}{-2} \right)$$

$$= (z,t)$$

② f_2 surjective, f_2^{-1} ?

soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, montrons qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$f_2(x,y) = (u,v)$.

$$f_2(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y) = \left(\frac{\begin{vmatrix} u & 1 \\ v & -1 \end{vmatrix}}{-2}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & u \\ 1 & v \end{vmatrix}}{-2} \right) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right)$$

Donc f_2 est surjective. Elle est bijective et on a $f_2^{-1}(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right)$

WWW.TALIB24.COM

$f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x+y, x^2-y^2)$

on a : $f_3(0,0) = 0 = f_3(x,-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

Donc f_3 n'est pas injective.

on a : $(0,1) \notin f_3(\mathbb{R}^2)$. En effet, s'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(0,1) = (x+y, x^2-y^2)$$

on aurait $y = -x$ c'est à dire : $(0,1) = (0,0)$ absurde.

Donc $(0,1) \notin f_3(\mathbb{R}^2)$. Donc $(0,1)$ n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}^2$ par f

c à d $f_3(\mathbb{R}^2) \neq \mathbb{R}^2$ (f_3 non surjective)

WWW.TALIB24.COM

TD 3 D'ALGEBRE 1 SMA SMI

Exercice 1 Démonstraions par récurrence

1) Montrer que $\sum_{k=1}^{k=n-1} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$ pour tout entier $n \geqslant 2$

2) Montrer que $\sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$ pour tout entier $n \geqslant 1$

3) Montrer que $2^n > n^2$ pour tout entier $n \geqslant 5$

4) $\prod_{k=0}^{k=n-1} (1 + r^{3^k} + r^{2\times 3^k}) = \frac{r^{3^n} - 1}{r - 1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout réel $r \neq 1$

Exercice 2 Calcul de sommes téléscopiques

1) Question de cours : montrer que $\sum_{k=m}^{k=n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_m$

2) Calculer les sommes suivantes :

$\sum_{k=1}^{k=n} \ln(\frac{k+2}{k})$, $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{(k+1)!}$, $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{4k^2 - 1}$

$\sum_{k=1}^{k=n-1} (u_{k+1} - 3u_k + 2u_{k-1})$ avec $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite quelconque

2) On admet que $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

a) Calculer de deux manieres différentes la somme :

$\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 - k^3$ et endéduire $\sum_{k=1}^{k=n} k^2$

b) En utilisant la même méthode calculer : $\sum_{k=1}^{k=n} k^3$

Exercice 3 Calcul de sommes doubles , produit et produits doubles

Calculer les sommes et produits suivants :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 2^{i+j} \qquad \sum_{1\leq i,j\leq n} 2^{i+j} \qquad \sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij \qquad \sum_{1\leq i,j\leq n} ij \qquad \prod_{1\leq k\leq n} k!k^k \qquad \prod_{1\leq i,j\leq n} ij \qquad \prod_{1\leq i\leq j\leq n} ij$$

WWW.TALIB24.COM

Première partie.

Exercice 1 (Démonstrations par récurrence).

1. Pour tout entier $n \geq 2$, on note

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1).$$

La propriété est vrai pour $n = 2$. **H. R.** On suppose $n > 2$ et que la propriété est vrai pour tout entier k : $2 \leq k \leq n-1$. Pour un tel n on a:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \\ &= A_{n-1} + (n-1)n \\ &\overset{HR}{=} \frac{1}{3}(n-1)(n-2)n + (n-1)n \\ &= \frac{1}{3}(n-1)\big((n-2)n + 3n\big) \\ &= \frac{1}{3}(n-1)n(n+1). \end{aligned}$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note

$$B_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

On a: $$B_1 = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^3}{2} = \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k}.$$

H. R. On suppose $n > 1$ et que la propriété est vrai pour tout entier k : $1 \leq k \leq n-1$. Pour un tel n on a:

WWW.TALIB24.COM

$$
\begin{aligned}
B_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= B_{n-1} + \frac{(-1)^{2n}}{2n-1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} \\
&\overset{HR}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-1)+k} + \frac{1}{2n-1} + \frac{-1}{2n} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+(k-1)} + \frac{1}{2n-1} + \frac{-1}{2n} \\
&= \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{n+(k-1)} + \frac{1}{2n-1} + \frac{-1}{2n} \\
&= \frac{1}{n} + \sum_{h=1}^{n-2} \frac{1}{n+h} + \frac{1}{2n-1} + \frac{-1}{2n} \quad \text{(changement d'indice)} \\
&= \sum_{h=1}^{n-2} \frac{1}{n+h} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\
&= \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{n+h}.
\end{aligned}
$$

3. Notons que $2^4 = 16 = 4^2$ (il y a égalité). Pour tout entier $n \geq 5$, on pose $C_n = 2^n$.

$$\text{On a:} \qquad C_5 = 2^5 = 32 > 5^2.$$

La propriété est donc vrai pour $n = 5$. **H. R.** On suppose $n > 5$ et que la propriété est vrai pour tout entier k : $5 \leq k \leq n-1$. Pour un tel n on a:

$$
\begin{aligned}
C_n &= 2^n \\
&= 2 \times 2^{n-1} \\
&\overset{HR}{>} 2 \times (n-1)^2 \left(= n^2 + n(n-4) + 2 \right) \\
&> n^2.
\end{aligned}
$$

WWW.TALIB24.COM

4. Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel $r \neq 1$, on note

$$R_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1 + r^{3^k} + r^{2\times 3^k}).$$

On a:

$$R_1 = 1 + r + r^2 = \frac{r^3 - 1}{r - 1}.$$

La propriété est alors vraie pour $n = 1$. **H. R.** On suppose $n > 1$ et que la propriété est vraie pour tout entier k : $1 \leq k \leq n - 1$. Pour un tel n on a:

$$\begin{aligned}
R_n &= \prod_{k=0}^{n-1}(1 + r^{3^k} + r^{2\times 3^k}) \\
&= R_{n-1} \times (1 + r^{3^{n-1}} + r^{2\times 3^{n-1}}) \\
&\overset{HR}{=} \frac{r^{3^{n-1}} - 1}{r - 1} \times (1 + r^{3^{n-1}} + r^{2\times 3^{n-1}}) \\
&= \frac{r^{3^{n-1}} - 1}{r - 1} \times \frac{r^{3\times 3^{n-1}} - 1}{r^{3^{n-1}} - 1} \\
&= \frac{r^{3^n} - 1}{r - 1}. \square
\end{aligned}$$

WWW.TALB24.COM

Exercice 2 (Calcul de sommes télescopiques). $(u_n)_{n\geq 0}$ désignera une suite de nombres réels.

1. ...

2. (a) On prend $u_n = \ln\big(n(n+1)\big)$, et on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\Big(\frac{k+2}{k}\Big) &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\ln(k+2) - \ln(k)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(\ln(k+1)(k+2) - \ln k(k+1)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) \\
&= u_{n+1} - u_1 \\
&= \ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

(b) On prend $u_n = \frac{-1}{n!}$, et on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(-u_k + u_{k+1}\Big) \\
&= u_{n+1} - u_1 \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

(c) Notons que $\frac{-2}{4k^2-1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}$. On pose alors $u_n = \frac{1}{2n-1}$, et on a:

$$\begin{aligned}
-2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} &= \sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) \\
&= u_{n+1} - u_1 \\
&= \frac{1}{2n+1} - 1 \\
&= \frac{-2n}{2n+1}.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - 3u_k + 2u_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n-1}\Big((u_{k+1} - u_k) + 2(u_{k-1} - u_k)\Big) \\
&= (u_n - u_1) - 2(u_{n-1} - u_0) \\
&= u_n - 2u_{n-1} - u_1 + 2u_0.
\end{aligned}$$

WWW.TALIB24.COM

3. (a) D'une part

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=(n+1)^3-1=n^3+3n^2+3n.$$

D'autre part

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}6\sum_{k=1}^{n}k^2 &= 2n(n^2+3n+3)-3n(n+1)-2n\\ &= n(2n^2+3n+1)\\ &= n(2n+1)(n+1).\end{aligned}$$

(b) D'une part

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)=(n+1)^4-1=n^4+4n^3+6n^2+4n.$$

D'autre part

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)=\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}4\sum_{k=1}^{n}k^3 &= (n^4+4n^3+6n^2+4n)-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n\\ &= n^4+2n^3+n^2\\ &= n^2(n+1)^2.\square\end{aligned}$$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 3 (Calcul de sommes doubles, produit et produits doubles).
Etant donnés une application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et un entier $n \geq 1$, on a:

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{j} f(i,j) \Big).$$

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} f(i,j) \Big).$$

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} f(i,j) = \prod_{j=1}^{n} \Big(\prod_{i=1}^{j} f(i,j) \Big).$$

$$\prod_{1 \leq i,j \leq n} f(i,j) = \prod_{j=1}^{n} \Big(\prod_{i=1}^{n} f(i,j) \Big).$$

Si de plus, il existe des applications $g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f(i,j) = g(i)h(j)$, alors

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n} h(j) \Big(\sum_{i=1}^{j} g(i) \Big).$$

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} f(i,j) = \Big(\sum_{j=1}^{n} h(j) \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} g(i) \Big).$$

$$\begin{aligned}
\prod_{1 \leq i,j \leq n} f(i,j) &= \prod_{j=1}^{n} \Big(\prod_{i=1}^{n} g(i)h(j) \Big) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \Big(\prod_{i=1}^{n} g(i)h(j) \Big) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \Big((g(1)h(j)) \times (g(2)h(j)) \times \ldots \times (g(n)h(j)) \Big) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \Big(h(j)^n \prod_{i=1}^{n} g(i) \Big) \\
&= \Big(\prod_{i=1}^{n} g(i) \Big)^n \Big(\prod_{j=1}^{n} h(j)^n \Big) \\
&= \Big(\prod_{i=1}^{n} g(i) \Big)^n \Big(\prod_{j=1}^{n} h(j) \Big)^n \\
&= \Big((\prod_{i=1}^{n} g(i))(\prod_{j=1}^{n} h(j)) \Big)^n \text{ la puissance } n^e \text{ du produit de } \prod_{i=1}^{n} g(i) \text{ par } \prod_{j=1}^{n} h(j).
\end{aligned}$$

WWW.TALIB24.COM

Calculons maintenant les sommes et produits proposés:

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le j\le n} 2^{i+j} &= \sum_{j=1}^{n} 2^j\Big(\sum_{i=1}^{j} 2^i\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j\Big(2\times(2^j-1)\Big)\\
&= 2\sum_{j=1}^{n}(2^{2j}-2^j)\\
&= 2(\sum_{j=1}^{n}4^j-\sum_{j=1}^{n}2^j)\\
&= 2\Big(4\times\frac{4^n-1}{3}-2\times(2^n-1)\Big)\\
&= \frac{8}{3}\times 4^n-4\times 2^n+\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i,j\le n} 2^{i+j} &= \Big(\sum_{j=1}^{n}2^j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}2^i\Big)\\
&= 4(2^n-1)^2.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le j\le n} ij &= \sum_{j=1}^{n} j\Big(\sum_{i=1}^{j} i\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{n} j\times\frac{j(j+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{n}j^3+\sum_{j=1}^{n}j^2\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Big) \quad \text{(vu au deuxième exercice)}\\
&= \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1).
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i,j\le n} ij &= \Big(\sum_{j=1}^{n}j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}i\Big)\\
&= \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2.
\end{aligned}$$

WWW.TALIB24.COM

5. On calcule d'abord sans connaître préalablement le résultat:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} k!k^k &= (2!2^2) \times (3!3^3) \times (4!4^4) \times \ldots \times (n!n^n) \\
&= \overbrace{(2 \times 2^2) \times \underbrace{(2 \times 3 \times 3^3) \times (2 \times 3 \times 4 \times 4^4) \times \ldots \times (2 \times \ldots n \times n^n)}_{n-2 \text{ termes}}}^{n-1 \text{ termes}} \\
&= 2^{(n-1)+2} \times \overbrace{(3 \times 3^3) \times \underbrace{(3 \times 4 \times 4^4) \times \ldots \times (3 \times \ldots n \times n^n)}_{n-3 \text{ termes}}}^{n-2 \text{ termes}} \quad \text{(regroupement des 2)} \\
&= 2^{(n-1)+2} \times 3^{(n-2)+3} \times \overbrace{(4 \times 4^4) \times \underbrace{(4 \times 5 \times 5^5) \times \ldots \times (4 \times \ldots n \times n^n)}_{n-4 \text{ termes}}}^{n-3 \text{ termes}} \quad \text{(des 3)} \\
&= 2^{(n-1)+2} \times 3^{(n-2)+3} \times 4^{(n-3)+4} \times 5^{(n-4)+5} \times \ldots \times n^{1+n} \quad \text{(jusqu'à n)} \\
&= (n!)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ceci ouvre la voie pour une deuxième méthode par récurrence.

6.

$$\begin{aligned}
\prod_{1 \leq i,j \leq n} ij &= \Big((\prod_{i=1}^{n} i)(\prod_{j=1}^{n} j) \Big)^n \\
&= (n!)^{2n}.
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} ij &= \prod_{j=1}^{n} \Big(\prod_{i=1}^{j} ij \Big) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \Big(j^j \prod_{i=1}^{j} i \Big) \\
&= \prod_{j=1}^{n} j! j^j \\
&\overset{5}{=} (n!)^{(n+1)}. \square
\end{aligned}$$

WWW.TALIB24.COM

TD 4 D'ALGEBRE 1 SMA SMI

Exercice 1 Trouver le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13

Exercice 2 Sachant que l'on a : $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer le reste de la division euclidienne de 96842 par chacun des nombres 256 et 375

Exercice 3 Démontre que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas pair donner le reste de sa division euclidienne par 8 .

Exercice 4 Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24 et $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120 .

Exercice 5 Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par **4** n'est jamais égal à 3 .

Exercice 6 1) Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1 .

2) Montrer de même que tout nombre pair vérifie : $n^2 \equiv 0\,[8]$ ou $n^2 \equiv 4\,[8]$

3) Soit a , b et c trois entiers impairs .Déterminer le reste de la division euclidienne par 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et celui de $2(ab + ac + bc)$

4) En déduire que ces deux nombres ne sont pas des carrés puis que $ab + ac + bc$ non plus .

Exercice 7 Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $7/3^{2n+1} + 2^{n+2}$ $11/3^{2n+1} + 2^{6n+3}$ et $6/5n^3 + n$

Exercice 8 Calculer par l'algorithme d'Euclide le PGCD de 18480 et 9828 .En déduire une ecriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828 .

Exercice 9 Soit a = 1 111 111 111 et b = 123 456 789

a) Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b .

b) Calculer p = pgcd(a,b) .

WWW.TALIB24.COM

c) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

Exercice 10 a) Déterminer tous les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360 .

b) Déterminer tous les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de produit 6480 .

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $1665x + 1035y = 45$.

Exercice 12 Démontrer que si a et b sont deux entiers premiers entre eux alors il en est de même des entiers a+b et ab

Exercice 13 Combien 15! admet-il de diviseurs ?

Exercice 14 On considére le nombre $m=2^n p$, avec n un entier naturel et p un nombre premier.

Déterminer la somme des diviseurs de m.

On appelle nombre parfait tout entier naturel m dont la somme des diviseurs est égal à 2m

montrer que si $m = 2^n(2^{n+1} - 1)$ et $2^{n+1} - 1$ est premier alors m est parfait

En déduire 4 nombres parfaits

Exercice 15 Soit a et b sont deux entiers naturels non nuls . Montrer :

a) $2^a - 1$ divise $2^{ab} - 1$

b) $(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = (2^{a \wedge b} - 1)$

c) $(2^a - 1)$ premier $\Rightarrow$ a premier .

WWW.TALIB24.COM

$\Rightarrow x_0 = a \in X$ ($\leq$ est anti-symétrique)

absurde.

c.h.a.b

Série d'Algèbre N° 4

Rappels :

1) Il existe $d \in \mathbb{N}^*$ unique tel que :

i) $d / a, b$

ii) $d' / a, b \Rightarrow d' / d$ $\quad d' < d$

d est appelé PGCD de a et b, noté $a \wedge b$

2) Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ unique tel que

i) $a, b / m$

ii) $a, b / m' \Rightarrow m / m'$

m est dit PPCM de a et b, noté $a \vee b$

Remarques :

1) $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$

2) Si a et b sont premiers entre eux, c à d : $a \wedge b = 1$

$\Rightarrow a \wedge b / c \Rightarrow ab / c$

Exercice 1

Reste de DE de 100^{1000} par 13

$100 \equiv 9 \ [13]$ car $10 \equiv -3 \ [13]$

$\Rightarrow 10^2 \equiv (-3)^2 \ [13]$

$100 \equiv 3^2 \ [13]$

$100^k \equiv 3^{2k} \ [13] \qquad k \geq 1$

on a $3^3 \equiv 1 \ [13]$

donc $3^6 \equiv 1 \ [13]$

Ainsi $100^3 \equiv 3^6 \ [13]$

$100^3 \equiv 1 \ [13]$

WWW.TALIB24.COM

et on a $1000 = 3 \times 333 + 1$

$100^{3\times 333} \equiv 1 \ [13]$

$100 \equiv 9 \ [13]$

$100^{1000} \equiv 9 \ [13]$

9 est le reste de D.E de 100^{1000} par 13.

2ème Méthode :

$100 \equiv 9 \ [13]$

$9 \equiv -4 \ [13]$

$\Rightarrow 100 \equiv -4 \ [13]$

$\Rightarrow 100^k \equiv (-4)^k \ [13], \quad k \geq 1$

$(-4)^3 \equiv 1 \ [13]$

$100^3 \equiv (-4) \ [13] \Rightarrow 100^3 \equiv 1 \ [13]$

Exercice 2 :

$a = 96842 = 256 \times 375 + 842$ ce n'est pas la D.E de a par 256 (ou par 375)

$842 = 3 \times 256 + 74$

$= 2 \times 375 + 92$

$a = 256 \times 375 + 3 \times 256 + 74$

$= 256 \times 378 + 74$ D.E de a par 256

" " 375

$a = 256 \times 375 + 3 \times 256 - 74$

$= 256 [378] + 74$

Exercice 3 :

$7 \equiv -1 \ [8] \Rightarrow 7^n \equiv (-1)^n \ [8]$

$\Rightarrow 7^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \ [8]$

si n est impair alors $7^n + 1 \equiv 0 \ [8]$

c à d $8 / 7^n + 1$

si n est pair alors $7^n + 1 \equiv 2 \ [8]$

Exercice 4 :

$24 \neq 8 \times 3 / N \Leftrightarrow 8$ et $3 / N$

WWW.TALIB24.COM

$8 \wedge 3 = 1 \Rightarrow 8 \vee 3 = 24$ $\qquad 24 / N = n(n+1)(n+2)(n+3)$

il est clair que $3 / N$ $\qquad 120 / M = n(n+1)(n+2)(n+5)(n+4)$

Dans la suite $n, n+1, n+2, n+3$ il y en a deux (exactement) nombres pairs consécutifs. L'un d'eux est un multiple de 4. Leur produit est un multiple de 8. Donc $8 / N$ #

$\boxed{24 \times 5} = 120 / M \iff 24 / M$ et $5 / M$

ceci est évident

Exercice 5 : le produit des 4 nombres consécutifs $n(n+1)(n+2)(n+3)(n-4)$

$n = a^2 + b^2$ $\quad a, b \in \mathbb{N}$

si a est pair $a^2 \equiv 0 [4]$

si a est impair $a^2 \equiv 1 [8] \Rightarrow a^2 \equiv 1 [4]$

on distingue les 3 cas suivants :

1) si a et b sont pairs alors $n \equiv 0 [4]$

2) si " " " impairs alors $n \equiv 2 [4]$

3) a et b sont de parité différente, alors $n \equiv 1 [4]$

$\boxed{\text{Exercice 6 :}}$ $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

1)

2) soit $n = 2h$ un nombre pair, on a :

$$n^2 = 4h^2$$

(i) si h est pair alors h^2 est pairs et on a $n^2 \equiv 0 [8]$

(ii) si h est impair, alors : $h^2 \equiv 1 [8]$

$$\Rightarrow 4h^2 \equiv 4 [32]$$

$$\Rightarrow n^2 = 4n^2 \equiv 4 [8]$$

3) $n = a^2 + b^2 + c^2$ $\quad a, b, c$ impair

$m = 2(ab + ac + bc)$

On a : $a^2 \equiv 1 [8] \rightarrow n \equiv 3 [8]$ $\Big\}$ $m = (a+b+c)^2 - n \equiv -2 [8]$

$(\overbrace{a+b+c}^{\text{impaire}})^2 \equiv 1 [8]$ $\qquad \Rightarrow m \equiv 6 [8]$

WWW.TALIB24.COM

4) m, n ne sont pas des carrés ?

n, ab + ac + bc sont impairs m est pair.

* Si n est un carré, nécessairement d'un nombre impair, alors :

$n \equiv 1 \ [8]$ (d'après 1) ceci est absurde.

* Si m est un carré, nécessairement d'un nombre pair, alors

$n \equiv 0$ ou $4 \ [8]$ (d'après 2)

Ceci est absurde.

* si ab + ac + bc est un carré, nécessairement d'un nombre impaire, alors : $ab + ac + bc \equiv 1 \ [8]$

$\Rightarrow m \equiv 2 \ [16] \Rightarrow m \equiv 2 \ [8]$ absurde.

Exercice 7 :

• $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

on a $3^2 \equiv 2 \ [7]$

$\Rightarrow 3^{2n} \equiv 2^n \ [7]$

$\Rightarrow 3^{2n+1} \equiv 3 \times 2^n \ [7]$

$\Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 3 \times 2^n + 2^{n+2} \ [7]$

$\Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 7 \times 2^n \ [7]$

$\Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0 \ [7]$

• $11 \mid 3^{2n+1} + 2^{6n+3}$

$2^3 \equiv -3 \ [11]$

$\Rightarrow 2^6 \equiv (-3)^2 \ [11]$

$\Rightarrow 2^{6n} \equiv 3^{2n} \ [11]$

$\Rightarrow 2^{6n+3} \equiv 8 \times 3^{2n} \ [11]$

$\Rightarrow 2^{6n+3} + 3^{2n+1} \equiv 8 \times 3^{2n} + 3^{2n+1} \ [11]$

$3^{2n}[8+3] = 11 \times 3^{2n} \equiv 0 \ [11]$

$\equiv 0 \ [11]$

$6^n \equiv 3^{2n} \ [11]$

$2^3 = 8 \equiv -3 \ [11]$

$2^{6n+3} \equiv -2^{2n+1} \ [11]$

$3^{2n} \equiv 2^n \ [7]$

$3^{2n+1} \equiv 3 \times 2^n \ [7]$

$3 \equiv 4 \ [7]$

$3^2 \equiv 2 \ [7]$

$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 3 \times 2^n + 2^{n+2}$

$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 7 \times 2^n \ [7]$

$\Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0 \ [7]$

$2^n(3 + 2^2)$

WWW.TANLIB24.COM

Exercice 8 :

$a = 18480 = r_0$

$b = 9828 = r_1$

$r_0 = 18480 = 9828 + 8652$

$= q_1 r_1 + r_2$ où $(q_1, r_2) = (1, 8652)$

$r_1 = 9828 = 8652 + 1176$

$= q_2 r_2 + r_3$ où $(q_2, r_3) = (1, 1176)$

$r_2 = 8652 = 7 \times 1176 + 420 = q$

$= q_3 r_3 + r_4$ où $(q_3, r_4) = (7, 420)$

$r_3 = 1176 = 2 \times 420 + 336$

$= q_4 r_4 + r_5$ où $(q_4, r_5) = (2, 336)$

$r_4 = 420 = 1 \times 336 + 84$

$= q_5 r_5 + r_6$ où $(q_5, r_6) = (1, 84)$

$r_5 = 336 = 4 \times 84 + 0 = q_6 r_6 + r_7$ où $(q_6, r_7) = (4, 0)$

$r_0 = r_1 q_1 + r_2$

$r_1 = q_2 r_2 + r_3$

$r_2 = q_3 r_3 + r_4$

$r_3 = q_4 r_4 + r_5$

$84 = r_6$

$= r_4 - q_5 r_5$

$= \cancel{r_4 - q_5 (r_3 - q_4 r_4)}$

$= \cancel{(1 + q_4 q_5) r_4 - q_5 r_3}$

$= \cancel{3 r_4 - r_5}$

$= r_4 - r_5$

$= r_4 - (r_3 - q_4 r_4)$

$= (1 + q_4) r_4 - r_3$

$= 3 r_4 - r_3$

$= 3 (r_2 - q_3 r_3) - r_3$

$= 3 r_2 - (1 + 3 q_3) r_3$

$= 3 r_2 - 22 r_3$

$= 3 r_2 - 22 (r_1 - q_2 r_2)$

$= (3 + 22 q_2) r_2 - 22 r_1$

WWW.TALIB24.COM

$84 = 25 r_2 - 22 r_1$

$= 25 (r_0 - q_1 r_1) - 22 r_1$

$= 25 r_0 - (22 + 25 q_1) r_1$

$84 = 25 a - 475$

Exercice 9 :

a) $r_0 = a = 1\,111\,111\,111$

$= 96 + 10 \leftarrow r_2$

$a = bq + 10 \qquad (q, r) = (9, 10)$

b) Calculer $b = pgcd(a, b)$

$r_1 = b = 123456789 \qquad a \wedge b = b \wedge 10$

$= 10 \times 12345678 + 9 \qquad = 9 \wedge 10$

$= 10 q_2 + r_3 \qquad = 1$

$(1 = 10 - 9)$

$10 = 1 \times 9 + 1 = 1 \times r_3 + r_4$

$1 = r_4 = r_2 - r_3$

$= r_2 - (r_1 - q_2 r_2) = (1 + q_2) r_2 - r_1$

$= (1 + q_2)(a - 9b) - b$

$= (1 + q_2) a - (1 + 9(1 + q_2)) b$

$= 12345679 \times a - 111\,111\,111 \times b$

Exercice 10 : $(x, y) \in \mathbb{N}^2$

a) $\begin{cases} x \wedge y = 18 \\ x + y = 360 = 18 \times 20 \end{cases}$

On a $x = 18x'$

$y = 18y'$ $\qquad 18 = x \wedge y \Rightarrow x' \wedge y' = 1$

$\begin{cases} x' \wedge y' = 1 \\ x' + y' = 20 \end{cases} \qquad x' \leq y'$

x'	1	3	7	9
y'	19	17	13	11

$\Rightarrow S = \{(18, 342), (54, 306), (126, 234), (162, 198)\}$

WWW.TNLIB24.COM

b)

Exercice 11°

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $1665x + 1035y = 45$: (E)

$1665 = 45 \times 37$

$1035 = 45 \times 23$

$1665 \wedge 1035 = 45(\underbrace{37 \wedge 23}_{1}) = 45$

$(E) \iff 37x + 23y = 1$

$r_0 = 1665 = \overbrace{1035}^{r_1} + 630 = q_1 r_1 + r_2$ où $(q_1, r_2) = (1, 630)$

$r_1 = 1035 = 630 + 405 = q_2 r_2 + r_3$ où $(q_2, r_3) = (1, 405)$

$r_2 = 630 = 405 + 225 = q_3 r_3 + r_4$ où $(q_3, r_4) = (1, 225)$

$r_3 = 405 = 225 + 180 = q_4 r_4 + r_5$ où $(q_4, r_5) = (1, 180)$

$r_4 = 225 = 180 + 45 = q_5 r_5 + r_6$ où $(q_5, r_6) = (1, 45)$

$r_5 = 180 = 4 \times 45 + 0$

$r_0 = 37 = \underbrace{23}_{r_1} + 14 = q_1 r_1 + r_2$

$r_1 = 23 = 14 + 9 = q_2 r_2 + r_3$

$r_2 = 14 = 9 + 5 = q_3 r_3 + r_4$

$r_3 = 9 = 5 + 4 = q_4 r_4 + r_5$

$r_4 = 5 = 4 + 1 = q_5 r_5 + r_6$

$1 = r_6 = r_4 - r_5$

$= r_4 - (r_3 - r_4)$

$= 2r_4 - r_3$

$= 2(r_2 - r_3) - r_3$

$= 2r_2 - 3r_3$

$= 2r_2 - 3(r_1 - r_2)$

$= 5r_2 - 3r_1$

$= 5(r_0 - r_1) - 3r_1 = 5r_0 - 8r_1 = 5 \times 37 - 8 \times 23$

WWW.TALIB24.COM

$(E) \Longleftrightarrow 37x + 23y = 1$

S.P $\quad 37 \times 5 + (-8) \times 23 = 1$

$37(x-5) + (x+8)23 = 1$

$37(x-5) = -23(x+8)$

$S = \{(5-23k, -8+37k) ; k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 13 :

$15! = 2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)\times11\times(2\times7)\times(3\times5)$

$= 2^{11}\times3^6\times5^3\times7^2\times11\times13$

Les diviseurs de $15!$ s'écrivent : $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta 11^\varepsilon 13^\varphi$

où $\quad 0 \leq \alpha \leq 11$

$0 \leq \beta \leq 6$

$0 \leq \gamma \leq 3$ $\quad$ le nombre des diviseurs de $15!$

$0 \leq \delta \leq 2$ $\quad$ est $(11+1)\times(6+1)\times\ldots(1+1) = \ldots$

$0 \leq \varepsilon \leq 1$

$0 \leq \varphi \leq 1$

Exercice 14 :

$m = 2^n p$

a) soit $D(m)$ l'ensemble des diviseurs de m et $S(m)$ leur somme)

$D(m) = \{1, 2, \ldots 2^n, p, 2p, \ldots, 2^n p\}$

$S(m) = \{1+2+\ldots+2^n + p(1+2+\ldots+2^n)\}$

$= (p+1)(2^{n+1}-1)$

Si $m = 2^n(2^{n+1}-1)$ où $2^{n+1}-1$ premier alors m est parfait.

Remarque : les seuls diviseurs de $2^{n+1}-1$ sont $1, 2^{n+1}-1$

On pose $2^{n+1}-1 = p$ premier par hypothèse.

et on a : $m = 2^n p$

$S(m) = (p+1)(2^{n+1}-1)$

$= 2^{n+1}(2^{n+1}-1) = 2\times\underbrace{2^n(2^{n+1}-1)}_{m} = 2m$

m est parfait.

WWW.TALIB24.COM

$m = 2^n (2^{n+1} - 1)$

$n = 1 \Rightarrow 2^{n+1} - 1 = 3$ premier $\Rightarrow 2 \times 3 = 6$ est parfait

$n = 2 \Rightarrow 2^{n+1} - 1 = 7 \Rightarrow 28$ ——

$n = 3 \Rightarrow 2^{n+1} - 1 = 15$ NON Premier.

$n = 4 \Rightarrow 2^{n+1} - 1 = 31$ premier 16×31 parfait.

$n = 5 \Rightarrow 2^6 - 1 = 63$

Exercice 15 :

a) $2^a - 1 \equiv 0 [2^a - 1] \Rightarrow 2^{ab} \equiv 1 [2^a - 1]$

$\Rightarrow 2^a - 1 \,/\, 2^{ab} - 1$ #

b) $a \geq b$ $\quad a = bq + r ; q \geq 1 ; a < r < b$

D'après (a) il existe $k \in \mathbb{N}^*$: $2^{bq} - 1 = k(2^b - 1)$

D'autre part $2^a - 1 = 2^{bq} 2^r - 1 = 2^r (2^{bq} - 1) + 2^r - 1 =$

$= 2^r k \times (2^k - 1) + (2^r - 1)$ c'est la D.E de $2^a - 1$ par $2^b - 1$

$\Rightarrow (2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = (2^b - 1) \wedge (2^r - 1)$

$= (2^{r_{(n_0-2)}} - 1) \wedge (2^{r_{(n_0-1)}} - 1)$

$= 2^{r_{(n_0-1)}} - 1$

$= 2^{a \wedge b} - 1$

$\underset{r_0}{a} = bq + \underset{r_1}{r}$ $\quad r_{n_0} = 0 ; \; r_{n_0-1} \neq 0 \Rightarrow$ (pgcd) $\quad (r_i) \downarrow$

$r_{n_0-2} = q_{n_0-1} r_{n_0-1} + r_{n_0}$

c) Définition :

soit $n \geq 2$. Un diviseur d de n est dit propre si :

$1 < d < n$

Ainsi n est premier $\Leftrightarrow$ n n'a pas de diviseurs propres.

n non premier $\Rightarrow$ n admet un diviseur propre d

$\Rightarrow 2^n - 1$ " " " " $2^d - 1$ #

WWW.TALIB24.COM

Série d'Algèbre N° 5

-SMI-Semestre 1

Exercice 1

1. Montrer que $\mathbb{R} - \{1\}$ muni de la loi $*$ définie par $x * y = (x-1)(y-1) + 1$. est un groupe abélien.
2. Montrer que $]-1, 1[$ muni de la loi $*$ définie par $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, est un groupe abélien.
3. Soit E un ensemble, montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien.
4. Montrer que $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$ est un groupe abélien.

Exercice 2

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par : $x * y = x + y - xy$.

1. $*$ est elle une loi de groupe?
2. Calculer $x * x * \cdots x$ (n facteurs), en fonction de x et n.

Exercice 3

Décrire tous les groupes à 1, 2, 3 ou 4 éléments.

Exercice 4

Montrer que les racines $n^{ièmes}$ de l'unité forment un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 5

1. Montrer que $x \longrightarrow \dfrac{x}{|x|}$ est un endomorphisme de groupes de $\mathbb{R}^*$. Déterminer son noyau et son image.
2. Montrer que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^*$ qui à θ fait correspondre $e^{i\theta}$ est un homomorphisme de groupes.

Exercice 6

Soit G un groupe et $a \in G$. Montrer que l'application $x \longrightarrow axa^{-1}$ est un automorphisme de groupes de G.

Exercice 7

Soit $(G, *)$ un groupe

1. Soient H_1et H_2 deux sous groupes de G. Montrer que $H_1 \cap H_2$ est un sous groupe de G.

WWW.TALIB24.COM

2. On note $G_c = \{x \in G / \forall y \in G : x * y = y * x\}$. Montrer que G_c est un sous groupe de G (G_c est appelé centralisateur de G).

Exercice 8

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Soit $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif. Quels sont ses éléments inversibles? Existe-t-il des diviseurs de 0.
2. $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \circ)$ est il un anneau?

Exercice 9

1. Montrer que l'ensemble des suites réelles, muni de la somme et du produit terme par terme, est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles?
2. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous groupes ou des sous anneaux?
   (a) suites bornées.
   (b) suites monotones.
   (c) suites convergentes.

Exercice 10

Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{2}\right] = \left\{a + ib\sqrt{2} / (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ est un sous anneau de $\mathbb{C}$.

Exercice 11

Soit E un ensemble,

1. montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau. En préciser les éléments neutres et les éléments inversibles et leurs inverses.
2. L'anneau $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est il intègre?
3. Si $F \subset E$, est ce que $(\mathcal{P}(F), \Delta, \cap)$ est un sous anneau de $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$.

Exercice 12

On définit sur $\mathbb{R}$ deux lois $\top$ et $\perp$ par

$$\begin{aligned} x \top y &= x + y - 1 \\ x \perp y &= x + y - xy. \end{aligned}$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \top, \perp)$ est un corps commutatif.

Exercice 13

1. Soient $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$, tel que $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{Q}$, et
   $$\mathbb{Q}\left(\sqrt{\alpha}\right) = \left\{r + r'\sqrt{\alpha} : (r, r') \in \mathbb{Q}^2\right\}.$$
   Montrer que $(\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}), +, \times)$ est un corps.
2. Montrer que $\mathbb{Q}(i) = \{p + qi : (p, q) \in \mathbb{Q}^2\}$ est sous corps de $\mathbb{C}$.

WWW.TALIB24.COM

Série d'Algèbre N° 5

Exercice 1 :

① $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$x * y = (x-1)(y-1) + 1$$

1- Mq $*$ est une LCI sur $\mathbb{R} - \{1\}$

En effet, soient $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$, alors :

i) $x * y \in \mathbb{R}$

ii) $x * y \neq 1$ car sinon $(x-1)(y-1) = 0$ ce qui est absurde.

Remarque : $*$ est une LCI commutative.

2- Mq $*$ est associative. En effet, soient $x, y, z \in \mathbb{R} - \{1\}$

on a $(x * y) * z = ((x * y) - 1)(z - 1) + 1$

$= ((x-1)(y-1))(z-1) + 1$ (quantité invariante par permutation circulaire)

$= (y * z) * x = x * (y * z)$ ($*$ commutative)

3- Existence d'un élément neutre :

Montrons qu'il existe $e \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$e * x = x * e = x \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$e * x = x * e = x \quad \forall x \neq 1 \iff e * x = x \quad \forall x \neq 1$ ($*$ commt)

$\iff (e-1)(x-1) + 1 = x \quad \forall x \neq 1$

$\iff (e-1)(x-1) = x - 1$

$\iff e - 1 = 1$

$\iff e = 2 \in \mathbb{R} - \{1\}$

4- Tout élément admet un symétrique dans $\mathbb{R} - \{1\}$

soit $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, existe-t-il $x' \in \mathbb{R} - \{1\}$: $x * x' = e$

$x * x' = e \iff (x-1)(x'-1) + 1 = e$

$\iff (x-1)(x'-1) + 1 = 2$

$\iff (x-1)(x'-1) = 1$

$\iff x' = \dfrac{x}{x-1} \in \mathbb{R} - \{1\}$

WWW.TAHBA.COM

(2) $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

i) $*$ et une LCI ? En effet, soient $x, y \in]-1,1[$

alors $0 < \underbrace{(x-1)}_{<0}\underbrace{(y-1)}_{<0} = xy + 1 - x - y$

$\Rightarrow x + y < xy + 1$

$\Rightarrow x * y = \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$

De même $0 < \underbrace{(x+y)}_{>0}\underbrace{(y+1)}_{>0} = 1 + xy + x + y$

$\Rightarrow -1 - xy < x + y$

$\Rightarrow -1 < x * y$

Donc $x * y \in]-1, 1[$ ($*$ est une LCI comm+)

ii) Montrons que $*$ est associative ?

Soit $x, y, z \in]-1, 1[$, on a :

$$(x * y) * z = \frac{(x*y)+z}{1+(x*y)z} = \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)z}$$

$$= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

$$= (y*z)*x = x*(y*z)$$

iii) Montrons que $*$ admet un élément neutre ?

$e \in]-1, 1[$

$e * x = x, \forall x \in]-1,1[\iff \dfrac{e+x}{1+ex} = x$

$\iff e + x = x(1+ex)$

$\iff e\underbrace{(1-x^2)}_{>0} = 0$

$\iff e = 0 \in]-1, 1[$

iv) Tout élément est symétrisable ?

Soit $x \in]-1,1[$, on cherche $x' \in]-1, 1[$

$x * x' = e$, En effet ;

$x * x' = 0 \iff x + x' = 0$

$\iff x' = -x \in]-1, 1[$

Conclusion : $(]-1,1[, *)$ est un groupe abélien

WWW.TAHIB24.COM

③ $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien (Série n° 3, ex 3)

$A, B \in \mathcal{P}(E)$

* $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B) \in \mathcal{P}(E)$ LCI
* Associative : Moyennant les indicatrices : $\chi_{(A \Delta B) \Delta C} = \chi_{A \Delta (B \Delta C)}$
* $\emptyset$ est élément neutre.
* Le symétrique de $A \in \mathcal{P}(E)$ est $A^{-1} = A$.

Rappel : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$a \mathcal{R} b \iff a \equiv b\ [n]$

$\mathcal{R}$ est une R.E, la classe d'un élément $a \in \mathbb{Z}$ est :

$\bar{a} = \{ \ldots, a-n, a, n+a, a+2n, \ldots \}$

L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\overline{a+n} = \bar{a}$

$\bar{0} = \bar{n} = \overline{2n}$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$: $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ LCI

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$: $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{ab}$ LCI

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ groupe abélien d'en $\bar{0}$ est le symétrique de $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $\overline{n-k}$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$ monoïde unitaire, ($\times$ LCI associative)

Cependant $\bar{0}$ n'a pas de symétrique.

Tout élément $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - \{\bar{0}\}$ est inversible.

$0 \leq k \leq n-1$; $\bar{k} \neq \bar{0}$ $k \not\equiv 0\ [n]$

* si n est premier, alors tout élément $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - \{0\}$ est inversible

En général $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$ n'est un groupe, $\times$ n'est pas une LCI sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$; $n \neq 4$

$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} + \vec{k} \times \vec{v} = \bar{1}$

$\Rightarrow \vec{k} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{k} = 1$

$\Rightarrow \vec{k}$ est inversible.

WWW.TMLB24.COM

soit $\bar{k}, \bar{m} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \overset{?}{\Rightarrow} \bar{k} \dot{\times} \bar{m} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$\bar{k}, \bar{m} \neq \bar{0} \Rightarrow n \nmid k.m \Rightarrow n \nmid km$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{\times})$ L CI

Rq : soient $a, b, p \in \mathbb{N}^*$ avec p premier

si $p / ab \Rightarrow p/a$ ou p/b

Exercice 2 :

» $x * y = x + y - xy$

1) il est évident que $*$ est une loi de composition interne (commutative)

2) $*$ est associative.

3) Élément neutre ?

$e * x = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 0$

4) Élément inversible :

$x \in \mathbb{R} \qquad x * x' = 0 \Leftrightarrow x'(1-x) = -x$

si $x \neq 1 \qquad x' = \dfrac{x}{x-1}$

$(\mathbb{R}, *)$ n'est pas un groupe, mais c'est un monoïde unitaire

Proposition :

soit $(G, *)$ un monoïde unitaire.

alors l'ensemble I des élément inversible de G constituant un groupe, la loi induite

$I \times I \longrightarrow I$

soit $x, y \in I \Rightarrow x * y \in I$

$\mathbb{R} - \{1\} = \{x \in \mathbb{R} \quad x \text{ inversible pour } *\}$

$(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ est un groupe.

» on pose $A_n = 1 - (1-x)^n \qquad n \geq 2$

$A_{n+1} = x + A_n - x A_n$

$= x + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k x^k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k x^{k+1}$

$= x + nx + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k x^k - (-1)^{n+1} x^{n+1} +$

$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+2} C_n^k x^{k+1}$

$$= \sum_{k'=2}^{n} (-1)^{k'+1} C_n^{k'-1} x^{k'}$$

$$= (n+1)x + (-1)^{n+2} x^{n+1} + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\left((-1)^{k+1} + C_n^{k-1}\right)}_{C_{n+1}^{k}} x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} C_{n+1}^{k} x^k$$

Exercice 3 :

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \dot{+})$ groupe abélien.

$(\bar{a}, \bar{b}) \dot{+} (\bar{c}, \bar{d}) = (\overline{a+c}, \overline{b+d})$

Le symétrique de $(\bar{a}, \bar{b})$ est $(\bar{a}, \bar{b})$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$
$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$
$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$
$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$
$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0})$

$\Rightarrow G = \{e, a\}$

G	e	a
a	e	a
e	a	e

Carré Latin.

ensemble à celle de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\Rightarrow G = \{e, a, b\}$

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

ensemble à la table de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$\Rightarrow G = \{e, a, b, c\}$

G	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	$\boxed{b}$	c	e
b	b		a	

Fig.1

WWW.TALEB24.COM

Montrons qu'il existe $x \in G - \{e\}$ tq : $x^2 = e$

Supposons que $x^2 \neq e$ pour $x \in \{a, b, c\}$

* $e \neq a^2 \neq a$, par exemple $a^2 = b$

par hypothèse $\Rightarrow ac \neq a, b, c \rightarrow$ C.L

* $e \neq b^2 \neq b, c$ donc $b^2 = a$

hypothèse $bc \neq b, c, a, e$ ce qui est absurde.

G	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Fig. 2

Fig. 3

on distingue les deux cas suivants :

① $b^2 = c^2 = e$

G isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

② $b^2 \neq e$

	a	e
	e	a

Fig. 4

G	e	a	b	c
e	e	b	a	c
a	b	a	c	e
b	a	c	e	b
c	c	e	b	a

Fig. 4'

G est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$f : G \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$e \longrightarrow \bar{0}$

$a \longrightarrow \bar{1}$

$b \longrightarrow \bar{2}$

$c \longrightarrow \bar{3}$

f est un isomorphisme.

WWW.TALIB24.COM

$|G| = n$ (G est un groupe d'ordre n, on le note $|G|$)

① si n est premier, G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

② si $n = 4$; G isomorphe à $\begin{cases} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{cases}$

③ si $n = 6$; G isomorphe à $\begin{cases} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ S_3 \text{, non abélien} \end{cases}$

④ si $n = 8$; G isomorphe à $\begin{cases} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ Q_4 : \text{groupe des quaternoms} \\ D_4 : \text{groupe diédral} \end{cases}$

$D_4 = \{e, r, r^2, r^3, s, sr, r^2s, r^3s\}$

$ros \neq sor$ / r : rotation
s : symétrique.

Exercice 4 :

$\Gamma_n = \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\}$

$z \in \Gamma_n \Rightarrow |z| = 1$

$\Rightarrow z = \cos\theta + i\sin\theta$

$\Rightarrow z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

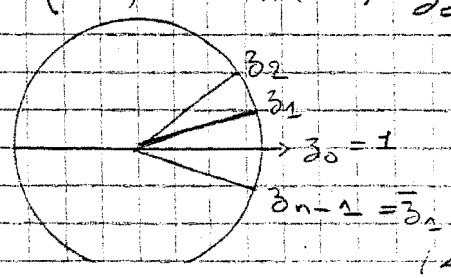
$\Rightarrow \begin{cases} \cos(n\theta) = 1 \\ \sin(n\theta) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n\theta = 2k\pi$

$\Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n}$

$\Gamma_n = \{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = z_k \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$

$\{z_k = 0 \leq k \leq n-1\}$; $z_n = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = z_0$



$\Gamma_3 = \{1, j, j^2\}$

$1 + j + j^2 = 0$; $j^2 = \bar{j}$

$\Gamma_4 = \{1, -1, i, -i\}$

WWW.TALEB.COM

$\boxed{\text{Exercice 9}}$: $E = \{(U_n)_{n\geq 0} : U_n \in \mathbb{R}, \forall n > 0\}$

1) $(U_n)_n + (V_n)_n = (W_n)_n$ ou $W_n = U_n + V_n$ $\forall n \geq 0$

$(U_n)_n * (V_n)_n = (W_n)_n$ $W_n = U_n * V_n$ $\forall n \geq 0$

- $(E, +, *)$ anneau ?

* $(A, +, \times)$ un anneau, les élément inversibles de A constituent un groupe multiplicatif noté $(U(A), \times)$ appelé le groupe des unités de A

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ Anneau $\Rightarrow U(\mathbb{Z}) = (\{1, -1\}, \times)$

$U(E) = \{(U_n)_{n\geq 0} \in E : U_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$

$V_n = \frac{1}{U_n}$

$(V_n)_n * (U_n)_n = (U_n)_n * (V_n)_n$

= suite d'élement neutre.

2) (a) $F = \{(U_n)_n \in E : (U_n)_n$ bornée$\}$

soit $(U_n)_n \in E$, alors $(U_n)_n \in F \Leftrightarrow$ il existe $M > 0 : |U_n| \leq M$ $\forall n \geq 0$

$(E, +, *)$:

i) La suite e.n pour $*$ appartient à F.

ii) soient $(U_n), (V_n) \in F$, il existe $M, N > 0 : \left.\begin{array}{l} |U_n| \leq M \\ |V_n| \leq N \end{array}\right\} \forall n \geq 0$

iii) " " " "

* $|U_n + V_n| \leq |U_n| + |V_n| \leq M + N$

Donc $(U_n)_n + (V_n)$ est bornée, c-à-d appartient à F.

* on a $|U_n V_n| = |U_n||V_n| \leq MN$

Donc $(U_n)_n * (V_n) \in F$.

(b) : $G = \{(U_n)_n \in E : (U_n)_n$ monotone$\}$

soient $(U_n)_n$; $(V_n)_n$

avec : $U_n = 2n + (-1)^n$: $(U_n)_n \nearrow$

$V_n = -2n$ $(V_n) \searrow$

$(U_n), (V_n) \in G$.

WWW.TALIB24.COM

$(U_n) + (V_n)_n = (W_n)_n$ où $W_n = (-1)^n$

Donc G n'est pas un s.g de $(E,+)$

(c) $H = \{ (U_n)_n \in E : (U_n)_n$ convergente $\}$

i) La suite e.n $(1, 1, \dots, 1)$ est convergente donc $\in H$

ii) (U_n), (V_n) convergentes $\Rightarrow$ $(U_n)+(V_n)$ et $(U_n)\times(V_n)$ sont convergentes.

Exercice 13 :

1. $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$: $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) = \{ a + b\sqrt{\alpha} : (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \}$ corps?

si $(A,+,\times)$ Anneau (0 e.n pour $+$)

Alors $(A,+,\times)$ est un corps $\Leftrightarrow$ Tout élément $x \in A - \{0\}$ est inversible.

$\Leftrightarrow (U(A),\times) = (A - \{0\},\times)$

- $(\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}),+,\times)$ anneau
- soit $x = a + b\sqrt{\alpha} \in \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) - \{0\}$ (c.à.d $(a,b) \neq (0,0)$ et on a :

$a^2 - b^2\alpha \neq 0$ car $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{Q}$.

on pose $y = \dfrac{a - b\sqrt{\alpha}}{a^2 - b^2\alpha} = \dfrac{a}{a^2-b^2\alpha} + \dfrac{-b}{a^2-b^2\alpha}\sqrt{\alpha} \in \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$

$\in \mathbb{Q} - \{0\} \rightarrow a^2 - b^2\alpha$

et on a : $x \times y = y \times x = 1$

donc x est inversible.

$(\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}),+,\times)$ est un corps commutatif.

2. • $\mathbb{Q}(i) = \{ a + ib : a, b \in \mathbb{Q} \}$

$(\mathbb{Q}(i),+,\times)$ anneau

- $x = a + ib \in \mathbb{Q}(i) - \{0\}$ ($\Leftrightarrow (a,b) \neq (0,0)$)

$y = \dfrac{a - ib}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}(i)$

et on a $x \times y = y \times x = 1$

Donc x est inversible.

$(\mathbb{Q}(i),+,\times)$ est un corps.

WWW.TAHIB24.COM

$(\mathbb{C}, +, \times)$ corps

$\mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{C}$

(i) $1 \in \mathbb{Q}(i)$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}(i)$ sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$

(ii) $x, y \in \mathbb{Q}(i) \Rightarrow x + y,\ x \times y \in \mathbb{Q}(i)$

(iii) $\forall x \in \mathbb{Q}(i) - \{0\},\ x^{-1} \in \mathbb{Q}(i)$.

WWW.TALIB24.COM

TD 6 D'ALGEBRE 1 SMA SMI

Exercice 1

Effectuer les divisions euclidiennes de A par B

a) $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$, $B = X^2 + 2X + 3$ b) $A = X^4 - X^3 + X - 2$, $B = X^2 - 2X + 4$

Exercice 2

Effectuer la division de $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$ suivant les puissances croissantes ,à l'ordre 4

Exercice 3

Déterminer le PGCD des polynômes suivants :

$X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$

Exercice 4

Déterminer le PGCD , D, des polynômes A et B et trouver deux polynômes U et V tels que : $AU + BV = D$

$A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$

Exercice 5

Décomposer danx $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines , le polynôme $P = X^4 + 1$

Exercice 6

Décomposer danx $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$X^3 - 8$, $X^6 + 1$, $X^9 + X^6 + X^3 + 1$

Exercice 7

WWW.TALIB24.COM

Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ a) $P(X^2) = X^2 P(X)$ b) $P = P' P''$

Exercice 8

Soit A et B deux polynômes tels que A divise B .Montrer que si α est une racine de A alors α est une racine de B .

Dans quels cas $X^{2n} + X^n + 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$

Exercice 9

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 2 du polynôme suivant :

$$nX^{n+2} - (4n + 1)X^{n+1} + 4(n + 1)X^n - 4X^{n-1}$$

b) Pour quelles valeurs de a le polynôme : $(X + 1)^7 - X^7 - a$ admet - il une racine multiple réelle ?

Exercice 10

1)Décomposer en élements simples dans $\mathbb{R}(X)$:

a) $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X}$ b) $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{X(X - 1)^4}$

2) Décomposer en élements simples dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$:

a) $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1}$ b) $\dfrac{X^2 - 3}{(X^2 + 1)(X^2 + 4)}$

WWW.TALIB24.COM

Série N° 6 d'Algebre 1

Exercice 1 :

$$
\begin{array}{l|l}
A = 3x^5 + 4x^2 + 1 & X^2 + 2X + 1 = B \\
\hline
-3x^5 - 6x^4 - 3x^3 & Q = 3x^3 - 6x^2 + 9x - 8 \\
-6x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1 & \\
6x^4 + 12x^3 + 6x^2 & \\
9x^3 + 10x + 1 & \\
-9x^3 - 18x^2 - 9x + 1 & \\
-8x^2 - 9x + 1 & \\
8x^2 + 16x + 8 & \\
R = 7x + 9 &
\end{array}
$$

$A = BQ + R$

Exercice 2 :

$$
\begin{array}{l|l}
A = 1 + x^3 - 2x^4 + x^6 & 1 + x^2 + x^3 = B \\
\hline
-1 - x^2 - x^3 & Q = 1 - x^2 - x^4 \\
-x^2 - 2x^4 + x^6 & \\
x^2 + x^4 + x^5 & \\
-2x^4 + x^5 + x^6 & \\
+x^4 + x^6 + x^7 & \deg Q \leq 4
\end{array}
$$

Les monômes de R sont de degré ≥ 5 $\quad (R = x^6 + 2x^6 + x^7$

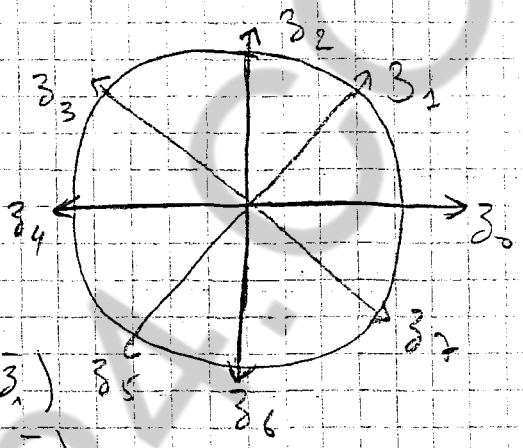
WWW.TAHIB24.COM

Exercice 5 : $X^4+1 \in \mathbb{R}[X]$

$$X^4+1 = (X^2+1)^2 - (\sqrt{2}X)^2$$
$$= (X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)$$

- 2ème Méthode : les racines (complexes) de X^4+1 sont les éléments de $\Gamma_8 - \Gamma_4$

$$(X^4+1)(X^4-1) = X^8-1$$



$$\Gamma_8 - \Gamma_4 = \{z_1, -\bar{z}_1, -z_1, \bar{z}_1\}$$

$$X^4+1 = (X-z_1)(X+\bar{z}_1)(X+z_1)(X-\bar{z}_1)$$
$$= (X-z_1)(X-\bar{z}_1)(X+z_1)(X+\bar{z}_1)$$
$$= (X^2-(z_1+\bar{z}_1))(X+z_1\bar{z}_1)(X^2+(z_1+\bar{z}_1)+z\bar{z}_1)$$
$$= \underbrace{(X^2-\sqrt{2}X+1)}_{\Delta<0}\underbrace{(X^2+\sqrt{2}X+1)}_{\Delta<0} \in \mathbb{R}[X]$$

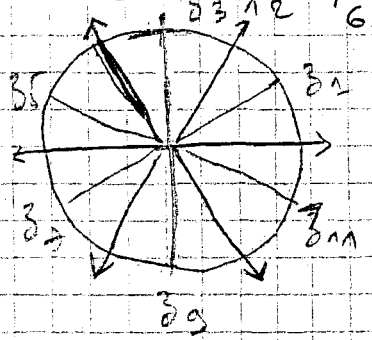
Exercice 6 :

① $X^3-8 = 8\left(\left(\frac{X}{2}\right)^3-1\right)$ $\qquad 2j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= 8\left(\left(\frac{X}{2}\right)-1\right)\left(\frac{X}{2}-j\right)\left(\frac{X}{2}-\bar{j}\right)$$
$$= (X-2)(X-2j)(X-2\bar{j}) \quad \text{dans } \mathbb{C}[X] = (X-2)(X+1-i\sqrt{3})(X+1+i\sqrt{3})$$
$$= (X-2)\underbrace{(X^2+2X+4)}_{\Delta<0} \quad \text{dans } \mathbb{R}[X]$$

② X^6+1 ses racines (complexes) sont ceux de $\Gamma_{12}-\Gamma_6$

$$X^6+1 = (X^2)^6-(-1)^3$$



$$z_k = \cos\frac{k\pi}{6} + i\sin\frac{k\pi}{6}$$
avec $0 \leq k \leq 11$

$z_1 = \bar{z}_{11}$; $z_7 = -z_1$

$z_3 = i = -z_9$

$z_5 = -\bar{z}_1$

$$X^6+1 = \prod_{\substack{0\leq k\leq 11 \\ k \text{ impaire}}}(X-z_k) = (X-z_1)(X-z_3)(X+\bar{z}_1)(X+z_1)(X+z_3)(X-\bar{z}_1) \quad \text{dans } \mathbb{C}[X]$$

=

WWW.TELIB24.COM

③ $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1 = \dfrac{X^{12} - 1}{X^3 - 1}$

$= X^6 (X^3 + 1) + X^3 + 1$

$= (X^3 + 1)(X^6 + 1)$

Les racines de P sont les éléments de $\Gamma_{12} - \Gamma_3$

$P(X) = \prod_{\substack{0 \le k \le 11 \\ k \neq 0, 4, 8}} (X - z_k)$ $\qquad (z_0 = 1 ; z_4 = j, z_8 = \bar{j})$

$z_k = \cos \dfrac{k\pi}{6} + i \sin \dfrac{k\pi}{6}$.

$z_1 = \bar{z}_{11} = -z_7 = -\bar{z}_5$

$z_2 = \bar{z}_{10}$

$z_3 = \bar{z}_0 , z_6$

alors $P(X) = \dfrac{\overset{1}{(X - z_1)} \overset{11}{(X - \bar{z}_1)} \overset{7}{(X + z_1)} \overset{5}{(X + \bar{z}_1)} (X - z_2)(X - \bar{z}_2)}{(X - z_3)(X - \bar{z}_3)(X - z_6)}$ dans $\mathbb{C}[X]$

$= \dfrac{(X^2 - \sqrt{3}X + 1)\overset{z_2}{(X^2 + \sqrt{3}X + 1)}(X^2 - \overset{z_2}{X} + 1)}{(X^2 + 1)(X + 1)}$ dans $\mathbb{R}[X]$

$2n = n + 2$
$n = 2$

Exercice 7 :

Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$:

a) $P(X^2) = X^2 P(X) \iff P(0) = 0$

$P = P' P'' \Rightarrow n = (n-1) + (n-2)$

$n = \deg P \Rightarrow n = 3$

$\deg P'' = 1$; $P''' = a \neq 0$, $P^{(n)}(X) = 0 , \forall n \geq 4$

$P'' = a(X - \alpha)$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$

$P'' / P \Rightarrow P(\alpha) = 0$

$P(X) = P(\alpha) + \dfrac{X - \alpha}{1!} P'(\alpha) + \dfrac{(X-\alpha)^2}{2!} P''(\alpha) + \dfrac{(X-\alpha)^3}{3!} P'''(\alpha)$

$= (X - \alpha) P'(\alpha) + \dfrac{(X-\alpha)^3}{6} a$

$P'(X) = P'(\alpha) + (X - \alpha)^3 \dfrac{a}{6}$

$P = P' P'' \Rightarrow (\alpha, P'(\alpha)) = (\frac{1}{3}, 0) \Rightarrow P = \dfrac{(X - \alpha)^3}{8}$

WWW.TAHRI24.COM

Exercice 8 :

* on a A divise B.

$\Rightarrow B = AC \Rightarrow B(\alpha) = \underbrace{A(\alpha)}_{0}(C(\alpha)) = 0$

donc si α est une racine de A alors α est une racine de B.

* $P(x) \in \mathbb{R}[x]$

$P(\alpha) = 0$

$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

$P(\alpha) = a_n \alpha^n + \dots + a_1 \alpha + a_0$

$\overline{P(\alpha)} = a_n (\overline{\alpha})^n + \dots + a_1 (\overline{\alpha}) + a_0 = P(\overline{\alpha})$

$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) / P$; $j^3 = 1$

→ soit $n \in \mathbb{N}$

si $n \equiv 0[3] \Rightarrow j^{2n} + j^n + 1 = 3$

$n \equiv 1[3] \Rightarrow j^{2n} + j^n + 1 = j^{2(n-1)+2} + j^{(n-1)+1} + 1$

$= j^2 + j^2 + 1 = 0$

$n \equiv 2[3] \Rightarrow j^{2n} + j^n + 1 = j^{2(n-2)+4} + j^{(n-2)+2} + 1$

$= j^4 + j^2 + 1 = 0$ $(X^2+X+1) = (X-j)(X-j^2)$

$X^2 + X + 1 \Leftrightarrow (X-j)(X-\overline{j}) / P_n(X)$ j^2 est une racine

$\Leftrightarrow P_n(j) = 0$

$\Leftrightarrow n \not\equiv 0[3]$

Exercice 9 :

a) $Q_n(X) = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$

$Q_n(2) = Q_n'(2) = 0$

$Q_n''(2) = (2n-1)2^n \neq 0$

2 racine de $Q_n(x)$ d'ordre 2.

b) soit $\alpha \in \mathbb{R}$, une racine multiple de $P(x)$:

$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$

WWW.TALIB24.COM

$0 = P'(\alpha) = 7(\alpha+1)^6 - 7\alpha^6$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$

$0 = P(\alpha) = \frac{1}{2^6} - a = \frac{1}{64} - a$

$\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 = P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^6} - a$

$\Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{64}}$

Remarque : si $a \geq 1$ alors P admet des racines simples (necessairement simples)

si $a > 1$: $P(0) = 1 - a < 0$, $P(-1) < 0$, $\lim_{x \to -\infty} P(x) = +\infty$ } Théorème des valeurs intermédiaires : $\exists \alpha \in]-\infty, -1[$ $P(\alpha) = 0$, $\alpha \neq -\frac{1}{2}$

si $a = 1$ $P(-1) = P(0) = 0$

$\Rightarrow X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-\bar{j})$

$= (X-1)(X^2 - (j+\bar{j})X + j\bar{j})$

$= (X-1)(X^2 + X + 1)$

j est une racine de $X^2 + X + 1 \Rightarrow j^2 + j + 1 = 0$

$\Rightarrow j^3 = 1$

$z_1 = \bar{z}_{11} = -\bar{z}_5 = -z_7$, $z_3 = \bar{z}_9$

$X^6 + 1 = (X - z_1)(X - \bar{z}_1)(X - \bar{z}_3)(X - \bar{z}_3)(X + \bar{z}_1)(X + z_1)$

$= \left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)(X - i)(X + i)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$
$\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$ dans $\mathbb{C}[X]$

$= (X^2 - (z_1 + \bar{z}_1)X + z_1\bar{z}_1)(X^2 - (z_3 + \bar{z}_3)X + z_3\bar{z}_3)$
$(X^2 + (\bar{z}_1 + z_1)X + z_1\bar{z}_1)$

$= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$

WWW.TANTABA24.COM

$\rightarrow P(x^2) = x^2 P(x) \Longrightarrow P(0) = 0$

$a_i \in \mathbb{R}$ avec $a_n \neq 0$

$x^2 P(x) = a_n x^{n+2} + \dots + a_1 x^3$

$P(x^2) = a_n x^{2n} + \dots + a_1 x^2$

$x^2 P(x) = P(x^2) \overset{a_n \neq 0}{\Longrightarrow} n = 2$ et $a_1 = 0$

$\Longrightarrow P(x) = a_2 x^2$

L'ensemble de toutes les solutions est : $S = \{\alpha x^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\rightarrow P = P' P'' \Longrightarrow n = (n-1) + (n-2) \Longrightarrow n = 3 \longrightarrow$

$P \in \mathbb{R}[X]$

$P \equiv 0$ ou $dP = n \in \mathbb{N}$

$(x^3)'' = x$

$(x^3)' = (3x^2)''$

$\Longrightarrow dP'' = 1$

$\Longrightarrow P'' = a(x-\alpha)$ $\quad a, \alpha \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$\Longrightarrow P(\alpha) = 0$

$P(x) = \underbrace{P(\alpha)}_{0} + \frac{x-\alpha}{1!} P'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} \underbrace{P''(\alpha)}_{0} + \frac{(x-\alpha)^3}{3!} P'''(\alpha)$

$P(x) = (x-\alpha) P'(\alpha) + (x-\alpha)^3 \frac{a}{6} = \frac{(x-\alpha)^3}{18}$

$P'(x) = P'(\alpha) + (x-\alpha)^2 \frac{a}{2}$

$P''(\alpha) = a(x-\alpha)$

$P = P' P'' \Longrightarrow (\alpha, P'(\alpha)) = (\frac{1}{3}, 0)$

$P(j) = 0 \Longleftrightarrow (X-j)(X-\bar{j}) / P_n(X)$

$\Longleftrightarrow X^2 + X + 1 / P_n(X)$

$$\boxed{\Longrightarrow P(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow (X-\alpha)(X-\bar{\alpha}) / P}$$

WWW.TALEB24.COM

EX 10

$$F(x) = \frac{x^5+x^4+1}{x^3-x} = x^2+x+1+\frac{Q(x)}{x(x-1)(x+1)} \leftarrow d^\circ Q \leq 2$$

$$= x^2+x+1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1} \quad * \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{0,1,-1\}$$

$$F(x) = x^2+x+1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$$

$$xF(x) = x(x^2+x+1)+a+b\frac{x}{x-1}+c\frac{x}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 0} xF(x) = \bar{a}$$

$$* \quad a = (xF(x))_{x=0} = \left(x(x^2+x+1)+\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)}\right)_{x=0} = -1$$

$$G(x) = \frac{x^5+x^4+1}{x(x-1)^4} = 1+\frac{Q(x)}{x(x-1)^4} \leftarrow d \leq 4$$

$$= 1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}+\frac{d}{(x-1)^3}+\frac{e}{(x-1)^4}$$

$$(x-1)^4 G(x) = (x-1)^4+\frac{a(x-1)^4}{x}+b(x-1)^3+c(x-1)^2+d(x-1)+$$

$$e = \left((x-1)^4 G(x)\right)_{x=1} = \frac{x^5+x^4+1}{x} = 3$$

WWW.TALIB24.COM

Série N° 6 d'Algèbre

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne, dans $\mathbb{R}[X]$, du polynôme A par le polynôme B :

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1, \quad B = X^2 + 2X + 3.$
2. $A = X^4 - X^3 + X - 2, \quad B = X^2 - 2X + 4.\square$

Exercice 2. Effectuer la DE, dans $\mathbb{R}[X]$, du polynôme $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ par le polynôme $B = X^3 + X^2 + 1$ suivant les puissances croissantes, à l'ordre 4.$\square$

Exercice 3. Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le PGCD des deux polynômes

$$A = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 \quad \text{et} \quad B = X^4 + 2X^3 + X + 2.\square$$

Exercice 4. Donner une expression du PGCD des deux polynômes

$$A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X \quad \text{et} \quad B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$$

sous la forme $AU + BV$ où $U, V \in \mathbb{R}[X].\square$

Exercice 5. Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines, le polynôme

$$P = X^4 + 1.\square$$

Exercice 6. Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes

$$X^3 - 8, \quad X^6 + 1, \quad X^9 + X^6 + X^3 + 1.\square$$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $P(X^2) = X^2 P(X)$.
2. $P = P'P''$.□

Exercice 8. Soient A et B deux polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ tels que A divise B. Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de A, alors a est une racine de B. Préciser dans quels cas le polynômes $X^{2n} + X^n + 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$.□

Exercice 9.

1. Soit n un entier non nul. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine $a = 2$ du polynôme

$$P_n(X) = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}.$$

2. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le polynôme $Q_a(X) = (X+1)^7 - X^7 - a$ admet-t-il une racine **multiple** réelle ? □

Exercice 10.

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

   a)
$$F(X) = \frac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X}.$$

   b)
$$G(X) = \frac{X^5 + X^4 + 1}{X(X-1)^4}.$$

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$:

   a)
$$F(X) = \frac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1}.$$

   b)
$$G(X) = \frac{X^2 - 3}{(X^2+1)(X^2+4)}.\square$$

WWW.TALIB24.COM

Corrections.

Remarque. Soit $\Gamma_n = \{z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} : 0 \leq k \leq n-1\}$ le groupe des racines n^{emes} complexes de l'unité. Le polynôme $X^n - 1$ admet n racines distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir les éléments de Γ_n et on a

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - z_k).$$

Les racine cubiques complexes de l'unité sont 1, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j} = j^2$. On a: $1 + j + j^2 = 0$.□

Exercice 5.

$$\begin{aligned} X^4 + 1 &= (X^2+1)^2 - 2X^2 \\ &= \underbrace{(X^2 + \sqrt{2}X + 1)}_{\Delta < 0}\underbrace{(X^2 - \sqrt{2}X + 1)}_{\Delta < 0}.\square \end{aligned}$$

Exercice 6.

1.

$$\begin{aligned} X^3 - 8 &= 8\Big((\frac{X}{2})^3 - 1\Big) \\ &= 8(\frac{X}{2} - 1)(\frac{X}{2} - j)(\frac{X}{2} - \overline{j}) \\ &= (X-2)(X-2j)(X-2\overline{j}) \\ &= (X-2)(X+1-i\sqrt{3})(X+1+i\sqrt{3}) \text{ décomposition dans } \mathbb{C}[X] \\ &= (X-2)(X^2 - 2(j+\overline{j})X + 4j\overline{j}) \\ &= (X-2)(X^2+2X+4) \text{ décomposition dans } \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

2. (a) **Première méthode.** On a: $X^{12} - 1 = (X^6-1)(X^6+1)$, donc les racines complexes de $P(X) = X^6 + 1$ sont les éléments de $\Gamma_{12} - \Gamma_6$. Ce sont les

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{12} + i\sin\frac{2k\pi}{12} \quad \text{où } 0 \leq k \leq 11 \text{ avec } k \text{ impair.}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ z_3 &= i \\ z_5 &= -\overline{z_1} \\ z_7 &= -z_1 \\ z_9 &= \overline{z_3} \\ z_{11} &= \overline{z_1}. \end{aligned}$$

WWW.TALIB24.COM

N.B. Pour bien visualiser dessiner le polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité complexe. Ainsi les éléments du groupe $Gamma_n$ sont bien mis en évidence avec les relations de conjugaison et d'opposition correspondantes.

On a:

$$\begin{aligned}
X^6+1 &= (X-z_1)(X-\overline{z_1})(X-z_3)(X-\overline{z_3})(X+\overline{z_1})(X+z_1) \text{ décomp. dans } \mathbb{C}[X] \\
&= (X^2-(z_1+\overline{z_1})X+z_1\overline{z_1})(X^2-(z_3+\overline{z_3})X+z_3\overline{z_3})(X^2+(z_1+\overline{z_1})X+z_1\overline{z_1}) \\
&= \underbrace{(X^2-\sqrt{3}X+1)}_{\Delta<0}\underbrace{(X^2+1)}_{\Delta<0}\underbrace{(X^2+\sqrt{3}X+1)}_{\Delta<0} \text{ décomposition dans } \mathbb{R}[X].
\end{aligned}$$

(b) **Deuxième méthode.**

$$\begin{aligned}
X^6+1 &= (X^2)^3-(-1)^3 \\
&= (X^2+1)(X^4-X^2+1) \\
&= (X^2+1)\left((X^2+1)^2-3X^2\right) \\
&= (X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1).
\end{aligned}$$

3. (a) **Première méthode.** On a: $X^{12}-1=(X^3-1)(X^9+X^6+X^3+1)$. Donc les racines du polynôme $P(X)=X^9+X^6+X^3+1$ sont les éléments de $\Gamma_{12}-\Gamma_3$. Ce sont les

$$z_k=\cos\frac{k\pi}{6}+i\sin\frac{k\pi}{6} \quad \text{où } 0\le k\le 11 \text{ n'est pas un multiple de } 4.$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} \\
z_2 &= \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
z_3 &= i \\
z_5 &= -\overline{z_1} \\
z_6 &= -1 \\
z_7 &= -z_1 \\
z_9 &= \overline{z_3} \\
z_{10} &= \overline{z_2} \\
z_{11} &= \overline{z_1}.
\end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned}
X^9+X^6+X^3+1 &= \prod_{0\le k\le 11}^{k\neq 0,4,8}(X-z_k) \text{ décomposition dans } \mathbb{C}[X] \\
&= (X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X-z_2)(X-\overline{z_2})(X+1 \\
&= \underbrace{(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-X+1)(X+1)}_{\textit{decomposition dans } \mathbb{R}[X]}.
\end{aligned}$$

WWW.TALIB24.COM

(b) **Deuxième méthode.**

$$\begin{aligned} X^9+X^6+X^3+1 &= (X^3+1)(X^6+1) \\ &= (X+1)(X^2-X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}+1). \square \end{aligned}$$

Exercice 7 (1). On remarque que $P(0)=0$ et P s'écrit

$$P(X)=a_nX^n+\ldots+a_1X.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} a_nX^{n+2}+\ldots+a_1X^3 &= X^2P(X) \\ &= P(X^2) \\ &= a_n(X^2)^n+\ldots+a_1(X^2) \\ &= a_nX^{2n}+\ldots+a_1X^2. \end{aligned}$$

Ceci donne $n=2$ et $a_1=0$. Par conséquent $P(X)=a_2X^2$.

(2). Notons $n=deg(P)$. L'égalité des degrés dans $P=P'P''$ donne $n=(n-1)+(n-2)$. Donc $n=3$ et $deg(P'')=1$. Soit alors $\alpha\in\mathbb{R}$ une racine de P'', alors α est une racine de P. D'autre part il existe $a\in\mathbb{R}^*$ tel que $P''(X)=a(X-\alpha)$ et on a: $P'''(X)=a\in\mathbb{R}^*$, $P^{(4)}(X)\equiv 0$. La formule de Taylor appliquée à P en α donne:

$$\begin{aligned} P(X) &= P(\alpha)+\frac{X-\alpha}{1!}P'(\alpha)+\frac{(X-\alpha)^2}{2!}P''(\alpha)+\frac{(X-\alpha)^3}{3!}P'''(\alpha) \\ &= (X-\alpha)P'(\alpha)+(X-\alpha)^3\frac{a}{6}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P(X)' &= P'(\alpha)+\frac{a}{2}(X-\alpha)^2 \\ P''(X) &= a(X-\alpha) \end{aligned}$$

et on a:

$$P'P''=aP'(\alpha)(X-\alpha)+\frac{a^2}{2}(X-\alpha)^3=P.$$

Ceci donne $(a,P'(\alpha)=(3^{-1},0)$ c'est à dire

$$P(X)=\frac{(X-\alpha)^3}{18}. \square$$

Exercice 8. On pose $P(X)=X^{2n}+X^n+1$ et on a:

$$\begin{aligned} n\equiv 0\ (3) &\Rightarrow P(j)=j^{2n}+j^n+1=3. \\ n\equiv 1\ (3) &\Rightarrow P(j)=j^{2(n-1)+2}+j^{(n-1)+1}+1=j^2+j+1=0. \\ n\equiv 2\ (3) &\Rightarrow P(j)=j^{2(n-2)+4}+j^{(n-2)+2}+1=j^4+j^2+1=0. \end{aligned}$$

WWW.TALB24.COM

Ainsi

P est divisible par $X^2+X+1=(X-j)(X-\bar{j}) \Leftrightarrow P(j)=0$ ($\Leftarrow$ P est à coefficients réels).
$\Leftrightarrow n \notin 3\mathbb{N}$.□

Exercice 9.

1. On a:

   (a)

$$\begin{aligned} P_1(X) &= X^3-5X^2+8X-4. \\ P_1'(X) &= 3X^2-10X+8. \\ P_1''(X) &= 6X-10. \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} P_2(X) &= 2X^4-9X^3+12X^2-4X. \\ P_2'(X) &= 8X^3-27X^2+24X-4. \\ P_2''(X) &= 24X^2-54X+24. \end{aligned}$$

   (c) Si $n \geq 3$ on a:

$$\begin{aligned} P_n(X) &= nX^{n+2}-(4n+1)X^{n+1}+4(n+1)X^n-4X^{n-1}. \\ P_n'(X) &= n(n+2)X^{n+1}-(n+1)(4n+1)X^n+4n(n+1)X^{n-1}-4(n-1)X^{n-2}. \\ P_n''(X) &= n(n+1)(n+2)X^n-n(n+1)(4n+1)X^{n-1} \\ &\quad +4n(n^2-1)X^{n-2}-4n(n-1)(n-2)X^{n-3}. \end{aligned}$$

   Dans tous les cas on obtient $P_n(2)=P_n'(2)=0$ et $P_n''(2)=(2n-1)2^n \neq 0$.
   Donc 2 est une racine de P_n d'ordre 2 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Autre méthode. on a

$$\begin{aligned} P_n(X) &= X^{n-1}\Big(nX^3-(4n+1)X^2+4(n+1)X-4\Big) \\ &= X^{n-1}(X-2)\Big(nX^2-(2n+1)X+2\Big) \\ &= X^{n-1}(X-2)^2(nX-1)). \end{aligned}$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine multiple de $Q_a(X)=(X+1)^7-X^7-a$, alors α est une racine de

$$Q_a'(X)=7(X+1)^6-7X^6.$$

   Donc $\alpha=-\frac{1}{2}$. L'égalité $Q_a(\alpha)=0$ donne alors $a=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$.□

WWW.TALB24.COM

Exercice 10.

1. a)

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} \\ &= X^2+X+1+\frac{\alpha}{X}+\frac{\beta}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \alpha &= \Big(XF(X)\Big)_{X=0} \\ &= \Big(\frac{X^5+X^4+1}{X^2-1}\Big)_{X=0} \\ &= -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \Big((X-1)F(X)\Big)_{X=1} \\ &= \Big(\frac{X^5+X^4+1}{X(X+1)}\Big)_{X=1} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \Big((X+1)F(X)\Big)_{X=-1} \\ &= \Big(\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)}\Big)_{X=-1} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) On pose $Y = X-1$ et l'on effectue la division suivant les puissances croissanctes de

$$X^5+X^4+1 = 3+9Y+16Y^2+14Y^3+6Y^4+Y^5$$

par $X = 1+Y$ à l'ordre $n = 4-1 = 3$. On trouve

$$3+9Y+16Y^2+14Y^3+6Y^4+Y^5 = (1+Y)(3+6Y+10Y^2+4Y^3)+2Y^4+Y^5$$

et on a:

$$\begin{aligned} G(X) &= \frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} \\ &= \frac{3+9Y+16Y^2+14Y^3+6Y^4+Y^5}{(1+Y)Y^4} \end{aligned}$$

WWW.TALIB24.COM

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(1+Y)(3+6Y+10Y^2+4Y^3)+2Y^4+Y^5}{(1+Y)Y^4} \\
&= \frac{3+6Y+10Y^2+4Y^3}{Y^4} + \frac{2+Y}{1+Y} \\
&= 1+\frac{1}{Y+1}+\frac{4}{Y}+\frac{10}{Y^2}+\frac{6}{Y^3}+\frac{3}{Y^4} \\
&= 1+\frac{1}{X}+\frac{4}{X-1}+\frac{10}{(X-1)^2}+\frac{6}{(X-1)^3}+\frac{3}{(X-1)^4}.
\end{aligned}
$$

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$:

a)

$$
\begin{aligned}
F(X) &= \frac{X^5+X+1}{X^4-1} \\
&= X+\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\beta}{X+1}+\frac{\gamma}{X-i}+\frac{\delta}{X+i} \quad \text{où } \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

On trouve $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}+\frac{i}{4}, -\frac{1}{2}-\frac{i}{4})$.

b)

$$
\begin{aligned}
Q(X) &= \frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} \\
&= \frac{\alpha}{X-i}+\frac{\beta}{X+i}+\frac{\gamma}{X-2i}+\frac{\delta}{X+2i} \quad \text{où } \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

Comme $Q(-X) = Q(X) \in \mathbb{R}(X)$, on a: $\beta = -\alpha = \overline{\alpha}$ et $\delta = -\gamma = \overline{\gamma}$. On trouve $(\alpha,\gamma) = (\frac{2i}{3}, -\frac{7i}{12})$ i.e.

$$
\begin{aligned}
Q(X) &= \frac{\frac{2i}{3}}{X-i}+\frac{\frac{-2i}{3}}{X+i}+\frac{\frac{-7i}{12}}{X-2i}+\frac{\frac{7i}{12}}{X+2i} \quad \text{décomposition dans } \mathbb{C}(X) \\
&= \frac{\frac{-4}{3}}{X^2+1}+\frac{\frac{7}{3}}{X^2+4} \quad \text{décomposition dans } \mathbb{R}(X). \square
\end{aligned}
$$

WWW.TALIB24.COM

SERIE 4

Exercice 1. Calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 126, 230.
2. 390, 720, 450.
3. 180, 606, 750.

Exercice 2. Combien 15! admet-il de diviseurs ?

Exercice 3. Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Exercice 4. Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.

Exercice 5. Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Exercice 6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24,$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

Exercice 7. Trouver tous les entiers relatifs n tels que n^2+n+7 soit divisible par 13.

Exercice 8. On considère le nombre $m = 2^n p$, dans lequel n désigne un entier naturel quelconque et p un nombre premier. Dresser la liste des diviseurs de m, y compris 1 et m lui-même, et calculer, en fonction de m et p, la somme S de tous ces diviseurs.

Exercice 9. Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Exercice 10. Montrer que pour tout $n > 0$:

1. 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$
2. 11 divise $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$
3. 6 divise $5n^3 + n$
4. 8 divise $5^n + 2.3^{n-1} + 1$.

Exercice 11. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, 4 ne divise pas $n^2 + 1$.

WWW.TALIB24.COM

Exercice 12. Montrer que pour chaque entier positif n, 49 divise $2^{3n+3} - 7n - 8$.

Exercice 13. Montrer que :

1. Si un entier est de la forme $6k + 5$, alors il est nécessairement de la forme $3k - 1$, alors que la réciproque est fausse.
2. Le carré d'un entier de la forme $5k + 1$ est aussi de cette forme.
3. Le carré d'un entier est de la forme $3k$ ou $3k + 1$, mais jamais de la forme $3k + 2$.
4. Le carré d'un entier est de la forme $4k$ ou $4k + 1$, mais jamais de la forme $4k + 2$ ni de la forme $4k + 3$.
5. Le cube de tout entier est de la forme $9k$, $9k + 1$ ou $9k + 8$.
6. Si un entier est à la fois un carré et un cube, alors c'est une puissance sixième, et il est de la forme $7k$ ou $7k + 1$.

Exercice 14. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :

1. $n | n + 8$.
2. $n - 1 | n + 11$.
3. $n - 3 | n^3 - 3$.

Exercice 15. Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ il existe un unique $r(a) \in \{0, \ldots, b - 1\}$ tel qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ avec $a = bq + r(a)$.

1. En utilisant ceci pour $b = 13$, déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $13 | n^2 + n + 7$.
2. Si $a \in \mathbb{N}$ et $b = 7$, déterminer les valeurs possibles de $r(a^2)$ (on rappelle que $r(a^2)$ doit appartenir à $\{0, \ldots, b - 1\}$).
   Montrer alors que $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2$ $(7 | x^2 + y^2)$ ssi $(7 | x$ et $7 | y)$.
3. Montrer qu'un entier positif de la forme $8k + 7$ ne peut pas être la somme de trois carrés d'entiers.

Exercice 16.

1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.
2. Montrer de même que tout nombre pair vérifie $x^2 = 0 \pmod 8$ ou $x^2 = 4 \pmod 8$.
3. Soient a, b, c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et celui de $2(ab + bc + ca)$.
4. En déduire que ces deux nombres ne sont pas des carrés puis que $ab + bc + ca$ non plus.

WWW.TALIB24.COM

Correction 1. Il s'agit ici d'utiliser la décomposition des nombres en facteurs premiers.

1. $126 = 2.3^2.7$ et $230 = 2.5.23$ donc le pgcd de 126 et 230 est 2.
2. $390 = 2.3.5.13$, $720 = 2^4.3^2.5$, $450 = 2.3^2.5^2$ et donc le pgcd de ces trois nombres est $2.3.5 = 30$.
3. $\text{pgcd}(180, 606, 750) = 6$.

Correction 2. Écrivons la décomposition de $15! = 1.2.3.4\ldots15$ en facteurs premiers. $15! = 2^{11}.3^6.5^3.7^2.11.13$. Un diviseur de $15!$ s'écrit $d = 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma.7^\delta.11^\varepsilon.13^\eta$ avec $0 \leq \alpha \leq 11$, $0 \leq \beta \leq 6$, $0 \leq \gamma \leq 3$, $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$. De plus tout nombre d de cette forme est un diviseur de $15!$. Le nombre de diviseurs est donc $(11+1)(6+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 4032$.

Correction 3. Il sagit de calculer 100^{1000} modulo 13. Tout d'abord $100 \equiv 9 \pmod{13}$ donc $100^{1000} \equiv 9^{1000} \pmod{13}$. Or $9^2 \equiv 81 \equiv 3 \pmod{13}$, $9^3 \equiv 9^2.9 \equiv 3.9 \equiv 1 \pmod{13}$, Or $9^4 \equiv 9^3.9 \equiv 9 \pmod{13}$, $9^5 \equiv 9^4.9 \equiv 9.9 \equiv 3 \pmod{13}$. Donc $100^{1000} \equiv 9^{1000} \equiv 9^{3.333+1} \equiv (9^3)^{333}.9 \equiv 1^{333}.9 \equiv 9 \pmod{13}$.

Correction 4. La seule chose à voir est que pour une division euclidienne le reste doit être plus petit que le quotient. Donc les divisions euclidiennes s'écrivent : $96842 = 256 \times 378 + 74$ et $96842 = 258 \times 375 + 92$.

Correction 5. Raisonnons modulo 8 :

$$7 \equiv -1 \pmod 8.$$

Donc

$$7^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod 8.$$

Le reste de la division euclidienne de $7^n + 1$ par 8 est donc $(-1)^n + 1$ donc Si n est impair alors $7^n + 1$ est divisible par 8. Et si n est pair $7^n + 1$ n'est pas divisible par 8.

Correction 6. Il suffit de constater que pour 4 nombres consécutifs il y a nécessairement : un diviseur de 2, un diviseur de 3, un diviseur de 4 (tous distincts). Donc le produit de 4 nombres consécutifs est divisible par $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Correction 9. Ecrire $n = p^2+q^2$ et étudier le reste de la division euclidienne de n par 4 en distinguant les différents cas de parité de p et q.

Correction 16.

1. Soit n un nombre impair, alors il s'écrit $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Maintenant $n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4p(p + 1) + 1$. Donc $n^2 \equiv 1 \pmod 8$.

WWW.TALEB24.COM

2. Si n est pair alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. Et $n^2 = 4p^2$. Si p est pair alors p^2 est pair et donc $n^2 = 4p^2$ est divisible par 8, donc $n^2 \equiv 0 \pmod 8$. Si p est impair alors p^2 est impair et donc $n^2 = 4p^2$ est divisible par 4 mais pas par 8, donc $n^2 \equiv 4 \pmod 8$.

3. Comme a est impair alors d'après la première question $a^2 \equiv 1 \pmod 8$, et de même $c^2 \equiv 1 \pmod 8$, $c^2 \equiv 1 \pmod 8$. Donc $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod 8$. Pour l'autre reste, écrivons $a = 2p + 1$ et $b = 2q+1$, $c = 2r+1$, alors $2ab = 2(2p+1)(2q+1) = 8pq+4(p+q)+2$. Alors $2(ab + bc + ca) = 8pq + 8qr + 8pr + 8(p + q + r) + 6$, donc $2(ab + bc + ca) \equiv 6 \pmod 8$.

4. Montrons par l'absurde que le nombre $a^2+b^2+c^2$ n'est pas le carré d'un nombre entier. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = n^2$. Nous savons que $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3 \pmod 8$. Si n est impair alors $n^2 \equiv 1 \pmod 8$ et si n est pair alors $n^2 \equiv 0 \pmod 8$ ou $n^2 \equiv 4 \pmod 8$. Dans tous les cas n^2 n'est pas congru à 3 modulo 8. Donc il y a une contradiction. La conclusion est que l'hypothèse de départ est fausse donc $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas un carré. Le même type de raisonnement est valide pour $2(ab + bc + ca)$.

   Pour $ab+bc+ca$ l'argument est similaire : d'une part $2(ab+bc+ca) \equiv 6 \pmod 8$ et d'autre part si, par l'absurde, on suppose $ab + bc + ca = n^2$ alors selon la parité de n nous avons $2(ab+bc+ca) \equiv 2n^2 \equiv 2 \pmod 8$ ou à $0 \pmod 8$. Dans les deux cas cela aboutit à une contradiction. Nous avons montrer que $ab + bc + ca$ n'est pas un carré.

WWW.TALEB4.COM