Table des matières

Chapitre 1

Les suites

1.1 Rappels de cours

Définition d'une suite numérique

__Définition__ **1.1.** *Soit $\mathbb{N}_1$ une partie infinie de $\mathbb{N}$.*
Toute application u de $\mathbb{N}_1$ dans $\mathbb{R}$ est appelée une suite numérique.
Pour $n \in \mathbb{N}_1$, le réel $u(n)$ est dit le terme général de la suite u et sera noté u_n. La suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$.

Opérations sur les suites

__Définition__ **1.2.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
L'égalité de deux suites :
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}_1} \iff (\forall n \in \mathbb{N}_1, \quad u_n = v_n)$.
La somme de deux suites :
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}_1} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$.
La multiplication par un réel :
$\lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}_1} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$.
La multiplication de deux suites :
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}_1} = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$.

Suite extraite

__Définition__ **1.3.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ une suite et h une application **strictement croissante** de $\mathbb{N}_1$ dans $\mathbb{N}_1$.*
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}_1, \quad v_n = u_{h(n)}$ est appelée une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$.

Suite convergente, suite divergente

Définition 1.4. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est convergente si, et seulement si, il existe un réel a tel que*

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_o\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\in\mathbb{N}_1,\ (n>n_o)\Longrightarrow(|u_n-a|<\varepsilon).$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite une suite divergente.

Théorème 1.1. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est convergente, le réel a est unique. On l'appelle limite de la suite et on le note $a=\lim\limits_n u_n$, $a=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ou $a=\lim u_n$. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ et $a=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$, alors $a=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.*

Définition 1.5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ une suite divergente.*
Si on a : $\forall A>0\ \exists N\in\mathbb{N}_1 : \forall n\geq N,\ u_n\geq A$,
on dit que cette suite a pour limite $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
Si on a : $\forall B<0\ \exists N\in\mathbb{N}_1 : \forall n\geq N,\ u_n\leq B$,
on dit que cette suite a pour limite $-\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

Suites bornées

Définition 1.6.
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est constante $\Longleftrightarrow \exists c\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}_1,\ u_n=c$.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est majorée $\Longleftrightarrow \exists M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}_1,\ u_n\leq M$.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est minorée $\Longleftrightarrow \exists m\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}_1,\ m\leq u_n$.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est bornée $\Longleftrightarrow \exists(m,M)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N}_1,\ m\leq u_n\leq M$.*

Proposition 1.1.
— *Toute suite convergente est bornée.*
— *Une suite extraite d'une suite bornée est bornée.*

Suites monotones (à partir d'un certain rang)

Définition 1.7.
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est croissante $\Longleftrightarrow \exists n_o\in\mathbb{N}_1,\ \forall n\in\mathbb{N}_1$ et $n\geq n_o$, $u_{n+1}-u_n\geq 0$.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est strictement croissante $\Longleftrightarrow \exists n_o\in\mathbb{N}_1,\ \forall n\in\mathbb{N}_1$ et $n\geq n_o$, $u_{n+1}-u_n>0$.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est décroissante $\Longleftrightarrow \exists n_o\in\mathbb{N}_1,\ \forall n\in\mathbb{N}_1$ et $n\geq n_o$, $u_{n+1}-u_n\leq 0$.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est strictement décroissante $\Longleftrightarrow \exists n_o\in\mathbb{N}_1\ \forall n\in\mathbb{N}_1$ et $n\geq n_o$, $u_{n+1}-u_n<0$.*

Théorème 1.2.
1. *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
2. *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*
3. *Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.*
4. *Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.*

Suite arithmétique

Définition 1.8. *Une suite $(u_n)_{n\geq n_o}$ est dite une suite arithmétique s'il existe $r\in\mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall n\geq n_o,\quad u_{n+1}-u_n=r$$

Le réel r est appelée la raison de la suite $(u_n)_{n\geq n_o}$.

Propriétés 1.
1. *$(u_n)_{n\geq n_o}$ est une suite arithmétique si et seulement si $\forall n\geq n_o,\quad u_{n+1}=\dfrac{u_{n+2}+u_n}{2}$.*
2. *$(u_n)_{n\geq n_o}$ est une suite arithmétique de raison r si et seulement si $\forall n\geq p\geq n_o,\quad u_n=u_p+(n-p)r$.*

   En particulier $u_n=u_{n_o}+(n-n_o)r$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\begin{cases}+\infty & si\ r>0,\\ u_o & si\ r=0,\\ -\infty & si\ r<0.\end{cases}$
3. *Si $(u_n)_{n\geq n_o}$ est une suite arithmétique, alors*

$$\forall p\in\mathbb{N}\ :\ n\geq p\geq n_o,\quad u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n=\frac{n-p+1}{2}(u_p+u_n).$$

Suite géométrique

Définition 1.9. *Une suite $(u_n)_{n\geq n_o}$ est dite une suite géométrique s'il existe $q\in\mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall n\geq n_o,\quad u_{n+1}=qu_n$$

Le réel q est appelée la raison de la suite $(u_n)_{n\geq n_o}$.

Propriétés 2.
1. *$(u_n)_{n\geq n_o}$ est une suite géométrique si et seulement si $\forall n\geq n_o,\quad u_{n+1}^2=u_{n+2}\times u_n$.*
2. *$(u_n)_{n\geq n_o}$ est une suite géométrique de raison $q\Longleftrightarrow \forall p\in\mathbb{N}\ :\ n\geq p\geq n_o$, $u_n=q^{n-p}u_p$. En particulier pour $p=n_o$:*

$$u_n=q^{n-n_o}u_{n_o}\ \text{et}\ \lim_{n\to+\infty}u_n=\begin{cases}+\infty & si\ q>1\ et\ u_{n_o}>0\\ -\infty & si\ q>1\ et\ u_{n_o}<0\\ u_{n_o} & si\ q=1\\ 0 & si\ -1<q<1\\ \text{pas de limite} & si\ q\leq -1\ et\ u_{n_o}\neq 0\end{cases}$$

3. *Si $(u_n)_{n\geq n_o}$ est une suite géométrique de raison q $(q\neq 1)$, alors*

$$\forall n\geq p\geq n_o\ \text{on a}\quad u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n=\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}u_p.$$

Suites récurrentes

Définition 1.10. *Si $(u_n)_{n\geq n_o}$ est une suite telle que : il existe une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\forall n>n_o$, $u_{n+1}=f(u_n)$, on dit que c'est une suite récurrente (simple) associée à la fonction f.*

Proposition 1.2. *Soit $(u_n)_{n\geq n_o}$ une suite récurrente associée à f.*
1. *Si f est une fonction croissante, alors $(u_n)_{n\geq n_o}$ est croissante (resp. décroissante)*
   si $u_o\leq f(u_o)=u_1$ (resp. $u_o\geq f(u_o)=u_1$).

2. *Si $u_o \in I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $f(I) \subset I$ et f continue sur I, alors la limite de $(u_n)_{n \geq n_o}$ si elle existe, elle est une racine de l'équation $f(x) = x$.*

Remarque 1.1. *Étant donnée une suite récurrente vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ et tel que $a \neq 1$, la suite v_n définie par $v_n = u_n + \frac{b}{a-1}$ est une suite géométrique vérifiant $v_{n+1} = av_n$.*
La suite $(v_n)_n$ est dite la suite auxiliaire associée à la suite $(u_n)_n$.
Le calcul de u_n est ramené à celui de v_n.

Suites adjacentes

Définition 1.11. *Deux suites $(u_n)_{n \geq n_o}$ et $(v_n)_{n \geq n_o}$ sont dites adjacentes si elles vérifient :*

1. *L'une est croissante et l'autre est décroissante.*
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0.$

Théorème 1.3. *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.*

Propriétés utiles

Propriétés 3. *Étant donnés deux réels l et l', des suites $(u_n)_{n \geq n_o}$, $(v_n)_{n \geq n_o}$ et $(w_n)_{n \geq n_o}$, alors on a les résultats :*

- $\begin{cases} \forall n \geq n_o, \ |u_n - l| \leq v_n \\ et \ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l.$
- $\begin{cases} \forall n \geq n_o, \ v_n \leq u_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \text{ et } \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l' \end{cases} \Longrightarrow l' \leq l.$
- $\begin{cases} \forall n \geq n_o, \ v_n \leq u_n \leq w_n \\ et \ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l.$
- $\begin{cases} \forall n \geq n_o, \ v_n \leq u_n \\ et \ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$
- $\begin{cases} \forall n \geq n_o, \ v_n \leq u_n \\ et \ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty.$

1.2 Énoncés des exercices

Exercice 1.1. *Calculer les limites des suites suivantes :*

1. $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n}$ 2. $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{(-1)^n - n}$ 3. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}; |a| \neq |b|$

4. $u_n = \sin(n) + n$ 5. $u_n = \dfrac{n \sin n}{n^2 + \cos n}$ 6. $u_n = n \sin \dfrac{1}{n}$

7. $u_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$ 8. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ 9. $u_n = \dfrac{\mathrm{E}(n\sqrt{2})}{n}$

Exercice 1.2. *Déterminer les limites des suites suivantes :*

1. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3 + k}}$ 2. $u_n = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \dfrac{n}{n^2 + k}$ 3. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

4. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n + k}$

Exercice 1.3. *Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = a > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{3 + u_n}{2(1 + u_n)}$.*

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > 0$.*
2. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$.*
3. *En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - 1| \leq (\frac{1}{2})^n |a - 1|$.*
4. *Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.*

Exercice 1.4. *Posons $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2 - 1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Chercher a et b tels que $\dfrac{1}{4k^2 - 1} = \dfrac{a}{2k - 1} + \dfrac{b}{2k + 1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*
2. *En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.*

Exercice 1.5. *Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r telle que $u_5 = 3$ et $u_{13} = 15$.*

1. *Calculer u_0 et r.*
2. *Calculer la somme $S = u_7 + u_8 + \cdots + u_{19}$.*

Exercice 1.6. *Calculer en fonction de n la somme $S_n = 3 + 6 + 9 + \cdots + 3n$.*

Exercice 1.7. *Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + e^{u_n})$. On pose $v_n = e^{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

1. *Montrer que la suite $(v_n)_n$ est arithmétique.*
2. *En déduire une expression de u_n en fonction de n.*

Exercice 1.8. *Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{12 + u_n^2}$.*

1. *Montrer que la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.*

2. En déduire la limite de la suite $(v_n)_n$ puis celle de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 1.9. *Soient les deux suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ définies par :*

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos(\frac{\pi}{2^k}) \quad et \quad v_n = u_n \sin(\frac{\pi}{2^n}).$$

1. *Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est géométrique.*
2. *Écrire v_n puis u_n en fonction de n et en déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 2}$.*

Exercice 1.10. *Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = -4$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}(u_n - 2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On pose $v_n = u_n + 6$.*

1. *Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.*
2. *En déduire une expression de $(u_n)_n$ en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*
3. *Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.*
4. *En déduire $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n et $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$.*

Exercice 1.11. *On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$ et $u_0 = 1$.*

1. *Définir la suite auxiliaire $(v_n)_n$ associée à $(u_n)_n$.*
2. *Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.*
3. *Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.*
4. *En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*

Exercice 1.12. *Étudier la monotonie des suites suivantes :*

1. $u_n = \frac{n+1}{e^n}$ 2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 3. $u_n = \frac{2^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$
4. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, $n \in \mathbb{N}^*$ 5. $u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{n+3}$

Exercice 1.13. *Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.*

1. *Vérifier que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.*
2. *En déduire une majoration de la suite $(u_n)_n$.*
3. *Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et donner un encadrement de sa limite.*

Exercice 1.14. *Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

1. (a) *Montrer que la suite $(u_n)_n$ est majorée par 4.*
   (b) *Montrer que $(u_n)_n$ est strictement croissante.*
   (c) *En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.*
2. (a) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.*
   (b) *Retrouver le résultat de 1.(c).*
   (c) *Étudier la convergence de la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = n^2(4 - u_n)$.*

Exercice 1.15. *Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2}$.*

1. *Montrer que si $u_0 \leq 2$, alors la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée. On déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.*
2. *Montrer que si $u_0 > 2$, alors la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée, puis déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 1.16. *Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.*

1. *Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.*
2. *Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.*
3. *En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.*

Exercice 1.17. *Étudier la convergence des suites suivantes :*

1. $u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ 2. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$ 3. $\begin{cases} u_0 > 0, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 \geq 0, \\ u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n} \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 0 \leq u_0 \leq 1, \\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$

Exercice 1.18. *Dans chacun des cas suivants, montrer que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes :*

1. $u_n = 1 + \frac{1}{n!}$, $v_n = \frac{n}{n+1}$ 2. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n}$
3. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ 4. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$, $v_n = u_n - \frac{1}{n}$

Exercice 1.19. *On considère les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = 3, \quad v_0 = 4, \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad et \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que la suite $(w_n)_n$, définie par $w_n = v_n - u_n$, est géométrique et déterminer sa limite.*
2. *Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Que peut-on déduire ?*

3. *On considère la suite $(s_n)_n$ définie par* $s_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.
   (a) *Démontrer que la suite $(s_n)_n$ est constante.*
   (b) *En déduire la limite des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.*

Exercice 1.20. *Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par :*

$$\begin{cases} u_0 = a, \quad v_0 = b, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$.*
2. *Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante.*
3. *Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.*
4. *En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.*

Exercice 1.21. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n^{(-1)^n} + a}$. Étudier, suivant les valeurs de a, si la suite $(u_n)_n$ converge.*

Exercice 1.22. *Montrer que si les suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent, alors la suite $(u_n)_n$ converge.*

1.3 Solutions détaillées des exercices

Solution 1.1. 1. *Par simplification on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2 - 3n + 2}{1-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(2n - 3 + \frac{2}{n})}{n(\frac{1}{n} - 1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n - 3 + \frac{2}{n}}{\frac{1}{n} - 1} = -\infty,$$

car $\lim_{n\to+\infty}(2n - 3 + \frac{2}{n}) = +\infty$ *et* $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n} - 1) = -1$.

2. *On a* $\dfrac{(-1)^n + n}{(-1)^n - n} = \dfrac{\frac{(-1)^n}{n} + 1}{\frac{(-1)^n}{n} - 1}$. *Puisque* $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ *et donc* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n + n}{(-1)^n - n} = -1$.

3. *Si $|a| > |b|$, alors* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1 - (\frac{b}{a})^n}{1 + (\frac{b}{a})^n} = 1$, *car* $\lim_{n\to+\infty} (\frac{b}{a})^n = 0$ *puisque* $|\frac{b}{a}| < 1$.
   De même, si $|a| < |b|$, alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(\frac{a}{b})^n - 1}{(\frac{a}{b})^n + 1} = -1$.

4. *On a $\sin(n) \geq -1$. Ce qui donne $u_n \geq -1 + n$. Comme* $\lim_{n\to+\infty}(-1+n) = +\infty$, *on en déduit que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

5. *En simplifiant par n^2, on écrit* $\dfrac{n \sin n}{n^2 + \cos n} = \dfrac{\frac{\sin n}{n}}{1 + \frac{\cos n}{n^2}}$.
   Et puisque $0 \leq |\dfrac{\sin n}{n}| \leq \dfrac{1}{n}$, $0 \leq |\dfrac{\cos n}{n^2}| \leq \dfrac{1}{n^2}$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n^2} = 0$, *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

6. *Sachant que* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$,
   on écrit $\lim_{n\to+\infty} n \sin \dfrac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$.

7. *En multipliant par l'expression conjuguée, on a*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} + n)(\sqrt{n^2 + 3n} - n)}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

8. *Sachant que $a^b = e^{b \ln a}$, on écrit*
   $\lim_{n\to+\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}} = e$, *car* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

9. *Puisque $n\sqrt{2} - 1 < \mathrm{E}(n\sqrt{2}) \leq n\sqrt{2}$, alors $\sqrt{2} - \frac{1}{n} < u_n \leq \sqrt{2}$.*
   Comme $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{2} - \frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2} = \sqrt{2}$, *on obtient* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Solution 1.2. :

1. *On a d'après les implications suivantes*

$$\begin{aligned} 1\le k\le n &\Rightarrow n^3+1\le n^3+k\le n^3+n\\ &\Rightarrow \sqrt[3]{n^3+1}\le\sqrt[3]{n^3+k}\le\sqrt[3]{n^3+n}\\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}\\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}\\ &\Rightarrow \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}}\le\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}. \end{aligned}$$

(En passant à la somme en variant k de 1 à n).

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}}=1$

et $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}}=1.$

D'où $\lim_{n\to+\infty}u_n=1.$

2. *On a d'après les implications suivantes*

$$\begin{aligned} 0\le k\le 2n+1 &\Rightarrow n^2\le n^2+k\le n^2+2n+1=(n+1)^2\\ &\Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2}\le\frac{1}{n^2+k}\le\frac{1}{n^2}\\ &\Rightarrow \frac{n}{(n+1)^2}\le\frac{n}{n^2+k}\le\frac{n}{n^2}\\ &\Rightarrow \frac{(2n+2)n}{(n+1)^2}\le\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{n}{n^2+k}\le\frac{(2n+2)n}{n^2}\\ &\Rightarrow \frac{2n}{n+1}\le\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{n}{n^2+k}\le\frac{2n+2}{n}. \end{aligned}$$

(En passant à la somme en variant k de 0 à $2n+1$, on a $2n+2$ termes).

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+2}{n}=2$, *on en déduit que*

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{n}{n^2+k}=2.$

3.

$$k\le n\Longrightarrow\frac{1}{\sqrt{k}}\ge\frac{1}{\sqrt{n}}\Longrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

D'où $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=+\infty$, *car* $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty.$

4.

$$k\le n\Longrightarrow n+k\le 2n\Longrightarrow\frac{n}{n+k}\ge\frac{n}{2n}\Longrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k}\ge n\frac{n}{2n}=\frac{n}{2}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}=+\infty$, *d'où* $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k}=+\infty.$

Solution 1.3. 1. *En raisonnant par récurrence :*

On a $u_0=a>0$. *Supposons que* $u_n>0$. *Alors* $3+u_n>0$ *et* $1+u_n>0$.

Par suite $u_{n+1}=\frac{3+u_n}{2(1+u_n)}>0.$

Donc $u_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}.$

2. $|u_{n+1}-1|=\left|\frac{3+u_n}{2(1+u_n)}-1\right|=\frac{|1-u_n|}{2+2u_n}\le\frac{|1-u_n|}{2}$, *car* $2+2u_n\ge 2$.

3. *En raisonnant par récurrence :*

$|u_0-1|=|a-1|\le(\frac{1}{2})^0|a-1|.$

Supposons que $|u_n-1|\le(\frac{1}{2})^n|a-1|$,

alors $|u_{n+1}-1|\le\frac{|u_n-1|}{2}\le\frac{1}{2}((\frac{1}{2})^n|a-1|)=(\frac{1}{2})^{n+1}|a-1|.$

Par suite $|u_n-1|\le(\frac{1}{2})^n|a-1|,\ \forall n\in\mathbb{N}.$

4. *Puisque* $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n=0$, *alors* $\lim_{n\to+\infty}|u_n-1|=0$, *et donc* $\lim_{n\to+\infty}u_n=1.$

Solution 1.4. 1. *Par des équivalences, on a :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{4k^2-1}=\frac{a}{2k-1}+\frac{b}{2k+1},\ \forall k\in\mathbb{N} &\Leftrightarrow \frac{1}{4k^2-1}=\frac{2k(a+b)+a-b}{4k^2-1},\ \forall k\in\mathbb{N}\\ &\Leftrightarrow a+b=0 \text{ et } a-b=1\\ &\Leftrightarrow a=\frac{1}{2} \text{ et } b=-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. *On peut donc écrire*

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{4-1}+\frac{1}{4.2^2-1}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}\\ &= (\frac{1/2}{2-1}-\frac{1/2}{2+1})+(\frac{1/2}{4-1}-\frac{1/2}{4+1})+\cdots+(\frac{1/2}{2n-1}-\frac{1/2}{2n+1})\\ &= (\frac{1/2}{1}-\frac{1/2}{3})+(\frac{1/2}{3}-\frac{1/2}{5})+\cdots+(\frac{1/2}{2n-1}-\frac{1/2}{2n+1})\\ &= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}). \end{aligned}$$

D'où $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}.$

Solution 1.5. 1. *La suite étant arithmétique, on a*

$u_n=u_0+nr,\ \forall n\in\mathbb{N}$. *Donc* $u_5=u_0+5r=3$ *et* $u_{13}=u_0+13r=15$. *D'où*

$$u_{13}-u_5=(13-5)r=8r=12.$$

Par suite, $r = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$. Et $u_0 = u_5 - 5r = 3 - 5r = -\frac{9}{2}$.

2. D'après la formule du cours $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$, on a :
$S = u_7 + u_8 + \cdots + u_{19} = \frac{19-7+1}{2}(u_7 + u_{19})$
D'où
$$S = \frac{13}{2}[(-\frac{9}{2} + 7\frac{3}{2}) + (-\frac{9}{2} + 19\frac{3}{2})] = 195$$

Solution 1.6. Considérons la suite définie par $u_n = 3n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_n$ est arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 3$. On a
$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{3n(n+1)}{2}.$$

Solution 1.7. 1. Par définition de $(v_n)_n$ on a $v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = 1 + e^{u_n} = 1 + v_n$, donc la suite $(v_n)_n$ est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_o = e^{u_o} = 1$.

2. Par suite $v_n = v_o + nr = 1 + n$ et $u_n = \ln(v_n) = \ln(1+n)$.

Solution 1.8. 1. En remplaçant, on trouve
$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \frac{1}{4}(12 + u_n^2) - 4 = \frac{u_n^2 - 4}{4} = \frac{v_n}{4}.$$
Donc $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = 1/4$ et de premier terme $v_0 = u_0^2 - 4 = -4$.

2. $v_n = q^n v_0 = \frac{1}{4^n}(-4) = -\frac{1}{4^{n-1}}$. D'où $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{v_n + 4} = 2.$$

Solution 1.9. 1. Calculons le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$:
$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{u_n \sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^n}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sin(2\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}})}{\sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2^n})}{\sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
D'où $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = 1/2$ et de premier terme $v_2 = u_2 \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

2. On en déduit que $v_n = v_2 q^{n-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$.
Par suite $u_n = \frac{v_n}{\sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}$.
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^n}} \cdot \frac{2^n}{\pi}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{\pi}.$$

Solution 1.10. 1. En remplaçant, on écrit
$$v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{3}{4}(u_n - 2) + 6 = \frac{3}{4}u_n + \frac{9}{2} = \frac{3}{4}(u_n + 6) = \frac{3}{4}v_n.$$
Donc $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 6 = 2$.

2. On en déduit que $v_n = v_0 q^n = 2(\frac{3}{4})^n$.
Et par suite $u_n = 2(\frac{3}{4})^n - 6$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -6$.

3.
$$S_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = 2\frac{1 - (\frac{3}{4})^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = 8(1 - (\frac{3}{4})^{n+1}).$$
Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 8$.

4.
$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 - 6 + v_1 - 6 + \cdots + v_n - 6 \\ &= S_n - 6(n+1) = 8(1 - (\frac{3}{4})^{n+1}) - 6(n+1). \end{aligned}$$
D'où $\lim_{n\to+\infty} S'_n = -\infty$.

Solution 1.11. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - l$ où l est la solution de l'équation $l = \frac{1}{2}l + 1$. Alors $l = 2$ et $v_n = u_n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$. La suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -1$.

3. $v_n = v_0 q^n = -(\frac{1}{2})^n$. D'où $u_n = -(\frac{1}{2})^n + 2$.

4. $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} -(\frac{1}{2})^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(v_n + 2) = 2$.

Solution 1.12. 1. $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{e^{n+1}} - \frac{n+1}{e^n} = \frac{n(1-e) + 2 - e}{e^{n+1}} \leq 0$, car $e \geq 2 \geq 1$. Donc $(u_n)_n$ est décroissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, et
$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \\ &= \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$
Donc $(u_n)_n$ est décroissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \leq 1.$$
D'où $(u_n)_n$ est décroissante.

4.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\ &= \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}>0. \end{aligned}$$

D'où $(u_n)_n$ est croissante.

5. *Considérons la fonction*

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}. \end{aligned}$$

On a

$$f'(x)=\frac{\frac{x+3}{2\sqrt{x+2}}-\sqrt{x+2}}{(x+3)^2}=\frac{-x-1}{2\sqrt{x+2}(x+3)^2}\leq 0.$$

La fonction f est donc décroissante. D'où

$$n<n+1\Rightarrow f(n)\geq f(n+1)\Rightarrow u_n\geq u_{n+1},$$

et la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

Solution 1.13. 1. $\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{k-(k-1)}{k(k-1)}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k-1}\geq\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{k^2}.$

2. $u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$. *D'après la question 1., on a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} &\leq \frac{1}{1}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3^2} &\leq \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ &\vdots\\ \frac{1}{n^2} &\leq \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

D'où $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leq 1-\frac{1}{n}$, *et donc* $u_n\leq 1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}\leq 2.$

3. $u_{n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}\geq 0.$
La suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par 2, donc elle est convergente. Puisque $1\leq u_n\leq 2$, alors $1\leq\lim_{n\to+\infty}u_n\leq 2$.

Solution 1.14. 1. (a) *Par récurrence, on a*
$0\leq u_0<4$.
Supposons que $0\leq u_n<4$,
alors $0\leq 4\leq 3u_n+4<16$, et donc $0\leq u_{n+1}<4$.
D'où $0\leq u_n<4$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(b)

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{3u_n+4}-u_n=\frac{3u_n+4-u_n^2}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=\frac{(4-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}>0.$$

Donc $(u_n)_n$ est strictement croissante.

(c) *La suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée, donc elle converge vers un certain $l\in\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto\sqrt{3x+4}$ étant continue sur son domaine de définition, on en déduit que $l=\sqrt{3l+4}$. D'où $l^2-3l-4=0$, soit $(l-4)(l+1)=0$. Donc $l=4$ ou $l=-1$. Mais $l=\sqrt{3l+4}\geq 0$, donc $l=4$.*

2. (a)

$$4-u_{n+1}=4-\sqrt{3u_n+4}=\frac{12-3u_n}{4+\sqrt{3u_n+4}}=\frac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}}(4-u_n).$$

Or

$$u_n\geq 0\Rightarrow 4+\sqrt{3u_n+4}\geq 6\Rightarrow\frac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}}\leq\frac{1}{2}.$$

D'où $4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$.

(b) *Puisque*

$$\begin{aligned} 4-u_n &\leq \frac{1}{2}(4-u_{n-1})\\ 4-u_{n-1} &\leq \frac{1}{2}(4-u_{n-2})\\ &\vdots\\ 4-u_1 &\leq \frac{1}{2}(4-u_0) \end{aligned}$$

alors $4-u_n\leq(\frac{1}{2})^n(4-u_0)$, et donc $0\leq 4-u_n\leq(\frac{1}{2})^n$. Or $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n=0$, donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=4$.

(c) $0\leq v_n\leq\frac{n^2}{2^n}$. *Or*

$$\ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right)=2\ln(n)-n\ln(2)=n\left(2\frac{\ln(n)}{n}-\ln(2)\right).$$

Donc $\lim_{n\to+\infty}\ln(\frac{n^2}{2^n})=-\infty$. D'où $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln(\frac{n^2}{2^n})}=0$ et on conclut que $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$.

Solution 1.15. 1. $u_0\geq 0$ *et* $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}\geq 0$. *Donc $u_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.*
Supposons que $u_0\leq 2$ et montrons que $u_n\leq 2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Si $u_n\leq 2$, alors $2+\frac{1}{2}u_n^2\leq 4$,
et donc $u_{n+1}=\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}\leq\sqrt{4}\leq 2$.

D'où $u_n \leq 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Montrons que $(u_n)_n$ *est croissante. On a :*

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2} - u_n = \frac{2 - \frac{u_n^2}{2}}{\sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2} + u_n} = \frac{(2-u_n)(2+u_n)}{2(\sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2} + u_n)} \geq 0.$$

(ceci puisque $0 \leq u_n \leq 2$*).*
La suite $(u_n)_n$ *est croissante et majorée, donc elle est convergente.*
Posons $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$*, alors* $l = \sqrt{2 + \frac{1}{2}l^2}$*. D'où* $\frac{l^2}{2} = 2$*, cad* $l = \pm 2$*.*
Or $l = \sqrt{2 + \frac{1}{2}l^2} \geq 0$*, donc* $l = 2$*.*

2. *On suppose que* $u_0 > 2$*. Si* $u_n > 2$*, alors* $2 + \frac{1}{2}u_n^2 > 4$ *et donc* $u_{n+1} > 2$*. D'où* $u_n > 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$*.*
D'après la question 1., on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(2-u_n)(2+u_n)}{2(\sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2} + u_n)} < 0$*, donc* $(u_n)_n$ *est décroissante et minorée par 2, d'où elle est convergente. Posons* $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$*, alors* l *est solution de* $l = \sqrt{2 + \frac{1}{2}l^2}$*. Donc* $l = 2$*.*

Solution 1.16. *1.*

$$u_{n+1} - u_n = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) - (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc $(u_n)_n$ *est croissante.*

2.

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}) - (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{n}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. *La suite* $(u_n)_n$ *est croissante, donc soit elle converge, soit elle tend vers* $+\infty$*.*
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = l$ *et, en passant à la limite dans l'inégalité*
$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$*, on aura* $0 = l - l \geq \frac{1}{2}$*, ce qui est absurde. Donc* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*.*

Solution 1.17. *1. La suite* $(u_n)_n$ *est positive à termes non nuls et s'écrit comme produit. Il vaut mieux étudier le rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$*. En effet*

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n}}{2^2.2^{2n}} \cdot \frac{(n!)^2}{(n+1)^2(n!)^2} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} \leq 1. \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_n$ *est décroissante et puisqu'elle est minorée par 0, alors elle est convergente.*

2. *La suite* $(u_n)_n$ *s'écrit comme somme, on étudie alors la différence* $u_{n+1} - u_n$*. En effet*
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}} \geq 0$*, donc* $(u_n)_n$ *est croissante. De plus*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n \leq 1.$$

La suite $(u_n)_n$ *est majorée par 1, donc elle est convergente.*

3. *Par récurrence, on a :* $u_0 > 0$ *et si* $u_n > 0$*, alors* $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} > 0$*.*
Donc $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$*. D'où* $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$ *et la suite* $(u_n)_n$ *est croissante. Supposons que* $(u_n)_n$ *est majorée, alors elle converge vers un réel* l *qui vérifie* $l = l + \frac{1}{l}$*, ce qui est absurde. Donc* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*.*

4. *Étudions la différence* $u_{n+1} - u_n = 2 + \sqrt{u_n} - u_n = (2 - \sqrt{u_n})(1 + \sqrt{u_n})$*.*
1er cas : $\mathbf{u_0 \geq 4}$**.** *Par récurrence : si* $u_n \geq 4$*, alors* $u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n} \geq 4$*.*
Donc $u_n \geq 4,\ \forall n \in \mathbb{N}$ *et* $u_{n+1} - u_n \leq 0$*.*
La suite $(u_n)_n$ *est alors décroissante et minorée par 4, donc elle est convergente.*
Notons $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$*. Alors* $l = 2 + \sqrt{l}$ *et par suite* $(\sqrt{l} - 2)(\sqrt{l} + 1) = 0$*.*
D'où $l = 4$*.*
2ème cas : $\mathbf{u_0 < 4}$.
On montre de la même manière que $u_n \leq 4,\ \forall n \in \mathbb{N}$*, que* $(u_n)_n$ *est croissante*
et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$*.*

5. *Considérons la fonction*

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \ln(1+x). \end{array}$$

Puisque $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} > 0$*, alors* f *est croissante et on en déduit que la suite* $(u_n)_n$ *est monotone. Posons*

$$g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) - x. \end{array}$$

On a $g'(x) = \dfrac{-x}{1+x} \leq 0$*. Donc* g *est décroissante et comme* $g(0) = 0$*, alors* $g(x) \leq 0,\ \forall x \in [0,1]$*. Par suite* $\ln(1+x) \leq x,\ \forall x \in [0,1]$*. D'où* $u_1 = \ln(1+u_0) \leq u_0$ *et la suite* $(u_n)_n$ *est donc décroissante. De plus et par récurrence, on a* $u_0 \geq 0$ *et si* $u_n \geq 0$*, alors* $u_{n+1} = \ln(1+u_n) \geq 0$ *et donc* $u_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$*.*
La suite $(u_n)_n$ *est ainsi décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.*

Solution 1.18. *1.* • $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{-n}{(n+1)!} \leq 0$*,*
donc $(u_n)_n$ *est décroissante.*

- On a $v_{n+1}-v_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0$,
  donc $(v_n)_n$ est croissante.
- En plus $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(1 + \dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{n+1}) = 0$.

Par suite $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

2.
- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geq 0$,
  donc $(u_n)_n$ est croissante.
- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0$,
  donc $(v_n)_n$ est décroissante.
- En plus on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

Par suite $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

3.
- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geq 0$,
  donc $(u_n)_n$ est croissante.
- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1).(n+1)!} - \dfrac{1}{n.n!} = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0$,
  donc $(v_n)_n$ est décroissante.
- En plus on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n.n!} = 0$.

Par suite, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

4.
- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln(\dfrac{n}{n+1})$.
  Considérons la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+1} + \ln(\dfrac{x}{x+1}). \end{array}$$

$f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2} > 0$ donc f est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.
Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on déduit alors que $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [1,+\infty[$.
D'où $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} + \ln(\dfrac{n}{n+1})$.
  Considérons la fonction :

$$g : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} + \ln(\dfrac{x}{x+1}). \end{array}$$

On a $g'(x) = \dfrac{-1}{x^2(x+1)} < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. On en déduit que $g(x) \geq$ $\forall x \in [1,+\infty[$.
D'où $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et la suite $(v_n)_n$ est croissante.

- En plus on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

On conclut que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes

Solution 1.19. 1. On a

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\frac{u_n+v_n}{2} + v_n}{2} - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{w_n}{4}.$$

Donc $(w_n)_n$ est géométrique, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = (\frac{1}{4})^n w_0 = (\frac{1}{4})^n$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

2. Puisque $v_n - u_n = (\frac{1}{4})^n \geq 0$, alors $v_n \geq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geq 0,$$

donc $(u_n)_n$ est croissante. Et

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\frac{u_n+v_n}{2} + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} \leq 0,$$

donc $(v_n)_n$ est décroissante. Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{4})^n = 0$.
On conclut que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
Puisque $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, alors elles sont convergentes et convergent vers la même limite.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$s_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \frac{\frac{u_n+v_n}{2} + 2\frac{\frac{u_n+v_n}{2}+v_n}{2}}{3} = \frac{u_n + 2v_n}{3} = s_n.$$

D'où $(s_n)_n$ est uns suite constante.

(b) Notons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
On a $s_n = s_0 = \dfrac{11}{3}$, donc $\dfrac{u_n + 2v_n}{3} = \dfrac{11}{3}$.
Par passage à la limite, on obtient $\dfrac{l + 2l}{3} = \dfrac{11}{3}$, soit $l = \dfrac{11}{3}$.

Solution 1.20. 1. Par récurrence on a :
$0 < u_0 < v_0$. Supposons que $0 < u_n < v_n$.
Alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} < \dfrac{v_n + v_n}{2} = v_n$.
D'où $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} > \sqrt{u_{n+1}u_{n+1}} = u_{n+1}$.

On en déduit que $0 < u_n < v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. On a $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} > \dfrac{u_n + u_n}{2} = u_n$, d'où $(u_n)_n$ est croissante.
Et $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} < \sqrt{v_n v_n} = v_n$, d'où $(v_n)_n$ est décroissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \sqrt{u_{n+1}v_n} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}v_n - u_{n+1}^2}{\sqrt{u_{n+1}v_n} + u_{n+1}} \\ &= u_{n+1}\frac{v_n - \frac{u_n+v_n}{2}}{\sqrt{u_{n+1}v_n} + u_{n+1}} = \frac{1}{2}(v_n - u_n)\frac{u_{n+1}}{\sqrt{u_{n+1}v_n} + u_{n+1}} \\ &\leq \frac{1}{2}(v_n - u_n). \end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned} 0 < v_n - u_n &\leq \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1}) \\ 0 < v_{n-1} - u_{n-1} &\leq \frac{1}{2}(v_{n-2} - u_{n-2}) \\ &\vdots \\ 0 < v_1 - u_1 &\leq \frac{1}{2}(v_0 - u_0). \end{aligned}$$

Donc $0 \leq v_n - u_n \leq (\frac{1}{2})^n(v_0 - u_0)$. *D'où* $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ *et par suite* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *sont adjacentes.*

Solution 1.21. *Si* $a \neq 0$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+a} = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2n+1} + a} = \frac{1}{a}.$$

Donc $(u_n)_n$ *diverge (car si elle avait une limite, celle-ci serait unique).*
Si $a = 0$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = +\infty$. *Donc* $\forall a \in \mathbb{R}$, *la suite* $(u_n)_n$ *diverge.*

Solution 1.22. *Posons* $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = l_1$, $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l_2$ *et* $\lim_{n\to+\infty} u_{3n} = l_3$ *et considérons les deux suites* $(u_{6n})_n$ *et* $(u_{6n+3})_n$.
La suite $(u_{6n})_n$ *est une suite extraite de* $(u_{2n})_n$:
u_{6n} : $u_o, u_6, u_{12}, \cdots$ *et* u_{2n} : $u_o, u_2, u_4, u_6, \cdots, \cdots$
et aussi extraite de la suite $(u_{3n})_n$:
u_{6n} : $u_o, u_6, u_{12}, \cdots$ *et* u_{3n} : $u_o, u_3, u_6, u_{12}, \cdots, \cdots$
donc $\lim_{n\to+\infty} u_{6n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{3n}$. *D'où* $l_1 = l_3$.
De même, la suite $(u_{6n+3})_n$ *est extraite de* $(u_{3n})_n$ *et de* $(u_{2n+1})_n$,
donc $\lim_{n\to+\infty} u_{6n+3} = \lim_{n\to+\infty} u_{3n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$. *D'où* $l_2 = l_3$.
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ *et on conclut que la suite* $(u_n)_n$ *est convergente.*

1.4 Exercices supplémentaires

Exercice 1.23. *Calculer les limites des suites suivantes :*

1. $u_n = \dfrac{5n+3}{2n^2+n+1}$ 2. $u_n = \dfrac{\sin(n^n+\pi)}{n^2+3}$ 3. $u_n = \dfrac{n^2+\cos n}{2n^2+\sin n}$
4. $u_n = 5^n - 4^n$ 5. $u_n = \dfrac{2^{n+2}-3^n}{2^n+4.3^n}$ 6. $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$
7. $u_n = (\frac{1}{3}\sin n)^n$ 8. $u_n = \dfrac{\cos n}{\mathrm{E}(\frac{n}{4})}$ 9. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$

Exercice 1.24. *Déterminer les limites des suites suivantes :*

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^4+k}}$ 2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2+k}}$ 3. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \cos(\frac{1}{\sqrt{n+k}})$
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ 5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$

Exercice 1.25. 1. *Vérifier que* $(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^n \geq 1+\sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. *Qu'en déduit-on ?*

Exercice 1.26. *On pose* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. *Vérifier que* $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$.
2. *En déduire que* $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$.
3. *Vérifier que* $\sqrt{n+1} - 1 \leq u_n$ *pour tout* n.
4. *Donner* $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 1.27. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite arithmétique telle que* $u_5 = 4$ *et* $u_7 = 9$. *Calculer le premier terme et la raison de cette suite.*

Exercice 1.28. *Soit la suite* $(u_n)_n$ *définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+3u_n}$. *On pose* $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que* $(v_n)_n$ *est une suite arithmétique.*
2. *En déduire une expression de* u_n *en fonction de* n.

Exercice 1.29. *Soit* $(u_n)_n$ *la suite définie par* $u_{n+1} = \sqrt[p]{u_n}$ *où* $p \in \mathbb{N}^*$. *Posons* $v_n = \ln(u_n)$.

1. *Vérifier que* $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{p}$.
2. *En déduire le terme général de* $(u_n)_n$.

Exercice 1.30. *On considère la suite* $(u_n)_n$ *définie par* $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{4}$ *et* $u_0 = 1$.

1. *Définir la suite auxiliaire $(v_n)_n$ associée à $(u_n)_n$.*
2. *Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.*
3. *Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.*
4. *En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*

Exercice 1.31. *Étudier la monotonie des suites suivantes :*

1. $u_n = 2n + (-1)^n$ 2. $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$ 3. $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n}(1 - \dfrac{1}{2k+1})$, $n \in \mathbb{N}^*$
4. $u_n = n + \dfrac{1}{e^n}$

Exercice 1.32. *On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.*

1. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.*
2. *Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante. Que peut-on déduire ?*
3. (a) *Montrer que $u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n - 2}{\sqrt{u_n+2}+2}$.*
   (b) *En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$, puis que, $|u_n - 2| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.*
   (c) *Que peut-on déduire ?*

Exercice 1.33. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Montrer que si $(u_n)_n$ converge, alors sa limite est égale à 3.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 3$.*
   (a) *Montrer que pour tout entier n, $|v_{n+1}| \leq \dfrac{1}{3}|v_n|$.*
   (b) *En déduire que pour tout entier n, $|v_n| \leq 2(\dfrac{1}{3})^n$.*
3. *Déduire de la question précédente que la suite $(u_n)_n$ converge vers 3.*

Exercice 1.34. *Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.*

1. *Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{n}{\sqrt{2n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*
2. *En déduire la limite de $(u_n)_n$.*

Exercice 1.35. *Dans chacun des cas suivant, montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par le réel M, puis déterminer sa limite :*

1. $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$, $u_0 = 0$, $M = 3$ 2. $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 3}{u_n}$, $u_0 = 2$, $M = 3$
3. $u_{n+1} = \dfrac{2n + u_n}{n + u_n}$, $u_0 = 1$, $M = 2$

Exercice 1.36. *Dans chacun des cas suivant, montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par le réel m, puis déterminer sa limite :*

1. $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+2}$, $u_0 = 1$, $m = 0$ 2. $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 3}{2(u_n+1)}$, $u_0 > 1$, $m = 1$
3. $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{1}{u_n})$, $u_0 > 1$, $m = 1$

Exercice 1.37. *On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = 2, \quad v_0 = 1, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

1. *On pose $w_n = v_n - u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(w_n)_n$ est géométrique et déterminer sa limite.*
2. *Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.*
3. *En posant $t_n = 3u_n + 8v_n$, déduire la limite commune de (u_n) et (v_n).*

Exercice 1.38. *Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par :*

$$\begin{cases} u_0 = a, \quad v_0 = b, \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que $\forall n \geq 0$, $0 < u_n < v_n$.*
2. *Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et la suite $(v_n)_n$ est décroissante.*
3. *Démontrer que $\forall n \geq 0$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.*
4. *Déduire que les deux suites convergent vers la même limite.*
5. *On note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*
   (a) *Montrer que la suite $(u_n v_n)_n$ est constante et expliciter la constante.*
   (b) *En déduire la valeur de l.*

1.5 Indications sur les exercices supplémentaires

Solution 1.23. *1. En faisant une simplification par n ? vérifier que*
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5n+3}{2n^2+n+1}=0,$$

2. *Utiliser la majoration* $0\leq|u_n|=\dfrac{|\sin(n^n+\pi)|}{n^2+3}\leq\dfrac{1}{n^2+3}$, *montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

3. *Simplifier par n^2 pour écrire*
$$\frac{n^2+\cos n}{2n^2+\sin n}=\frac{1+\frac{\cos n}{n^2}}{2+\frac{\sin n}{n^2}},$$
utiliser les majorations $0\leq|\dfrac{\cos n}{n^2}|\leq\dfrac{1}{n^2}$, *et* $0\leq|\dfrac{\sin n}{n^2}|\leq\dfrac{1}{n^2}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$,
pour déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+\cos n}{2n^2+\sin n}=\dfrac{1}{2}$.

4. *Écrire que* $5^n-4^n=5^n(1-(\frac{4}{5})^n)$ *puis déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}5^n-4^n$ *sachant que* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{4}{5})^n=0$.

5. *Simplifier par 3^n pour écrire que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{n+2}-3^n}{2^n+4.3^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4(\frac{2}{3})^n-1}{(\frac{2}{3})^n+4}$.

6. *Simplifier par n pour écrire* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{n+\frac{1}{n}}$ *puis déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$.

7. *Vérifier que* $0\leq|u_n|<\dfrac{1}{3^n}$.

8. *Passer par* $|\cos n|\leq 1$ *et* $\mathrm{E}(\frac{n}{4})>\frac{n}{4}-1$, *pour avoir* $0\leq|u_n|<\dfrac{1}{\frac{n}{4}-1}$.

9. *Écrire que* $n^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$. *Sachant que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0$, *donner* $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n}}$.

Solution 1.24. *1. Vérifier les implications :*
$$1\leq k\leq n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^4+k}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$$
$$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^4+k}}\leq\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$$
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}}$, *puis déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

2. *Comme précédemment vérifier que :*
$$k\leq n\Longrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^2+k}}\geq\frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}}.$$
En déduire ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3. *Vérifier que :*
$$1\leq k\leq 2n \Rightarrow 0\leq\frac{1}{\sqrt{3n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n+k}}\leq\frac{1}{\sqrt{n+1}}\leq 1$$
Passer par la décroissance de la fonction cosinus sur $[0,1]$
Faire la somme de 1 à $2n$ pour déduire que
$2n\cos(\frac{1}{\sqrt{n+1}})\leq\sum_{k=1}^{2n}\cos(\frac{1}{\sqrt{n+k}})\leq 2n\cos(\frac{1}{\sqrt{3n}})$
Donner ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4. *Vérifier que*
$$1\leq k\leq n \Rightarrow \frac{n}{2n^2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}\leq\frac{n}{n^2+1}.$$
Puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n^2+k^2}$.

5. *Vérifier que :*
$$0\leq k\leq n \Rightarrow \frac{1}{n+\sqrt{n}}\leq\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leq\frac{1}{n}$$
Passer à la somme de 0 à n (($n+1$)- termes).
Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$, *donner* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Solution 1.25. *1. Soit $a\geq 0$. Vérifier d'abord par récurrence que* $(1+a)^n\geq 1+na$.
Choisir le a convenable pour avoir le résultat cherché.

2. *Déduire ensuite* $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})^n$.

Solution 1.26. *1. Faire le produit* $(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$.

2. *Vérifier que* $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\leq\frac{1}{\sqrt{k}}$.

3. *Passer à la somme de $k=1$ à $k=n$ pour avoir*
$$u_n\geq\sqrt{n+1}-1.$$

4. *Puis donner* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Solution 1.27. *Sachant que* $u_n=u_o+nr$, $\forall n\in\mathbb{N}$, *écrire les deux équations obtenues pour u_5 et u_7 et en déduire r et u_o.*

Solution 1.28. *1. Vérifier que $v_{n+1}-v_n$ est une constante indépendante de n et donc $(v_n)_n$ est une suite arithmétique.*
En déduire v_n en fonction de n.

2. *Donner ensuite u_n en fonction de n.*

Solution 1.29. *1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.*

2. *En déduire que $(v_n)_n$ est une suite géométrique et donner son terme général, puis celui de $(u_n)_n$.*

Solution 1.30. 1. *Poser $v_n = u_n - l$ et vérifier que $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}l)$. Choisir l tel que $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.*

2. *Déduire que la suite $(v_n)_n$ est géométrique.*
3. *Exprimer v_n, puis u_n.*
4. *En déduire $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n$.*

Solution 1.31. 1. *Vérifier que $u_{n+1} - u_n \geq 0$.*

2. *Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n2^n}{(n+2)(n+1)} \geq 0$ (ou que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$).*
3. *Remarquer que $(1 - \frac{1}{2k+1}) = \frac{2k}{2k+1}$.*
   Vérifier que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{2n+3}$ et déduire que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.
4. *Calculer $u_{n+1} - u_n$ et voir son signe.*

Solution 1.32. 1. *Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 2$.*

2. *Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{u_n+2}+u_n}$. et utiliser la question précédente pour déduire la monotonie de u_n et sa convergence.*
3. (a) *Écrire que $u_{n+1} - 2 = \sqrt{u_n+2} - 2$ et multiplier par l'expression conjugué $\sqrt{u_n+2}+2$.*
   (b) *En utilisant $\sqrt{u_n+2}+2 \geq 2$, vérifier que $|u_{n+1}-2| \leq \frac{|u_n-2|}{2}$ et que par récurrence $|u_n - 2| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.*
   (c) *Passer à la limite sur n pour déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.*

Solution 1.33. 1. *Remarquer que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$. En passant à la limite sur n des deux cotés en déduire que $l = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{12-u_n} = \sqrt{12-l}$. Déduire l sachant que $l \geq 0$.*

2. (a) *Écrire que $|v_{n+1}| = |\sqrt{12-u_n} - 3|$ et multiplier par l'expression conjugué $\sqrt{12-u_n}+3$.*
   Majorer $\frac{|3-u_n|}{\sqrt{12-u_n}+3}$ par $\frac{|v_n|}{3}$.
   (b) *Vérifier par récurrence que $|v_n| \leq 2(\frac{1}{3})^n$.*
3. *En déduire $\lim_{n\to+\infty} |v_n|$ et ensuite $\lim_{n\to+\infty} u_n$.*

Solution 1.34. 1. *Calculer $u_{2n} - u_n$ et passer par l'inégalité $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}$ pour tout k tel que $n+1 \leq k \leq 2n$.*
Déduire en passant à la somme que $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{n}{\sqrt{2n}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$.

2. *En supposant que $(u_n)_n$ converge vers une limite finie l déduire une absurdité en passant à la limite sur l'inégalité $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$.*
   En vérifiant que la suite $(u_n)_n$ est croissante déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Solution 1.35. 1. • *Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
• *Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(3-u_n)(2+u_n)}{\sqrt{6+u_n}+u_n}$. et que la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée.*
• *Poser $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et donner l'équation vérifiée par l, puis calculer l.*

2. • *Montrer que $2 \leq u_n \leq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
   • *Vérifier que $u_{n+1} - u_n \geq 0$.*
   • *Déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente et calculer $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$.*
3. • *Montrer que $1 \leq u_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
   • *Vérifier que $0 < 2 - u_{n+1} \leq \dfrac{3}{n}$ et déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.*

Solution 1.36. 1. • *Vérifier que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
• *Montrer que $u_{n+1} - u_n < 0$ et en déduire que $(u_n)_n$ est convergente.*
• *Poser $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et résoudre l'équation vérifiée par l.*

2. • *Vérifier que $u_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
   • *Montrer que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et en déduire que $(u_n)_n$ est convergente.*
   • *Poser $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et résoudre l'équation vérifiée par l.*
3. • *Vérifier que $u_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
   • *Montrer que $u_{n+1} - u_n < 0$ et déduire que $(u_n)_n$ est convergente.*
   • *Poser $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et résoudre l'équation vérifiée par l.*

Solution 1.37. 1. *Exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et v_n, puis en fonction de w_n. Donner w_n en fonction de sa raison et trouver $\lim_{n\to+\infty} w_n$.*

2. *En utilisant le signe de w_n, donner celui de $u_{n+1} - u_n$ et de $v_{n+1} - v_n$, puis conclure.*
3. *Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n pour voir que $(t_n)_n$ est constante. Poser $l = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$ et utiliser la limite de $(t_n)_n$ pour déterminer l.*

Solution 1.38. 1. *Montrer par récurrence que $0 < u_n < v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

2. *En utilisant le résultat précédent vérifier que $u_{n+1} - u_n > 0$ et que $v_{n+1} - v_n < 0$ (utiliser $v_n - u_n > 0$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$).*
3. *Exprimer $v_{n+1} - u_{n+1}$ en fonction $v_n - u_n$ puis majorer sachant que $v_n - u_n < v_n + u_n$.*
4. *Montrer que $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$ et en déduire que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont donc adjacentes.*
5. (a) *Montrer que $u_n v_n = u_o v_o = ab$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
   (b) *Poser $l = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$ et utiliser la limite de $(t_n)_n = (u_n v_n)_n$ pour déterminer l.*

Chapitre 2

Limite, continuité d'une fonction sur $\mathbb{R}$

2.1 Rappels de cours

Dans tout ce résumé :
f est une fonction réelle de variable réelle définie sur un intervalle I (I peut avoir des bornes infinies), et soit a un élément de I ou une extrémité de I.

Limite en un point

<u>Définition</u> 2.1. *:*
1) f admet $b \in \mathbb{R}$ pour limite en $a \notin \{-\infty, +\infty\}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ \forall x \in I, \ (0 < |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

2) On se place dans le cas où I a $+\infty$ ou $-\infty$ pour extrémité.
a- f admet $b \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \ \forall x \in I, (x > A \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon) \quad (en\ +\infty).$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \ \forall x \in I, (x < A \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon) \quad (en\ -\infty).$$

b- f admet $+\infty$ pour limite en a lorsque

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, (0 < |x - a| < \alpha \Longrightarrow f(x) > B) \quad (a \in \mathbb{R}).$$
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, (x > A \Longrightarrow f(x) > B) \quad (a\ est\ +\infty).$$
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, (x < A \Longrightarrow f(x) > B) \quad (a\ est\ -\infty).$$

c- f admet $-\infty$ pour limite en a lorsque

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, (0 < |x - a| < \alpha \Longrightarrow f(x) < B) \quad (a \in \mathbb{R}).$$
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, (x > A \Longrightarrow f(x) < B) \quad (a\ est\ +\infty).$$
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, (x < A \Longrightarrow f(x) < B) \quad (a\ est\ -\infty).$$

Propriétés 4. *et notation :*

- *Si f admet une limite réelle en a, alors f est bornée au voisinage de a.*
- *Si f admet b et b' pour limites réelles en a (a réel, $+\infty$ ou $-\infty$), alors $b = b'$ (la limite lorsqu'elle existe est unique).*
- *Lorsque f admet une limite b en a on écrit $b = \lim_a f$ ou $b = \lim_{x\to a} f(x)$.*

Continuité

Définition 2.2. *On dit que f est continue en a si $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.*

C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \ \forall x \in I,\ (|x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Caractérisation à l'aide des suites

Propriétés 5. *f admet b pour limite en a (réel, $+\infty$ ou $-\infty$) si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de $I - \{a\}$,*

on a l'implication $\left(\lim_{n\to+\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b\right)$.

Corollaire 2.1. *Si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de I admettant une limite $l \in I$ et si f est continue en l, alors la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(l)$.*

Remarque 2.1. *Pour montrer que f n'a pas de limite (ou non continue) en a, il suffit de donner l'exemple de deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ vérifiant $\forall n\ x_n \neq a$ et $y_n \neq a$ et telles que*

$\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = a$ mais $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$ (ou $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(a)$ pour la non continuité).

Limite ou continuité à gauche ou à droite

Définition 2.3. *Pour $a \in \mathbb{R}$, on dit que f admet b (fini ou infini) comme limite à droite en a lorsque*

$$\begin{array}{lll}
\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, & \forall x \in I,\ (0 < x - a < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon) & b \in \mathbb{R}. \\
\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0, & \forall x \in I, (0 < x - a < \alpha \Longrightarrow f(x) > B) & (b \text{ est } +\infty). \\
\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0, & \forall x \in I, (0 < x - a < \alpha \Longrightarrow f(x) < B) & (b \text{ est } -\infty).
\end{array}$$

On définit de même la limite à gauche en remplaçant partout l'inégalité $0 < x - a < \alpha$ par l'inégalité $0 < a - x < \alpha$.
f est dite continue à droite (resp. à gauche) lorsque la limite à droite (resp. à gauche) est égale à $f(a)$.

Propriétés 6. *et notations :*

- *Lorsqu'elle existe, la limite à droite (resp. à gauche) de f en a est notée $\lim_{a^+} f$ ou $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $f(a^+)$ (resp. $\lim_{a^-} f$ ou $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ ou $f(a^-)$).*
- *f a pour limite b en a si et seulement si les limites à droite et à gauche en a sont égales à b.*
- *f est continue en a si et seulement si les limites à droite et à gauche en a sont égales à $f(a)$.*

Tableau résumant les résultats sur les limites infinies :

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$	$\lim(fg)$	$\lim \frac{1}{g}$	$\lim \frac{f}{g}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	?
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	0	?
$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	0	?
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	0	0
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	?	?	?

Propriétés 7. :
Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_o \in [a, b]$ et soient f, g, h et u des fonctions définies sur $I - \{x_o\} = \check{I}$:

- $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in \check{I},\ \ |f(x) - l| \leq u(x) \\ \text{et } \lim_{x\to x_o} u(x) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{x\to x_o} f(x) = l$
- *Si $\lim_{x\to x_o} f(x) = l \neq 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*
  $\forall x \in I$ et $0 < |x - x_o| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) \times l > 0$
  ($f(x)$ et l ont même signe).
- $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in \check{I},\ \ f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x\to x_o} f(x) = l \text{ et } \lim_{x\to x_o} g(x) = k \end{array}\right. \Longrightarrow l \leq k$
- $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in \check{I}\ \ h(x) \leq f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x\to x_o} h(x) = \lim_{x\to x_o} g(x) = l \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{x\to x_o} f(x) = l$

  Ces propriétés restent vraies même si x_o est infini ($a = -\infty$ ou $b = +\infty$). Et s'appliquent aussi dans le cas de limite à droite ou de limite à gauche.
- *Si f est continue sur I et g continue sur J avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.*

L'image d'un intervalle par une fonction continue

Proposition 2.1. :
Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [m, M]$ avec $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.
En particulier :

Si f est continue et croissante alors $m = f(a)$, $M = f(b)$ et $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.
Si f est continue et décroissante alors $m = f(b)$, $M = f(a)$ et $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.

Théorème 2.1. :
Si f est continue sur l'intervalle $[a,b]$ et β un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \beta$.
Autrement dit :
Si f est continue sur l'intervalle $[a,b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $c \in]a,b[$.

2.2 Énoncés des exercices

Exercice 2.1. :
1) Préciser quelles sont les applications f définies sur $\mathbb{R}$ telles que
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.
(Déterminer d'abord $f(0)$ et $f(1)$)
2) Préciser quelles sont les applications g définies sur $\mathbb{R}$ telles que
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad g(x+y) - g(x-y) = 4xy$.
(Remarquer que $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$, puis transformer l'égalité donnée.)

Exercice 2.2. :
Trouver toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

Exercice 2.3. :
1) On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction f par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
En utilisant la définition, montrer que f n'admet pas de limite en 0.
2) Soit $a \in [-1,1]$. Trouver une suite $(x_n)_n$ de $\mathbb{R}^*$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = a$.

Exercice 2.4. :
Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de période $T > 0$.
Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors f est constante.
En déduire que la fonction $g(x) = \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 2.5. :
Déterminer la limite de la fonction f en x_o dans les cas suivants :

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{2x+2}-2}$ et $x_o = 1$.
2. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt{4+x^2}-2}$ et $x_o = 0$.
3. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} - \sqrt{\frac{1}{x^2}}$ et $x_o = 0$.
4. $f(x) = \frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{5x+1}}$ et $x_o = 0$.

Exercice 2.6. :
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}; \quad \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \cos^2 \frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$$

où a et b sont deux réels tel que $a > 0$.

Exercice 2.7. :
1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{u \to -\infty} uE(u) \quad et \quad \lim_{u \to +\infty} uE(u)$$

($E(u)$ étant la partie entière du réel u).
2) En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{E(\frac{1}{x})+x}{E(\frac{1}{x})-x} \quad et \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{E(\frac{1}{x})+x}{E(\frac{1}{x})-x}$$

Exercice 2.8. :
On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=\frac{\tan x\sqrt{\tan x}-\sin x\sqrt{\sin x}}{x^3\sqrt{x}}$$

Soit $D=]0,\frac{\pi}{2}[$.
1) Montrer que pour tout $x\in D$ on a
$f(x)=\left(\frac{\tan x}{x}+\sqrt{\frac{\tan x\sin x}{x^2}}+\frac{\sin x}{x}\right)\times\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}+1)}$.
2) En déduire $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

Exercice 2.9. :
On considère la fonction définie par

$$f(x)=\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}, \quad (n\in\mathbb{N}^*)$$

1) Déterminer la limite $\lim_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x-1}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.
2) En déduire $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Exercice 2.10. :
On considère la fonction définie par

$$f(x)=\frac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)\cdots(1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x}, \quad (n\in\mathbb{N}^*)$$

1) Montrer que $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^k t}{1-\cos^2 t}=\frac{k}{2}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.
2) En déduire $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\frac{n!}{2^n}$.

Exercice 2.11. :
On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{1-x} & si\ x\neq 0\ et\ x\neq 1\\ f(0)=f(1)=0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f.

Exercice 2.12. :
On considère la fonction f définie sur $I=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\sin x+\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x} & si\ x\neq 0\\ f(0)=\sqrt{2} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur I.

Exercice 2.13. :
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe l et l' deux réels tels que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l \quad et \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=l'.$$

Montrer que la fonction f est bornée.

Exercice 2.14. :
Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ f(x)+f(y)=f(x+y)$.
En déduire ensuite les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ g(x+y)=g(x)+g(y)+xy$ *(remarquer que* $xy=\dfrac{(x+y)^2-x^2-y^2}{2}$*).*

Exercice 2.15. :
Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et positive, telle que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}<1$$

Montrer que : $\exists x_o\in[0,+\infty[\ /\ f(x_o)=x_o$.
Quel résultat on obtient si on a l'hypothèse $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}<\alpha$ avec $\alpha>0$?

Exercice 2.16. :
On considère les deux fonctions numériques

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, \quad x\to\begin{cases}1 & si\ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases} \qquad g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, \quad x\to\begin{cases}x\sin^2\frac{1}{x} & si\ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$$

1) Étudier la limite de f en 0.
2) Étudier la continuité de g en 0.
3) La fonction $f\circ g$ a-t-elle une limite en 0 ?

Exercice 2.17. :
Dans chacun des cas suivants, étudier si la fonction donnée est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$:
1) $f(x) = \dfrac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|}$.
2) $g(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$.
3) $h(x) = \sin(x+1)\ln|1+x|$.

Exercice 2.18. :
On considère la fonction $f(x) = -x^3 + 2x + 1$ *définie sur l'intervalle* $I = [1,2]$.
1) *Étudier le signe de* $f(x) - f(y)$ *pour* $x \neq y$ *deux réels de* I, *puis en déduire la monotonie de* f .
2) *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une solution unique dans* I.

Exercice 2.19. :
On considère la fonction $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$.
1) *Calculer* $f(-1)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(0)$ *et* $f(1)$.
2) *En déduire que l'équation* $f(x) = 0$ *admet au moins trois solutions dans l'intervalle* $[-1,1]$.
3) *Exprimer* $\cos 3\alpha$ *en fonction de* $\cos\alpha$.
4) *En posant* $a = \cos\alpha$, *déduire les trois solutions de l'équation* $f(x) = 0$.

Exercice 2.20. :
Montrer que l'équation :

$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{(1+x)^2} = 0$$

a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.21. :
Soient a *et* b *deux réels non nuls de même signe* ($ab > 0$) *et* f *une fonction définie et continue de* $[a,b]$ *dans* $[a,b]$.
Montrer que : $\exists x_o \in [a,b] \;/\; x_o f(x_o) = ab$.

Exercice 2.22. :
Soient f *et* g *deux fonctions continues sur l'intervalle* $[a,b]$ *et telles que :*

$$\forall x \in [a,b] \quad g(x) < f(x).$$

Montrer que : $(\exists m \in \mathbb{R}_+^*)$, $(\forall x \in [a,b])$, $f(x) \geq g(x) + m$.

Exercice 2.23. :
Soit f *une fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *pour laquelle*
$\exists k \in \mathbb{R}$: $\forall x \in I$, $f^2(x) = k$.
1) *Montrer que* f *est une fonction constante sur* I.
2) *Est-ce que cette propriété reste vraie si* I *n'est pas un intervalle ou si* f *n'est pas continue ?*

Exercice 2.24. :
Soit f *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *telle que :*
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ *avec* $ab < 0$.
1) *Montrer que :* $(\exists (x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2) \;/\; f(x_o)f(y_o) < 0$.
2) *En déduire que l'équation* $f(x) = 0$ *admet au moins une solution dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 2.25. :
Soient f *et* g *deux fonctions continues sur l'intervalle* $[0,1]$ *et telles que*

$$(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) < 0.$$

Montrer que : $(\exists x_o \in [0,1]) \;/\; f(x_o) = g(x_o)$.

Exercice 2.26. :
Soit f *une fonction définie et continue de* $[0,1]$ *dans* $[0,1]$.
Montrer qu'il existe $x_o \in [0,1]$ *tel que* $f(x_o) = x_o$.

Exercice 2.27. :
On considère f *une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle* $[0,1]$.
Montrer que :
$(\exists c \in]0,1[) \;/\; f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$.

Exercice 2.28. :
Soit f *une fonction continue sur un segment* $[a,b]$ *et* c, d *deux réels fixés de l'intervalle* $[a,b]$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ *tel que* $f(\alpha) = \dfrac{f(c)+f(d)}{2}$.

2.3 Solutions détaillées des exercices

Solution 2.1. :

1) Étant donné que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$,
prenons $x = y = 0$ *on obtient :*
$f(0)f(0) - f(0) = f(0)[f(0) - 1] = 0$ *et donc* $f(0) = 0$ *ou* $f(0) = 1$ *(1).*
Ensuite avec $x = 1$ *et* $y = 0$ *on obtient :*
$f(1)f(0) - f(0) = f(0)[f(1) - 1] = 1$ *(2).*
Ce qui implique que $f(0) \neq 0$ *d'après (2) et que* $f(0) = 1$ *d'après (1).*
D'où : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x)f(0) - f(0.x) = f(x) - 1 = x + 0$
càd, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.
Inversement :
la fonction $f(x) = x + 1$ *vérifie la propriété*
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - (xy+1) = x + y.$
Finalement, la fonction $f(x) = x+1$ *est l'unique solution vérifiant la condition posée.*
2) En utilisant la remarque, on aura
$g(x+y) - g(x-y) = 4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$
ce qui donne $g(x+y) - (x+y)^2 = g(x-y) - (x-y)^2$.

Pour u et v quelconques, on pose $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ *ce qui équivaut à* $\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$

On aura $g(u) - u^2 = g(v) - v^2$ *ceci pour u et v quelconques.*
Par suite l'application $f(u) = g(u) - u^2$ *est constante* $g(u) - u^2 = c$ *avec* $c \in \mathbb{R}$.
D'où $\exists c \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall u \in \mathbb{R}$, $g(u) = u^2 + c$.
Inversement :
les fonctions de la forme $g(x) = x^2 + c$, *avec* $c \in \mathbb{R}$ *constante, vérifient bien*
$g(x+y) - g(x-y) = \left[(x+y)^2 + c\right] - \left[(x-y)^2 + c\right] = 4xy, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$
Finalement, une fonction g vérifie la condition demandée si et seulement si elle est de la forme $g(x) = x^2 + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ *(où c est une constante dans* $\mathbb{R}$*).*

Solution 2.2. :

Soient u et v non nuls quelconques tels que $u > v$.
On aura $|f(u) - f(v)| = |u - v| = u - v$ (1).
Avec $x = u$ *et* $y = 0$ *dans l'égalité de l'hypothèse, on a* $|f(u) - f(0)| = |u|$
et avec $x = v$ *et* $y = 0$ *dans l'égalité de l'hypothèse on a aussi* $|f(v) - f(0)| = |v|$.
1^{er} *cas :*
$\begin{cases} f(u) - f(0) = u \\ f(v) - f(0) = -v \end{cases}$
ce qui donne par différence $|f(u) - f(v)| = |u + v|$ (2).
Il s'en suit d'après (1) *et* (2) *que* $|u + v| = u - v$.
Ce qui implique que $u + v = u - v$ *ou* $-u - v = u - v$
et donc $v = 0$ *ou* $u = 0$. *Absurde avec le fait que u et v non nuls.*
$2^{ème}$ *cas :*
$\begin{cases} f(u) - f(0) = -u \\ f(v) - f(0) = v \end{cases}$
On arrive à la même absurdité.
Il nous reste
$f(u) - f(0) = u$ *et* $f(v) - f(0) = v$
et donc $f(u) = u + f(0)$ *et* $f(v) = v + f(0)$

ou bien
$f(u) - f(0) = -u$ *et* $f(v) - f(0) = -v$
et donc $f(u) = -u + f(0)$ *et* $f(v) = -v + f(0)$
Par suite, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ f(x) = x + c$, *ou bien* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ f(x) = -x + d$ *(où c et d sont des constantes dans* $\mathbb{R}$*).*
Inversement :
une fonction de la forme $f(x) = x + c$ *vérifie*
$|f(x) - f(y)| = |(x + c) - (y + c)| = |x - y|$
et une fonction de la forme $f(x) = -x + d$ *vérifie*
$|f(x) - f(y)| = |(-x + d) - (-y + d)| = |-x + y| = |x - y|$.
Finalement les fonctions vérifiant la condition donnée sont celles de la forme $g(x) = x + c$ *et celles du type* $h(x) = -x + d$ *(c et d des constantes quelconques).*

Solution 2.3. :

1) Raisonnons par l'absurde :
supposons qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ *tel que* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \sin(\frac{1}{x}) = l$.

On aura donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, : \forall x, \ |x - 0| < \eta \Rightarrow |\sin(\frac{1}{x}) - l| < \varepsilon$.
Prenons $\varepsilon_o = \frac{1}{2}$. *Pour* $\eta > 0$ *quelconque, posons* $x_\eta = \frac{1}{2k\pi}$ *et* $y_\eta = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ *où k est un entier naturel tel que* $\frac{1}{2\eta\pi} < k$ *(c'est possible avec* $k = E(\frac{1}{2\eta\pi}) + 1$*).*
$0 < |x_\eta - 0| = \frac{1}{2k\pi} < \eta$ *et* $\quad |y_\eta - 0| = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} < \frac{1}{2k\pi} < \eta$.
On aura donc $|\sin(\frac{1}{x_\eta}) - l| < \varepsilon = \frac{1}{2}$ *et* $|\sin(\frac{1}{y_\eta}) - l| < \varepsilon = \frac{1}{2}$.
Comme $\sin(\frac{1}{x_\eta}) = \sin(2k\pi) = 0$ *et* $\sin(\frac{1}{y_\eta}) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$, *on obtient* $|l| < \frac{1}{2}$ *et* $|1 - l| < \frac{1}{2}$,
et donc $1 = |l + (1 - l)| \leq |l| + |1 - l| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
ce qui est impossible (on ne peut avoir $1 < 1$*). On arrive donc à une absurdité.*
Ou on peut traduire $|l| < \frac{1}{2}$ *et* $|1 - l| < \frac{1}{2}$ *par* $l \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ *et* $(l - 1) \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. *Ce qui donnerait* $l \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ *et* $l \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. *Ce qui est impossible !.*
Ainsi la fonction $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ *n'admet pas de limite en* 0.

2) Soit $a \in [-1, 1]$. *Puisque la fonction* $\sin(x)$ *est une bijection de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *dans* $[-1, 1]$, *il existe* $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *tel que* $\sin(\theta) = a$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad$ *posons* $x_n = \frac{1}{\theta + 2n\pi}$. *On a* $x_n \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$,
et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sin(\frac{1}{x_n}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sin(\theta + 2n\pi) = \sin(\theta) = a$
Ce qui confirme que $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ *n'a pas de limite en* 0. *Car si la limite existe, elle serait unique et non pas égale à chaque* $a \in [-1, 1]$.

Solution 2.4. :

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *périodique de période* $T > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. *Pour chaque* $n \in \mathbb{N}$, *posons* $u_n = x + nT$. *On a* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ *on a d'après les propriétés des limites* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = l$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = f(x)$ *(f étant périodique).*
D'où $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = l$.
Ainsi f est constante.
On sait que la fonction $g(x) = \sin x$ *est périodique et n'est pas constante. Donc elle*

ne peut admettre une limite en $+\infty$ (sinon elle serait constante !).

Solution 2.5. :

Si on passe aux calculs de ces limites directement on a des formes indéterminées. On essaie donc d'enlever ces indéterminations suivant les cas.

1. *En multipliant par les expressions conjuguées, on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)(\sqrt{2x+2}+2)}{(\sqrt{2x+2}-2)(\sqrt{x+8}+3)(\sqrt{2x+2}+2)} \\ &= \frac{((x+8)-9)(\sqrt{2x+2}+2)}{((2x+2)-4)(\sqrt{x+8}+3)} \\ &= \frac{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)}{2(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} \\ &= \frac{(\sqrt{2x+2}+2)}{2(\sqrt{x+8}+3)} \quad \text{pour } x \neq 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\neq 1}} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{2x+2}+2)}{2(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{(\sqrt{2+2}+2)}{2(\sqrt{1+8}+3)} = \frac{1}{3}.$$

2. *Remarquons que pour z et a réels, on a*
$z^3 - a^3 = (z-a)(z^2+az+a^2)$ *et donc* $x = (\sqrt[3]{x+8}^3 - 2^3)$
puis $x = (\sqrt[3]{x+8}-2)(\sqrt[3]{x+8}^2 + 2\sqrt[3]{x+8}+4)$ *(avec* $z = \sqrt[3]{x+8}$ *et* $a = 2$*)*
ce qui donne $\sqrt[3]{x+8} - 2 = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+8}^2 + 2\sqrt[3]{x+8}+4}$
et l'on a $z^2 - a^2 = (z-a)(z+a)$ *et donc* $x^2 = \sqrt{4+x^2}^2 - 2^2$
puis $x^2 = (\sqrt{4+x^2}-2)(\sqrt{4+x^2}+2)$ *(avec* $z = \sqrt{4+x^2}$ *et* $a=2$*)*
ce qui donne $(\sqrt{4+x^2}-2) = \dfrac{x^2}{(\sqrt{4+x^2}+2)}$
Par suite, pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt{4+x^2}-2} &= \frac{x}{(\sqrt[3]{x+8}^2+2\sqrt[3]{x+8}+4)} \times \frac{(\sqrt{4+x^2}+2)}{x^2} \\ &= \frac{\sqrt{4+x^2}+2}{x(\sqrt[3]{x+8}^2+2\sqrt[3]{x+8}+4)} \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x\neq 0}} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x\neq 0}} f(x) = -\infty$$

3. *Pour $x \neq 0$ on a*
$\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} - \sqrt{\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + \sqrt{\frac{1}{x^2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}^2 - \sqrt{\frac{1}{x^2}}^2\right) = 1$
ceci d'après l'exercice précédent (ou en multipliant par l'expression conjugué).
Par suite $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} - \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}}}$
Et donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

4. *L'expression* $\sqrt{4x+1} - \sqrt[3]{3x+1} = (4x+1)^{\frac{1}{2}} - (3x+1)^{\frac{1}{3}}$.
On pose donc $m = 6 = ppcm(2,3)$ *(le plus petit commun multiple de 2 et 3)*
et l'on utilise l'identité $u^6 - v^6 = (u-v)(u^5+u^4v+u^3v^2+u^2v^3+uv^4+v^5)$
qui donne $u - v = \frac{u^6-v^6}{(u^5+u^4v+u^3v^2+u^2v^3+uv^4+v^5)}$
avec $u = \sqrt{4x+1} = (4x+1)^{\frac{1}{2}}$ *et* $v = \sqrt[3]{3x+1} = (3x+1)^{\frac{1}{3}}$ *pour avoir*
$(4x+1)^3 - (3x+1)^2 = (\sqrt{4x+1} - \sqrt[3]{3x+1})h(x)$
et donc $\frac{64x^3+39x^2+6x}{h(x)} = (\sqrt{4x+1} - \sqrt[3]{3x+1})$
où $h(x) = (4x+1)^{\frac{5}{2}} + (4x+1)^{\frac{4}{2}}(3x+1)^{\frac{1}{3}} + (4x+1)^{\frac{3}{2}}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + (4x+1)^{\frac{2}{2}}(3x+1)^{\frac{3}{3}}$
$+(4x+1)^{\frac{1}{2}}(3x+1)^{\frac{4}{3}} + (3x+1)^{\frac{5}{3}}$
et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} h(x) = 6$.
De même l'expression $\sqrt{2x+1} - \sqrt[4]{5x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{2}} - (5x+1)^{\frac{1}{4}}$.
On pose donc $n = 4 = ppcm(2,4)$ *(le plus petit commun multiple de 2 et 4)*
et l'on utilise l'identité $s^4 - t^4 = (s-t)(s^3+s^2t+st^2+t^3)$
avec $s = \sqrt{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$ *et* $t = \sqrt[4]{5x+1} = (5x+1)^{\frac{1}{4}}$ *pour avoir*
$(2x+1)^2 - (5x+1) = (\sqrt{2x+1} - \sqrt[4]{5x+1})k(x)$
et donc $\frac{4x^2-x}{k(x)} = (\sqrt{2x+1} - \sqrt[4]{5x+1})$
où $k(x) = (2x+1)^{\frac{3}{2}} + (2x+1)^{\frac{2}{2}}(5x+1)^{\frac{1}{4}} + (2x+1)^{\frac{1}{2}}(5x+1)^{\frac{2}{4}} + (5x+1)^{\frac{3}{4}}$
et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} k(x) = 4$
Ce qui donne
$f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt{2x+1} - \sqrt[4]{5x+1}} = \dfrac{64x^3+39x^2+6x}{h(x)} \times \dfrac{k(x)}{4x^2-x}$
$= \frac{64x^2+39x+6}{4x-1} \times \dfrac{k(x)}{h(x)}$
ceci après simplification par x pour $x \neq 0$
Et finalement

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} f(x) = \frac{6}{-1} \times \frac{4}{6} = -4$$

Solution 2.6. :

1) En utilisant les expressions conjuguées on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x^2+a^2}-a)(\sqrt{x^2+a^2}+a)(\sqrt{x^2+b^2}+b)}{(\sqrt{x^2+b^2}-b)(\sqrt{x^2+a^2}+a)(\sqrt{x^2+b^2}+b)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{((x^2+a^2)-a^2)(\sqrt{x^2+b^2}+b)}{((x^2+b^2)-b^2)(\sqrt{x^2+a^2}+a)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2+b^2}+b)}{x^2(\sqrt{x^2+a^2}+a)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+a^2}+a} \\ &= \frac{|b|+b}{|a|+a}. \end{aligned}$$

2) Faisons le changement de variable : $y = \frac{1}{x}$ *et donc* $x = \frac{1}{y}$.
On a x tend vers $+\infty$ si et seulement y tend vers 0^+.
Et l'on a $x^2(1 - \cos^2\frac{1}{x}) = \frac{1-\cos^2 y}{y^2} = \frac{\sin^2 y}{y^2} = \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2$.

Sachant que $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$, *on enduit que*

$$\lim_{x\to+\infty}x^2(1-\cos^2\frac{1}{x})=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=1.$$

3) Faisons le changement de variable $z=(\frac{\pi}{2}-x)$ *et donc* $x=(\frac{\pi}{2}-z)$.
On a x *tend vers* $\frac{\pi}{2}$ *si et seulement* z *tend vers* 0.
Sachant que $\sin(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-z)=\cos(z)=1-2\sin^2(\frac{z}{2})$
on écrit que $\dfrac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}=\dfrac{2\sin^2(\frac{z}{2})}{z^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(\frac{z}{2})}{\frac{z}{2}}\right)^2$
D'où

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{z}{2})}{\frac{z}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

(en passant par $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$*).*

Solution 2.7. :
1) On sait que la partie entière $E(u)$ *d'un réel vérifie* $E(u)\le u<E(u)+1$
et si $u>0$, *on aura* $u^2<uE(u)+u$ *et donc* $u^2-u<uE(u)$.
Comme $\lim\limits_{u\to+\infty}u^2-u=+\infty$, *on a aussi* $\lim\limits_{u\to+\infty}uE(u)=+\infty$.
De même si $u<0$, *on aura* $uE(u)\ge u^2$.
comme $\lim\limits_{u\to-\infty}u^2=+\infty$, *on a aussi* $\lim\limits_{u\to-\infty}uE(u)=+\infty$.

2) En faisant le changement de variable $u=\frac{1}{x}$ $(x=\frac{1}{u})$, *on aura*

$$\frac{E(\frac{1}{x})+x}{E(\frac{1}{x})-x}=\frac{E(u)+\frac{1}{u}}{E(u)-\frac{1}{u}}=\frac{1+\dfrac{1}{uE(u)}}{1-\dfrac{1}{uE(u)}}$$

Et l'on déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{E(\frac{1}{x})+x}{E(\frac{1}{x})-x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{uE(u)}}{1-\dfrac{1}{uE(u)}}=1$$

(ceci car $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{uE(u)}=0$.*)*
Et de la même façon

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{E(\frac{1}{x})+x}{E(\frac{1}{x})-x}=\lim_{u\to-\infty}\frac{1+\dfrac{1}{uE(u)}}{1-\dfrac{1}{uE(u)}}=1$$

Solution 2.8. :
1) En utilisant le fait que
$a\sqrt{a}=(\sqrt{a})^3$ *et l'identité* $u^3-v^3=(u^2+uv+v^2)(u-v)$,
on a les égalités suivantes pour $x\in D$ *étant donné que* $\sin x\ge 0$, $\tan x\ge 0$ *et*

$\cos x\ge 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tan x\sqrt{\tan x}-\sin x\sqrt{\sin x}}{x^3\sqrt{x}}\\
&= \frac{(\sqrt{\tan x})^3-(\sqrt{\sin x})^3}{x^3\sqrt{x}}\\
&= \frac{\left[(\sqrt{\tan x})^2+\sqrt{\tan x}\sqrt{\sin x}+(\sqrt{\sin x})^2\right](\sqrt{\tan x}-\sqrt{\sin x})}{x^3\sqrt{x}}\\
&= \frac{\left[\tan x+\sqrt{\tan x}\sqrt{\sin x}+\sin x\right](\sqrt{\tan x}-\sqrt{\sin x})}{x^3\sqrt{x}}\\
&= \frac{\left[\tan x+\sqrt{\tan x}\sqrt{\sin x}+\sin x\right]}{x}\times\frac{(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}}-\sqrt{\sin x})}{x^2\sqrt{x}}\\
&= \frac{\left[\tan x+\sqrt{\tan x}\sqrt{\sin x}+\sin x\right]}{x}\times\frac{\sqrt{\sin x}(\frac{1}{\sqrt{\cos x}}-1)}{x^2\sqrt{x}}\\
&= \left[\frac{\tan x}{x}+\sqrt{\frac{\tan x}{x}\frac{\sin x}{x}}+\frac{\sin x}{x}\right]\times(\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\times\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2\sqrt{\cos x}})\\
&= \left[\frac{\tan x}{x}+\sqrt{\frac{\tan x}{x}\frac{\sin x}{x}}+\frac{\sin x}{x}\right]\times\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{(1+\sqrt{\cos x})\sqrt{\cos x}}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat

$$f(x)=\left[\frac{\tan x}{x}+\sqrt{\frac{\tan x}{x}\frac{\sin x}{x}}+\frac{\sin x}{x}\right]\times\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}+1)}$$

2) Sachant que $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$
et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}+1)}=\frac{1}{2}$,
on en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{3}{4}.$$

Solution 2.9. :
1) On a pour chaque $k\in\mathbb{N}^*$, *l'égalité*
$(x-1)(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+1)=(x^k+x^{k-1}+\cdots+x)-(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+1)=x^k-1$
Ce qui donne $\dfrac{x^k-1}{x-1}=x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+1$, *pour* $k\in\mathbb{N}^*$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^k-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+1)=k$, *pour* $k\in\mathbb{N}^*$.
2) On a pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}\\
&= \frac{(x-1)}{x-1}+\frac{(x^2-1)}{x-1}+\cdots+\frac{(x^n-1)}{x-1}
\end{aligned}$$

Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, est fixé alors :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\left[\frac{(x-1)}{x-1}+\frac{(x^2-1)}{x-1}+\cdots+\frac{(x^n-1)}{x-1}\right]\\ &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)}{x-1}\right)+\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x^2-1)}{x-1}\right)\cdots+\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x^n-1)}{x-1}\right)\\ &= 1+2+\cdots n=\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Solution 2.10. :

En utilisant l'identité : $1-a^k=(1-a)(1+a+\cdots+a^{k-1})$ pour $a\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}^*$, on écrit $1-\cos^k t=(1-\cos t)(1+\cos t+\cdots+\cos^{k-1} t)$ et $1-\cos^2 t=(1-\cos t)(1+\cos t)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos^k t}{1-\cos^2 t} &= \frac{(1-\cos t)(1+\cos t+\cdots+\cos^{k-1} t)}{(1-\cos t)(1+\cos t)}\\ &= \frac{1+\cos t+\cdots+\cos^{k-1} t}{1+\cos t}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^k t}{1-\cos^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\cos t+\cdots+\cos^{k-1} t}{1+\cos t}=\frac{k}{2}$$

2) En faisant le changement de variable $t=x-\frac{\pi}{2}$ (et donc $x=t+\frac{\pi}{2}$), on a $\sin x=\sin(t+\frac{\pi}{2})=\cos t$ et $\cos x=\cos(t+\frac{\pi}{2})=-\sin t$
Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\frac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)\cdots(1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x} &= \frac{(1-\cos t)(1-\cos^2 t)\cdots(1-\cos^n t)}{\sin^{2n} t}\\ &= \frac{(1-\cos t)(1-\cos^2 t)\cdots(1-\cos^n t)}{(1-\cos^2 t)^n}\\ &= \frac{(1-\cos t)}{(1-\cos^2 t)}\frac{(1-\cos^2 t)}{(1-\cos^2 t)}\cdots\frac{(1-\cos^n t)}{(1-\cos^2 t)}.\end{aligned}$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, fixé on en déduit, d'après (1), que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{t\to 0}\left[\frac{(1-\cos t)}{(1-\cos^2 t)}\frac{(1-\cos^2 t)}{(1-\cos^2 t)}\cdots\frac{(1-\cos^n t)}{(1-\cos^2 t)}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}\times\cdots\times\frac{n}{2}=\frac{n!}{2^n}.$$

Solution 2.11. :

Considérons les fonctions : $u(x)=\frac{\pi}{x}$, $v(x)=\frac{\pi}{1-x}$ et $h(t)=\sin t$.
Les deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sont des fractions rationnelles, donc continues sur leurs ensembles de définition qui sont respectivement $I=\mathbb{R}-\{0\}$ et $J=\mathbb{R}-\{1\}$.
Comme la fonction $h(t)=\sin t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, les deux fonctions composées
$h(u(x))=\sin\frac{\pi}{x}$ et $h(v(x))=\sin\frac{\pi}{1-x}$ sont continues sur $I\cap J=\mathbb{R}-\{0,1\}$.
Et donc leur produit $f(x)=h(u(x))h(v(x))=\sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{1-x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$.
Il nous reste à étudier la continuité en 0 et 1.
Au point $x_o=0$ on a :
$|f(x)|\le|\sin\frac{\pi}{1-x}|$ (car $|\sin\frac{\pi}{x}|\le 1$).
Comme $\lim_{x\to 0}|\sin\frac{\pi}{1-x}|=|\sin\pi|=0$, on en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ et $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.
Ainsi f est continue en 0.

De même au point $x_1=1$
$|f(x)|\le|\sin\frac{\pi}{x}|$ (car $|\sin\frac{\pi}{1-x}|\le 1$).
Comme $\lim_{x\to 1}|\sin\frac{\pi}{x}|=|\sin\pi|=0$, on en déduit que $\lim_{x\to 1} f(x)=0$ et $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$.
Ainsi f est continue en 1.
Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution 2.12. :

Posons $h(x)=\sin x$, $k(x)=\cos x$ et $w(z)=\sqrt{z}$.
La fonction $1-k^2(x)=1-\cos^2 x$ est continue sur $\mathbb{R}$ car somme et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Comme $1-\cos^2 x$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et la fonction $w(z)=\sqrt{z}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, la fonction composée $w(1-\cos^2 x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction $h(x)=\sin x$ est continue sur l'intervalle $I=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et s'annule en 0,
donc $f(x)=\sin x+\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x}$ est définie et continue sur $[-\frac{\pi}{2},0[\cup]0,\frac{\pi}{2}]=I-\{0\}$.
Au point 0 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\sin x+\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\sin x+\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}(\sin x+\frac{|\sin x|}{\sin x})\\ &= \lim_{x\to 0^+}(\sin x+1)=1\neq f(0).\end{aligned}$$

De même, on trouve $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(\sin x-1)=-1\neq f(0)$
Ainsi f n'est pas continue en 0 (elle n'est même pas continue à gauche, ni à droite de 0).

Solution 2.13. :

Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l'$ et par définition des limites on a :
Pour $\varepsilon_o=1$ ils existent $A<0$ et $B>0$ tels que
$\forall x(x<A\Rightarrow|f(x)-l'|<1)$ et $\forall x(x>B\Rightarrow|f(x)-l|<1)$
En passant par l'inégalité $|a|-|b|\le|a-b|$ pour a et b des réels, on a :
$\forall x(x<A\Rightarrow|f(x)|-|l'|<1)$ et $\forall x(x>B\Rightarrow|f(x)|-|l|<1)$
Et donc
$\forall x(x<A\Rightarrow|f(x)|<|l'|+1)$ et $\forall x(x>B\Rightarrow|f(x)|<|l|+1)$
Comme f est continue, l'image de l'intervalle $I=[A,B]$ est un intervalle de la forme $J=[\alpha,\beta]$ avec $\alpha=\inf_{t\in I} f(t)$ et $\beta=\sup_{s\in I} f(s)$.
En posant $M=max(|\alpha|,|\beta|,|l|+1,|l'|+1)$, on conclut que
$\forall x\in\mathbb{R}\quad|f(x)|\le M$
Ce qui signifie que f est une fonction bornée.

Solution 2.14. :

1) Soit f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad:\quad f(x)+f(y)=f(x+y)$.

On a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 0 = 0f(1)$. Et si on suppose que $f(n-1) = (n-1)f(1)$,
alors $f(n) = f((n-1)+1) = f(n-1) + f(1) = (n-1)f(1) + f(1) = nf(1)$.
Par récurrence on obtient : $\underline{f(n) = nf(1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Pour $k \in \mathbb{Z}_-$, $(-k) \in \mathbb{N}$, donc $\underline{f(-k) = (-k)f(1)}$,
et $0 = f(0) = f(k + (-k)) = f(k) + f(-k) = f(k) + (-k)f(1)$,
ce qui donne $f(k) = -(-k)f(1) = kf(1)$.
D'où $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\underline{f(k) = kf(1)}$ (k positif ou négatif).
Pour $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$$f(p) = f(qr) = f(\overbrace{r + \cdots + r}^{q-fois}) = \overbrace{f(r) + \cdots + f(r)}^{q-fois} = qf(r).$$

Comme $f(p) = pf(1)$, on obtient $pf(1) = qf(r)$ et par suite $\underline{f(r) = \frac{p}{q}f(1) = rf(1)}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on sait qu'il existe une suite $(r_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$.
Comme f est continue, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} r_n) = f(x)$,
sachant que $r_n \in \mathbb{Q}$ et donc $f(r_n) = r_n f(1)$,
on écrit que $xf(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n f(1) = f(x)$.
Finalement, on conclut que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = xf(1)$.
La fonction f est de la forme $f(x) = ax$ (avec $a = f(1)$).
Inversement :
Si f est de la forme $f(x) = ax$, alors elle vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) En utilisant la remarque $xy = \dfrac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}$,
l'égalité $g(x+y) = g(x) + g(y) + xy$ devient

$$g(x+y) = g(x) + g(y) + xy = g(x) + g(y) + \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2},$$

ce qui donne $g(x+y) - \dfrac{(x+y)^2}{2} = \left[g(x) - \dfrac{x^2}{2}\right] + \left[g(y) - \dfrac{y^2}{2}\right]$.

En posant $f(x) = g(x) - \dfrac{x^2}{2}$, on trouve que f vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Et d'après (1), on trouve $f(x) = ax = g(x) - \dfrac{x^2}{2}$

ce qui donne $g(x) = ax + \dfrac{x^2}{2}$. C'est la forme de toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad g(x+y) = g(x) + g(y) + xy$.

Solution 2.15. :
On pose $g(x) = f(x) - x$ sur $[0, +\infty[$. La fonction g est bien définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ car différence de deux fonctions continues.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{f(x)}{x} - 1\right) = -\infty$

(ceci car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - 1\right) = l - 1 < 0$).
Par définition des limites, on a :
pour $A < 0$, $\exists B > 0$: $\forall x$ $(x > B \Rightarrow g(x) < A)$ $(*)$.
En prenant $a = 0$ et $b = B + 1$ on a les données suivantes

1) g est continue sur $[a, b]$,
2) $g(a) = g(0) = f(0) \geq 0$ (f est positive) et $g(b) = g(B+1) < A < 0$ (voir (*)).
En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit :
$\exists x_o \in [a, b]$ tel que $g(x_o) = 0 = f(x_o) - x_o$ et donc $f(x_o) = x_o$.

Si on a l'hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} < \alpha$, avec $\alpha > 0$, on refait la même chose avec $g(x) = f(x) - \alpha x$. Et l'on obtient le résultat
$\exists x_o \in [0, +\infty[$ tel que $f(x_o) = \alpha x_o$.

Solution 2.16. :
1) On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} 1 = 1$.
2) On a $\forall y \in \mathbb{R}$, $\ -1 \leq \sin y \leq 1$ et donc $0 \leq \sin^2 y \leq 1$.
Par suite, $\forall x \neq 0$, $0 \leq \sin^2\frac{1}{x} \leq 1$ et donc $\forall x \neq 0$, $0 \leq |x \sin^2 \frac{1}{x}| \leq |x|$.
Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} u(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} v(x) = 0$, avec $u(x) = 0$ et $v(x) = x$,
on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x \sin^2\frac{1}{x} = 0$.
Par suite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\sin^2\frac{1}{x} = g(0)$ et g est continue en 0.

3) On a $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(x \sin^2 \frac{1}{x}) = 1 & \text{si } \sin^2\frac{1}{x} \neq 0 \text{ et } x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \text{si } \sin^2\frac{1}{x} = 0 \text{ et } x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

L'égalité $\sin^2\frac{1}{x} = 0$ a lieu si $\exists k \in \mathbb{Z}$: $\frac{1}{x} = k\pi$ et donc $x = \frac{1}{k\pi}$.
En prenant les deux suites
$(x_n) = \frac{1}{n\pi}$ et $(y_n) = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, on a
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$
mais $\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(x_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n \sin^2 n\pi) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(0) = 0$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(y_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n \sin^2(2n+1)\frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = 1$ (car $y_n \neq 0$ et $f(y_n) = 1$).
Par suite $f \circ g$ n'a pas de limite en 0.
On a deux suites qui convergent vers 0, mais les limites de leurs images sont différentes (voir l'unicité des limites).

Solution 2.17. :
1) La fonction $f(x) = \dfrac{1 - \cos\sqrt{|x|}}{|x|}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, car elle est composée et rapport de fonctions continues et définies sur $\mathbb{R}$ avec $|x| \neq 0$.
Pour 0 on a :
$\dfrac{1 - \cos\sqrt{|x|}}{|x|} = \dfrac{1 - \cos y}{y^2}$ en faisant le changement de variable $y = \sqrt{|x|}$ ($y^2 = |x|$).
Quand x tend vers 0 on a aussi y tend vers 0. Ce qui donne
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \dfrac{1 - \cos y}{y^2} = \dfrac{1}{2}$.
f est donc prolongeable par continuité en 0 par la fonction

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|} & si\ x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$$

2) Sur $\mathbb{R}^*$ *la fonction* $g(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ *est composée et produit de fonctions continues donc continue.*
En 0 *on écrit que pour tout* $x \neq 0$
$0 \leq |g(x)| \leq |\sin x||\sin \frac{1}{x}| \leq |\sin x|$ *(car* $0 \leq |\sin \frac{1}{x}| \leq 1$*).*
Et par suite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x) = 0$ *(ceci car* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \sin x = 0$*).*
g est donc prolongeable par continuité en 0 par la fonction

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} \sin x \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

3) La fonction $|1+x|$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R} - \{-1\}$ *et prend des valeurs strictement positives. Donc la fonction* $\ln|1+x|$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R} - \{-1\}$ *et par suite la fonction* $h(x) = \sin(x+1)\ln|1+x|$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R} - \{-1\}$.
En (-1) *on a :*
Faisons le changement de variable $y = x+1$. *Quand* x *tend vers* -1 *on a* y *tend vers* 0.

$$Et\ \lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} \sin(x+1)\ln|1+x| = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \sin y \ln|y| = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{\sin y}{y}(y\ln|y|) = 0$$

(ceci car $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \dfrac{\sin y}{y} = 1$ *et* $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} y\ln|y| = 0$*).*
Par suite h est prolongeable par continuité en 0 par la fonction

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} \sin(x+1)\ln|1+x| & si\ x \neq -1 \\ 0 & si\ x = -1 \end{cases}$$

Solution 2.18. :

1) Pour $x \neq y$ *on a*

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= (-x^3+2x+1) - (-y^3+2y+1) = (y^3 - x^3) + 2(x-y) \\ &= (y-x)(y^2+yx+x^2) - 2(y-x) = (y-x)(y^2+yx+x^2-2) \end{aligned}$$

On a $x \geq 1$ *et* $y \geq 1$, *donc* $x^2 \geq 1$, $y^2 \geq 1$ *et* $xy \geq 1$,
ce qui donne $y^2+yx+x^2-2 \geq 3-2 = 1$ *et donc* $y^2+yx+x^2-2 > 0$.
Ainsi le signe de $f(x)-f(y)$ *est celui de* $(y-x) = -(x-y)$
et par suite f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1,2]$ *et donc injective.*
$(x < y \Rightarrow 0 < y-x \Rightarrow f(x)-f(y) > 0 \Rightarrow f(x) > f(y))$.
2) On a $f(1) = 2$ *et* $f(2) = -3$, *donc* $f(1)\times f(2) < 0$. *En plus f est continue sur* $[1,2]$ *puisqu'elle est polynomiale.*
En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires on obtient l'existence d'un $c \in [1,2]$ *tel que* $f(c) = 0$.
Comme f est injective, c est unique.
D'où l'équation $f(x) = 0$ *admet une solution unique dans I.*

Solution 2.19. :

1) Étant donné $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$ *on a :*
$f(-1) = -\frac{3}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(0) = -\frac{1}{2}$ *et* $f(1) = \frac{1}{2}$.
2) On a :
$f(-1)\times f(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4} < 0$ *et f polynomiale donc continue sur* $[-1,-\frac{1}{2}]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c_1 \in]-1,-\frac{1}{2}[$ *tel que* $f(c_1) = 0$.

Comme $f(-\frac{1}{2})\times f(0) < 0$, *on fait le même raisonnement sur* $[-\frac{1}{2},0]$, *donc il existe* $c_2 \in]-\frac{1}{2},0[$ *tel que* $f(c_2) = 0$.
Et de même sur $[0,1]$, $f(0)\times f(1) < 0$, *f continue sur* $[0,1]$ *il existe* $c_3 \in]0,1[$ *tel que* $f(c_3) = 0$.
Ainsi l'équation $f(x) = 0$ *admet dans* $[-1,1]$ *au moins les trois différentes solutions* c_1, c_2 *et* c_3 $(-1 < c_1 < -\frac{1}{2} < c_2 < 0 < c_3 < 1)$.
3) D'après les formules trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(\alpha+2\alpha) = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha \\ &= (\cos\alpha)(2\cos^2\alpha - 1) - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \end{aligned}$$

D'où

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

4) Pour $a \in [-1,1]$, *posons* $a = \cos\alpha$. *Alors*
$f(a) = 4a^3 - 3a - \frac{1}{2} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha - \frac{1}{2} = \cos 3\alpha - \frac{1}{2}$
Ainsi l'équation $f(a) = 0$ *équivaut à* $\cos 3\alpha - \frac{1}{2} = 0$ *et donc à* $\cos 3\alpha = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$.
Par suite $3\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ *ou* $3\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ *et* $k' \in \mathbb{Z}$.
Et donc $\alpha = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ *ou* $\alpha = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k'\pi}{3}$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ *et* $k' \in \mathbb{Z}$.
En tenant compte de la parité et la périodicité de la fonction cosinus on trouve trois valeurs différentes
$a = \cos\frac{\pi}{9}$ *ou* $a = \cos\frac{7\pi}{9}$ *ou* $a = \cos\frac{13\pi}{9}$.
Ce sont donc les seules solutions de l'équation $f(x) = 0$ *dans* $[-1,1]$.

Solution 2.20. :

Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{(1+x)^2}$. *Elle est définie et continue sur* $]-1,+\infty[$.
On a $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$ *et* $f(2\pi) = \frac{1}{2} - \dfrac{1}{(1+2\pi)^2} > 0$.
En plus la fonction f est continue sur $[0,2\pi]$. *D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe* $c \in [0,2\pi]$ *tel que* $f(c) = 0$.
Ainsi l'équation $\frac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{(1+x)^2} = 0$ *a au moins une solution dans* $\mathbb{R}$.

Solution 2.21. :

Posons $g(x) = xf(x) - ab$. *Alors*
i- g est continue sur $[a,b]$ *car produit et différence de fonctions continues.*
ii- $g(a)\times g(b) = [af(a) - ab]\times[bf(b) - ab] = ab(f(a)-b)(f(b)-a)$.
Comme $f(a) - b \leq 0$ *(car* $f(a) \in [a,b]$*),* $f(b) - a \geq 0$ *(car* $f(b) \in [a,b]$*) et* $ab > 0$ *on en déduit que* $g(a)\times g(b) \leq 0$
En passant par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_o \in [a,b]$, *tel que* $g(x_o) = x_o f(x_o) - ab = 0$.
Et donc il existe $x_o \in [a,b]$ *tel que* $x_o f(x_o) = ab$.

Solution 2.22. :

f et g étant continues sur l'intervalle $[a,b]$ *et telles que :* $\forall x \in [a,b]$, $g(x) < f(x)$.
Posons $h(x) = f(x) - g(x)$. *La fonction h est continue sur* $[a,b]$ *-car elle est différence*

de deux fonctions continues sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$, $h(x) > 0$.
D'après le cours $h([a,b]) = [m, M]$ avec $m = \min\limits_{t\in[a,b]} h(t)$.
Comme h est continue, elle atteint ses bornes, donc il existe $x_o \in [a,b]$ tel que $m = h(x_o) > 0$.
D'où $(\exists m \in \mathbb{R}_+^*), (\forall x \in [a,b])$, $m \leq h(x) = f(x) - g(x)$ et par suite

$$(\exists m \in \mathbb{R}_+^*), (\forall x \in [a,b]), \quad f(x) \geq g(x) + m.$$

Solution 2.23. :
1) Si $k = 0$:
on aurait $f^2(x) = 0$ et donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$. f serait la fonction constante nulle.
Si $k \neq 0$:
Soit $x_o \in I$. Alors $f^2(x_o) = k$.
Pour tout $x \in I - \{x_o\}$ on a aussi $f^2(x) = k = f^2(x_o)$,
et donc $|f(x_o)| = |f(x)| = \sqrt{k}$.
Si $f(x)$ et $f(x_o)$ sont de signes différents on aurait d'après le théorème des valeurs intermédiaires -puisque f est continue sur l'intervalle I-, l'existence de $c \in I$ tel que $f(c) = 0$, et donc $f^2(c) = 0 = k$. Ce qui est absurde !
Par suite $f(x)$ et $f(x_o)$ ont même signe et $|f(x_o)| = |f(x)|$. Ce qui donne $f(x_o) = f(x)$ pour tout $x \in I$.
Ainsi f est bien constante sur I.
2) i- Prenons $I = [0,1] \cup [2,3]$ et f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0,1] \\ -1 & si\ x \in [2,3] \end{cases}$
On a $f^2(x) = 1$ et f est continue sans que f soit constante.
(I n'est pas un intervalle)
ii- Prenons $I = [-1,1]$ et f définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \in [-1,0] \\ 1 & si\ x \in]0,1] \end{cases}$
On a $f^2(x) = 1$ et I est un intervalle sans que f soit constante.
(f n'est pas continue : $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 1 \neq \lim\limits_{s \to 0^-} f(s) = -1$).

Par suite, la propriété ne reste pas vraie si I n'est pas un intervalle ou si f n'est pas continue.

Solution 2.24. :
Par hypothèse, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$.
Donc pour $\varepsilon_1 = \frac{|a|}{2}$, il existe $A > 0$ tel que
$\forall x > A$ $|f(x) - a| < \frac{|a|}{2} = \varepsilon_1$.
Avec $x_o = 2A > A > 0$, on a $|f(x_o) - a| < \frac{|a|}{2}$,
ce qui donne $-\frac{|a|}{2} < f(x_o) - a < \frac{|a|}{2}$, et ensuite $a - \frac{|a|}{2} < f(x_o) < a + \frac{|a|}{2}$.
Les deux réels $a - \frac{|a|}{2}$ et $a + \frac{|a|}{2}$ ont le même signe que a. Par suite $f(x_o)$ a le même signe que a.
De la même façon
Par hypothèse, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.
Donc pour $\varepsilon_2 = \frac{|b|}{2}$, il existe $B < 0$ tel que
$\forall x < B$ $|f(x) - b| < \frac{|b|}{2} = \varepsilon_2$.
Avec $y_o = 2B < B < 0$, on a $|f(y_o) - b| < \frac{|b|}{2}$,

ce qui donne $-\frac{|b|}{2} < f(y_o) - b < \frac{|b|}{2}$, et ensuite $b - \frac{|b|}{2} < f(y_o) < b + \frac{|b|}{2}$.
Les deux réels $b - \frac{|b|}{2}$ et $b + \frac{|b|}{2}$ ont le même signe que b. Par suite $f(y_o)$ a le même signe que b.
Finalement $f(x_o)f(y_o)$ est du signe de ab qui est négatif.
Par suite $\exists (x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ / $f(x_o)f(y_o) < 0$.

2) f étant continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $[x_o, y_o]$.
Comme $f(x_o)f(y_o) < 0$ on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in [x_o, y_o]$ tel que $f(c) = 0$.
Ce qui signifie que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Solution 2.25. :
Posons $h(x) = f(x) - g(x)$. La fonction h est continue sur l'intervalle $[0,1]$ car différence de deux fonctions continues.
En plus, on a $h(0)h(1) = (f(0) - g(0))(f(1) - g(1))$ donc $h(0)h(1) < 0$.
En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires on obtient
$(\exists x_o \in [0,1])$ / $h(x_o) = 0 = f(x_o) - g(x_o)$.
Ce qui donne
$(\exists x_o \in [0,1])$ / $f(x_o) = g(x_o)$.

Solution 2.26. :
Posons $h(x) = f(x) - x$. La fonction h est continue sur l'intervalle $[0,1]$ car différence de deux fonctions continues (la fonction $f(x)$ et $g(x) = x$).
En plus on a $h(0) = f(0)$ et $f(0) \in [0,1]$ donc $h(0) > 0$.
Et l'on a $f(1) \in [0,1]$. Donc $f(1) < 1$, puis $h(1) = f(1) - 1 < 0$.
Par suite $h(0)h(1) < 0$.
En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient
$(\exists x_o \in [0,1])$ / $h(x_o) = 0 = f(x_o) - x_o$.
Ce qui donne
$(\exists x_o \in [0,1])$ / $f(x_o) = x_o$.

Solution 2.27. :
Pour $c \neq 0$ et $c \neq 1$, l'égalité $f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$ est équivalente à
$f(c) - \frac{1}{c} - \frac{1}{c-1} = 0 = \frac{c(c-1)f(c) - 2c + 1}{c(c-1)}$.
Posons $h(x) = x(x-1)f(x) - 2x + 1$.
la fonction h est continue sur $[0,1]$ puisque les fonctions x, $x - 1$, $f(x)$ et $-2x + 1$ sont continues sur $[0,1]$.
Et en plus, $h(0)h(1) = (+1)(-1) = -1 < 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0,1[$ tel que $h(c) = 0$.
Ce qui donne, $(\exists c \in]0,1[)$ / $c(c-1)f(c) - 2c + 1 = 0$.
Puis, $(\exists c \in]0,1[)$ / $\frac{c(c-1)f(c) - 2c + 1}{c(c-1)} = f(c) - \frac{1}{c} - \frac{1}{c-1} = 0$
Et finalement
$(\exists c \in]0,1[)$ / $f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$.

Solution 2.28. :
f étant continue sur $[a,b]$, donc $f([a,b]) = [m, M]$,

avec $m = \inf_{t\in[a,b]} f(t)$ *et* $M = \sup_{s\in[a,b]} f(s)$.
Comme $c \in [a,b]$, $f(c) \in f([a,b]) = [m,M]$, *et donc* $m \leq f(c) \leq M$.
Et de même $m \leq f(d) \leq M$.

Par suite $2m \leq f(c)+f(d) \leq 2M$, *et donc* $m \leq \dfrac{f(c)+f(d)}{2} \leq M$.
f *étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure qu'il existe* $\alpha \in [a,b]$ *tel que* $f(\alpha) = \dfrac{f(c)+f(d)}{2}$.

2.4 Exercices supplémentaires

Exercice 2.29. :
Trouver toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ *telles que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad |f(x)+f(y)| = |x+y|.$$

Exercice 2.30. :
Trouver les couples de fonctions (f,g) *continues sur* $\mathbb{R}$ *et telles que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(x+y) & = f(x)+f(g(y)) \\ g(x+y) & = g(x)+g(f(y)) \end{cases}$$

Exercice 2.31. :
Soit f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *et continue en* 0 *telle que :* $f(3x) = f(x)$.
1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(\frac{x}{3^n})$.
2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$ *et que* f *est constante.*

Exercice 2.32. :
On pose $\lambda = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ *et on définit la fonction* $g_o(x) = |x|^{\lambda}$.
1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_o(3x) = 2g_o(x)$.
2) Soit g *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(3x) = 2g(x)$. *Vérifier que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad : \quad \frac{g(3x)}{g_o(3x)} = \frac{g(x)}{g_o(x)}.$$

Exercice 2.33. :
Calculer les limites suivantes :

—
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

—
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$$

—
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+1}-x$$

—
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2+1}-mx \quad \text{où } m \text{ est un réel.}$$

Exercice 2.34. :
Calculer les limites suivantes :
1)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{x-1}-\sqrt[3]{3-x}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x-1}}$$

2)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[5]{x}\,\sqrt[15]{x^2}}{3\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}}$$

3)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}$$

Exercice 2.35. :
Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :
1)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$$

2)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$$

3)

$$\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^x}{x-a}\quad (\textit{avec } a\in\mathbb{R}_+^*)$$

4)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(\pi x)-\cos(\frac{\pi x}{4})}{2^x-x^2}$$

5)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin x-\sin(\frac{1}{x})}{e^x-e^{\frac{1}{x}}}$$

Exercice 2.36. :
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}-\sqrt{b^2-x^2}};\quad \lim_{x\to-\infty}x^2(\cos\frac{1}{x}-\cos^2\frac{1}{x});\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\sin^2 x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$$

où a et b sont deux réels tel que $b>0$.

Exercice 2.37. :
On considère les intervalles suivants :
$I=]1,2[$, $J=]3,5]$, $K=[-1,1[$ *et* $H=[0,2]$.
1) Donner si possible des exemples de fonctions polynomiales (donc continues) de l'un de ces intervalles dans l'autre.
2) Peut-on trouver une fonction affine bijective (donc continue) entre deux de ces intervalles ?

Exercice 2.38. :
1) On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction f par $f(x)=\cos(\frac{1}{x})$.
En utilisant la définition montrer que f n'admet pas de limite en 0.
2) Soit $a\in[-1,1]$. Trouver une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^*$ telle que $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$ et $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=a$.

Exercice 2.39. :
Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de période $T>0$ et telle que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=k_o$, $k_o\in R$.
Montrer que f est constante.

Exercice 2.40. :
On considère la fonction f donnée par l'expression

$$f(x)=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-2\tan x}{\cos 2x}$$

1) Déterminer l'ensemble des réels appartenant à l'intervalle $I=[0,\frac{\pi}{2}]$ pour lesquels f est définie.
2) Peut-on prolonger f par continuité au point $x_o=\frac{\pi}{4}$?

Exercice 2.41. :
On considère la fonction f donnée par l'expression

$$f(x)=E(x)\sin(\pi x)$$

1) Étudier la continuité de la fonction f au point $x_o=k$ (avec $k\in\mathbb{Z}$).
2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.42. :
Montrer que l'équation $-x^3+x+1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1,2]$.

Exercice 2.43. :
Soit f une fonction continue de l'intervalle $I=[0,1]$ dans lui même.
Montrer que pour chaque entier $n\in\mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n\in[0,1]$ tel que $f(\alpha_n)=\alpha_n^n$.

Exercice 2.44. :
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I=[a,b]$ et telle que $f(a)=f(b)$.
Montrer qu'il existe au moins $x_o\in I$ tel que $f(x_o)=f(x_o+\frac{b-a}{2})$.

Exercice 2.45. :
Soit n un entier non nul ($n\in\mathbb{N}^*$).
Montrer que l'équation $\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,\pi]$.

Exercice 2.46. :
Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $a<b$, $f(a)=a$, $f(b)=b$, $g(a)<1$ et $g(b)>1$.
Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que : $f(c)g(c)=c$

Exercice 2.47. :
Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, avec $f(a)\neq f(b)$, et u, v deux réels strictement positifs fixés.
1) Justifier la continuité de la fonction $g(x)=(u+v)f(x)-uf(a)-vf(b)$.
2) Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=\dfrac{uf(a)+vf(b)}{u+v}$.

Exercice 2.48. :
Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Et soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n-réels fixés appartenant à l'intervalle $[a,b]$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

Exercice 2.49. :
Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b] \neq \emptyset$, avec $f(a) \neq 0$.
Montrer qu'il existe $x_o \in]a,b[$ tel que $f(x_o) = \dfrac{x_o - a}{b - x_o} f(a)$.

Exercice 2.50. :
Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, avec $f(a) < ab$, et $b^2 < f(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = bc$.

Exercice 2.51. :
Étudier la continuité de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par
$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$.

Exercice 2.52. :
Dans chacun des cas suivants étudier si la fonction donnée est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$:
1) $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{|x|}(1-\cos\sqrt{|x|})}{|x|^{\frac{3}{2}}}$.
2) $g(x) = \cos x \cos\frac{1}{x}$.
3) $h(x) = \cos(x\frac{\pi}{2}) \ln|1+x|$.

Exercice 2.53. :
On considère la fonction numérique à variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(xE(\frac{\pi}{x})\right), & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est continue à droite de $x_o = 0$.
2) Soit un entier $k \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans l'intervalle $[0,\pi]$ l'équation $E(\frac{\pi}{x}) = k$.
On note I_k l'ensemble des solutions de cette équation.
3) Soit f_k la restriction de la fonction f à l'ensemble I_k.
Déterminer des expressions de $f_k(x)$ et de $f_{k-1}(x)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Étudier la continuité de f sur l'intervalle $[0,\pi]$

2.5 Indications sur les exercices supplémentaires

Solution 2.29. :
Calculer d'abord $f(0)$.
Exprimer $|f(x)|$ en fonction de $|x|$.
Prendre x et y différents et non nuls. En supposant que $f(x)$ et $f(y)$ de signes différents montrer qu'on arrive à $x = 0$ ou $y = 0$.
En déduire la forme de f.

Solution 2.30. :
Vérifier que $\forall y \in \mathbb{R}$ $f(y) = f(0) + f(g(y))$.
Puis en déduire que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$ $f(x+y) - f(y) = f(x) - f(0)$.
Poser $h(x) = f(x) - f(0)$ et vérifier que h est linéaire. Voir la solution détaillée de l'exercice (Ex 14) et donner ensuite l'expression de f et de g.

Solution 2.31. :
1) Faire un raisonnement par récurrence pour montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(\frac{x}{3^n})$.
2) Pour x donné, utiliser la continuité de f pour trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\frac{x}{3^n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ où $x_n = \frac{x}{3^n}$.

Solution 2.32. :
1) Faire le calcul directement pour vérifier que $g_o(3x) = 2g_o(x)$.
2) Faire le calcul en remplaçant g_o.

Solution 2.33. :
Utiliser les techniques vues dans les exercices solutionnés telles que les identités $u^3 - v^3 = (u-v)(u^2+uv+v^2)$ et $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$.

Solution 2.34. :
Revoir les solutions détaillées.

Solution 2.35. :
1) Multiplier par les expressions conjuguées ou utiliser les identités pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.
2) Utiliser les formules $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ *pour* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$.
3) Transformer $\dfrac{x^x - a^x}{x-a} = a^x\dfrac{(\frac{x}{a})^x - 1}{x-a}$ *et utiliser* $(\frac{x}{a})^x = e^{x\ln\frac{x}{a}}$. *Passer ensuite par la notion de dérivée en posant* $h(x) = e^{x\ln\frac{x}{a}}$.
4) Écrire que $\dfrac{\sin(\pi x)-\cos(\frac{\pi x}{4})}{2^x - x^2} = \dfrac{u(x)-u(2)}{x-2} \times \dfrac{x-2}{v(x)-v(2)}$
avec $u(x) = \sin(\pi x) - \cos(\frac{\pi x}{4})$ *et* $v(x) = 2^x - x^2 = e^{x\ln 2} - x^2$.
Passer ensuite par la notion de dérivée.

5) Utiliser les mêmes indications que les précédentes avec $u(x) = \sin x - \cos(\frac{1}{x})$ et $v(x) = e^x - e^{\frac{1}{x}}$ en séparant les cas $x \to 1^+$ et $x \to 1^-$.
Les questions où l'on utilise la dérivée, sont à faire après le chapitre sur la notion de dérivée.

Solution 2.36. :
Pour la première limite multiplier par les expressions conjuguées.
Pour la deuxième faire le changement de variable $x = \frac{1}{u}$ et utiliser $\lim\limits_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$.
Pour la troisième faire le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ et passer par $\lim\limits_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$.

Solution 2.37. :
1) Sachant qu'une fonction affine est de la forme $f(x) = ax + b$.
*Trouver a et b tels que $f(1) = 2$ et $f(2) = 4$ (ceci pour avoir $f(I) =]2, 4[\subset J$). Cette fonction sera continue de I **dans** J.*
Faire de même pour les autres.
2) Si f est affine $f(x) = \alpha x + \beta$ on a
$f(I) =]f(1), f(2)[$ si $\alpha > 0$ et $f(I) =]f(2), f(1)[$ si $\alpha < 0$.
De même $f(J) =]f(3), f(5)]$ si $\alpha > 0$ $f(J) = [f(5), f(3)[$ si $\alpha < 0$.
La seule possibilité d'avoir une bijection est entre J et K (en raison de la forme de J et K).

Solution 2.38. :
Revoir la solution détaillée de l'exercice (3).

Solution 2.39. :
Revoir la solution détaillée de l'exercice (4).

Solution 2.40. :
1) f est définie sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ si $\cos x \neq 0$, $\tan x$ définie et $\cos 2x \neq 0$. Donc $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $2x \neq \frac{\pi}{2}$.
2) Utiliser $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ et $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x(1 - \tan^2 x)$ pour déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2\tan x}{\cos 2x}$.

Solution 2.41. :
1) Calculer $\lim\limits_{x\to k^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to k^-} f(x)$.
2) Utiliser (1) et passer par le fait que la fonction $E(x)$ est continue en tout $x \neq k$ (pour tout $k \in \mathbb{Z}$).

Solution 2.42. :
Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour l'existence d'une solution avec $g(x) = -x^3 + x + 1$.
En étudiant le signe de la dérivée vérifier l'unicité.
Ou vérifier que si $x \neq y$ deux réels de $[1, 2]$ l'égalité $0 = -x^3 + x + 1 = -y^3 + y + 1$ donnerait $x^2 + xy + y^2 = 1$ ce qui est faux vu que $x \geq 1$ et $y \geq 1$.

Solution 2.43. :
Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$ considérer la fonction $h_n(x) = f(x) - x^n$.
Utiliser ensuite le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution 2.44. :
Considérer la fonction $h(x) = f(x) - f(x + \frac{b-a}{2})$ pour tout $x \in [a, \frac{b+a}{2}]$.
Utiliser ensuite le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution 2.45. :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, considérer $f(x) = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$.
$$f(\pi) = (-1) + 1 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$
Si n pair la réponse est immédiate. Si n est impaire utiliser le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0, \pi]$ après calcul de $f(0)$.

Solution 2.46. :
Considérer la fonction $h(x) = f(x)g(x) - x$ sur l'intervalle $[a, b]$.
Étudier les signes de $h(a)$ et $h(b)$. Utiliser ensuite le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution 2.47. :
1) Utiliser le fait que $g(x) = \alpha f(x) + \beta$, ($\alpha$ et β constantes et f continue).
2) Vérifier que $g(a)g(b) \leq 0$. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a, b]$.

Solution 2.48. :
En posant $m = \inf\limits_{s\in[a,b]} f(s)$ et $M = \sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)$, vérifier que
$$m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq M.$$
Utiliser ensuite le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a, b]$.

Solution 2.49. :
Considérer la fonction $h(x) = (b - x)f(x) + (a - x)f(a)$ sur $[a, b]$.
Vérifier que $h(a)h(b) < 0$ et que h est continue sur $[a, b]$, puis utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution 2.50. :
Considérer la fonction $h(x) = f(x) - bx$. Passer ensuite par le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a, b]$.

Solution 2.51. :
Justifier la continuité sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
Pour $x_o = k \in \mathbb{Z}$, vérifier que $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = x_o$.

<u>**Solution**</u> **2.52.** *:*
1) Vérifier que f est paire et justifier la continuité sur $]0,+\infty[$.
Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ en faisant le changement de variable $x=u^2$.

2) Vérifier que g est paire et justifier la continuité sur $]0,+\infty[$.
Choisir par exemple $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ et $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$.
Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)\neq \lim\limits_{n\to+\infty} g(y_n)$.
Conclure que g n'a pas de limite en 0.

3) Justifier la continuité de h sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$.
Faire le changement de variable $u=x+1$ (donc $x=u-1$), puis calculer $\lim\limits_{x\to -1} h(x)=\lim\limits_{u\to 0}\sin\frac{\pi}{2}u\ln|u|$.

<u>**Solution**</u> **2.53.** *:*
1) Pour $x>0$ utiliser l'inégalité $\frac{\pi}{x}\leq E(\frac{\pi}{x})\leq\frac{\pi}{x}+1$ et donc $\pi\leq xE(\frac{\pi}{x})\leq \pi+x$.
Déduire ensuite $\lim\limits_{x\to 0^+} xE(\frac{\pi}{x})$.
2) Pour $k\in\mathbb{N}^*$, traduire $E(\frac{\pi}{x})=k$ par $k\leq\frac{\pi}{x}<k+1$ pour avoir $I_k=]\frac{\pi}{k+1},\frac{\pi}{k}]$.
3) Pour $x\in I_k$, $f_k(x)=\sin(kx)$, et pour $x\in I_{k-1}$, $f_{k-1}(x)=\sin((k-1)x)$.
Écrire ensuite que $[0,\pi]=\{0\}\cup\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} I_k\right)$, et étudier la continuité en chaque $\frac{\pi}{k}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.

Chapitre 3

Dérivation d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

3.1 Rappels de cours

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, à bornes finies ou non.

Définitions

<u>**Définition**</u> **3.1.** *Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$.*

- *f est dite dérivable en un point a de I lorsque la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in I-\{a\}}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{R}$.*
  Cette limite est alors appelée la dérivée de f en a, et est notée $f'(a)$.

- *f est dite dérivable à droite (resp. à gauche) en a lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to a^+\\ x\in I-\{a\}}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to a^-\\ x\in I-\{a\}}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$) existe dans $\mathbb{R}$.*
  Cette limite lorsqu'elle existe est notée $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

- *Si A est une partie de I, on dit que f est dérivable sur A quand elle est dérivable en tout point de A.*

- *La fonction qui à x associe $f'(x)$ est la fonction dérivée de f. Elle est définie sur une partie de I.*

<u>**Remarque**</u> **3.1.** *La fonction dérivée de f est aussi notée $\dfrac{df}{dx}$ ou Df.*

Propriétés

Théorème 3.1. *Pour un point $a \in I$ vérifiant $\exists \alpha > 0$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[\subset I$, on a les équivalences :*

1. f *est dérivable en* $a \iff f$ *est dérivable à droite et à gauche en* a *et* $f'_g(a) = f'_d(a)$.
2. f *est dérivable en* $a \iff$ *il existe une fonction* φ *définie sur* I *et continue en* a *telle que pour tout* $x \in I$, $f(x) = f(a) + (x-a)\varphi(x)$.
3. f *est dérivable en* $a \iff$ *il existe un réel* A *et une fonction* ε *définie sur* I *et continue en* a *et nulle en* a *tels que,* *pour tout* $x \in I$, $f(x) = f(a) + (x-a)A + (x-a)\varepsilon(x)$. *Et alors* $A = f'(a)$.

Théorème 3.2. *Étant données* f *et* g *deux fonctions définies sur* I *et dérivables en* a *et un réel* λ, *alors*

- f *est continue en* a.
- *la fonction* $f+g$ *est dérivable en* a *et* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- *La fonction* λf *est dérivable en* a *et* $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
- *La fonction* fg *est dérivable en* a *et* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- *Si* f *ne s'annule pas sur l'intervalle* $]a-\alpha, a+\alpha[$ *tel que* $]a-\alpha, a+\alpha[\subset I$, *alors la fonction* $\frac{1}{f}$ *est dérivable en* a *et* $(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$.
- *Si* f *est continue et strictement monotone de* I *dans* $J = f(I)$ *et si* $f'(a) \neq 0$, *alors l'application réciproque* f^{-1} *est dérivable en* $b = f(a)$ *et* $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.
- *Si* h *est définie sur un intervalle* U *contenant* $f(I)$ *et dérivable en* $c = f(a)$ *alors* $h \circ f$ *est dérivable en* a *et* $(h\circ f)'(a) = f'(a) \times (h' \circ f)(a)$.

Dérivées successives

Définition 3.2. *i) On définit par récurrence la dérivée* $n^{\text{ème}}$ *de* f, *notée* $f^{(n)}$, *par* $f^{(o)} = f$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.
ii) On dit que f *est de classe* $\mathcal{D}^n$ *sur* I, *si toutes les dérivées* $f^{(p)}$ *existent et sont définies sur* I *pour* $p \in \{0, 1, \cdots, n\}$.
iii) On dit que f *est de classe* C^n *sur* I, *si toutes les dérivées* $f^{(p)}$ *existent et sont définies et continues sur* I *pour* $p \in \{0, 1, \cdots, n\}$.
iv) On dit que f *est de classe* C^∞ *sur* I, *si* f *est de classe* C^n *sur* I *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Formule de Leibnitz

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{D}^n$ sur I, alors la fonction fg est de classe $\mathcal{D}^n$ sur I. Et l'on a dans ce cas :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Composée de fonctions de classe C^n

Soit f et h deux fonctions de classe C^n sur I et J respectivement, avec $f(I) \subset J$, alors $h \circ f$ est de classe C^n sur I.

3.2 Énoncés des exercices

Exercice 3.1. :
Étudier la dérivabilité à droite, la dérivabilité à gauche et la dérivabilité des fonctions suivantes :

1) La fonction f *définie par* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow f(x) = |x^2 - 4|$

2) La fonction g *définie par* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow g(x) = \begin{cases} x & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$

Exercice 3.2. :
Étudier la dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \sqrt{|x| + \sqrt{|x|}}$
2) $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
3) $h(x) = (x^x)^x$
4) $k(x) = x^{(x^x)}$

Exercice 3.3. :
On considère la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

— *1) Montrer que la fonction définie pour* $x \neq 0$ *par* $g(x) = \cos\frac{1}{x}$ *n'admet pas de limite en* $x_o = 0$.
— *2) Montrer que la fonction* f *est continue en* $x_o = 0$.
— *3) Montrer que la fonction* f *est dérivable en* $x_o = 0$ *et en tout* $x \neq 0$.
— *4) Montrer que la fonction* f', *dérivée de* f *sur* $\mathbb{R}$, *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *mais ne l'est pas en* $x_o = 0$.

Exercice 3.4. :
Soit $a \in \mathbb{R}$. *On pose* $f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin\frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$
1) Pour quelles valeurs de a *la fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *?*
2) Pour quelles valeurs de a *la fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *?*
3) Pour quelles valeurs de a *la fonction* f *est deux fois dérivables sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 3.5. :
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, *dérivable et telle que* $f(0) = f(1)$. *On définit l'application* g *par*
$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow g(x) = \begin{cases} f(2x) & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & si\ \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$
1) Montrer que g *est continue.*
2) A quelle condition g *est dérivable ?*

Exercice 3.6. :
Calculer les dérivées des fonctions suivantes (où la variable est notée x*) :*

a) $f(x) = \frac{1}{(a+x)^m (b+x)^n}$ b) $g(x) = \sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}$

c) $h(x) = \ln \frac{a+b\tan x}{a-b\tan x}$ d) $k(x) = \ln\left[\ln\left(\ln x\right)\right]$

e) $l(x) = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} e^{ax}$

Exercice 3.7. :
On considère la fonction définie par $f(x) = x^3 + x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que la fonction* f *admet une fonction réciproque* h.
2. *Préciser la parité de* h, *sa monotonie et donner son tableau de variation.*
3. *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) \leq x$.
4. *Déterminer la limite :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{h^3(x)}$.
5. *Montrer que la fonction* h *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
6. *Calculer* $h'(2)$.

Exercice 3.8. :
1) Montrer que la dérivée de l'application $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ *est une application croissante.*
2) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+) \qquad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

Exercice 3.9. :
Soient a *et* b *deux réels positifs. On considère la fonction* f *à variable réelle, définie par* $f(x) = a^3 + b^3 + x^3 - 3abx$.
1) Étudier les variations de f.
2) En déduire que pour tous réels a, b *et* c *de* $\mathbb{R}_+$:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Exercice 3.10. :
Calculer $f^{(n)}(x)$:
1) pour $n = 0, 1, 2, 3$ *et* 4 *et* $f(x) = \cos x$;
2) pour $f(x) = e^{-x}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.11. :
Soit $n \in \mathbb{N}$. *Calculer la dérivée d'ordre* n *des fonctions suivantes :*
1) $f(x) = e^x \sin x$.
2) $g(x) = e^x x^p$ *pour* $p \in \mathbb{N}^*$.
3) $h(x) = x^k \cos x$ *pour* $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.12. :
Calculer les dérivées $n^{\text{ème}}$ *des fonctions suivantes :*
1) $f(x) = \frac{1}{(x-a)}$.
2) $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$.
3) $h(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}$.

Exercice 3.13. :
On considère la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
1) Donner l'ensemble de définition de f *et étudier sa dérivabilité.*
2) Calculer pour $x \in]-1, 1[\qquad u(x) = \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}$
$v(x) = \sqrt{1-x^2}\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{1-x^2}$ *et* $w(x) = \sqrt{1-x^2}\frac{d^3}{dx^3}\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 3.14. :
Soient a *et* b *deux nombres réels. En dérivant* n*-fois la relation* $e^{(a+b)x} = e^{ax}e^{bx}$, *retrouver la formule du binôme de Newton.*

Exercice 3.15. :
On définit la fonction numérique f *par :*
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$
1) Vérifier que f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
2) Calculer sa dérivée f' *et montrer qu'elle est continue sur* $\mathbb{R}$.
3) Calculer sa dérivée seconde f'' *et montrer qu'elle est continue sur* $\mathbb{R}$.
4) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ *que si* $x \neq 0$, $f^{(n)}(x)$ *est de la forme* $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ *où* P_n *est un polynôme de degré* $3n$.
5) En déduire que f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3.16. :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \end{array} \quad \text{et} \quad g_n = (f_n)^{(n)}.$$

Exprimer g_{n+2} *en fonction de* g_{n+1} *et* g'_n. *En déduire que*

$$(f_n)^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1} e^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 3.17. :
Pour $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.
1) Calculer $H_n(x)$ *pour* $n = 0, 1, 2, 3, 4$ *et* 5.
2) Montrer que $H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3) Montrer que $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
4) En déduire que $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Et que $\left(2x - \frac{d}{dx}\right) H_n(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x) = H_{n-1}(x)$
et $2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.18. :
1) Préciser quelles sont les applications f *définies, continues et dérivables sur* $\mathbb{R}$ *telles que*
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$
2) Préciser quelles sont les applications g *définies, continues et dérivables sur* $\mathbb{R}$ *telles que*
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad g(x+y) - g(x-y) = 4xy.$

3.3 Solutions détaillées des exercices

Solution 3.1. :

1) On a $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ 4 - x^2 & \text{si } x \in]-2, 2[\end{cases}$

Sur $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ *et sur* $]-2, 2[$ *la fonction* f *est dérivable car c'est un polynôme sur chacun de ces intervalles (en passant par les théorèmes du cours).*

Le problème c'est en $x_o = 2$ *et en* $x_1 = -2$.

On a $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x^2 - 4) - 0}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} x + 2 = 4 = f'_d(2)$

et $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(4 - x^2) - 0}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} -(x + 2) = -4 = f'_g(2)$

f *est donc dérivable à droite avec* $f'_d(2) = 4$ *et dérivable à gauche avec* $f'_g(2) = -4$, *mais n'est pas dérivable en* $x_o = 2$ *puisque* $4 \neq -4$.

On obtient la même chose avec $f'_d(-2) = 4$ *et* $f'_g(-2) = -4$.

2) Sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *la fonction* g *est dérivable car c'est un polynôme sur chacun des intervalles* $]-\infty, 0[$ *et* $]0, +\infty[$.

Pour 0 *la fonction* g *est définie par une autre expression. On utilise la définition pour étudier la dérivée.*

On a donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 1}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - \dfrac{1}{x}) = -\infty$

et de même $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = +\infty$.

La fonction g *n'est pas dérivable à droite de* 0, *ni à gauche de* 0. *Et donc non dérivable en* 0.

Solution 3.2. :

1) La fonction $u(x) = |x|$ *est continue et dérivable sur* $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, *donc* $v(x) = |x| + \sqrt{|x|}$ *est continue et dérivable sur* $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. *Et par suite* $f(x)$ *est continue et dérivable sur* $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *(car composée et somme de fonctions dérivables sur* $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$*).*

Et l'on a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\sqrt{|x| + \sqrt{|x|}}) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\sqrt{x + \sqrt{x}})}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}} = +\infty.$$

Ainsi f *n'est pas dérivable à droite en* 0. *Donc non dérivable en* 0.

Pour calculer la dérivée en $x \neq 0$ *on a :*

Si $x > 0$, *alors* $f(x) = \sqrt{v(x)}$ *où* $v(x) = x + \sqrt{x}$ *et* $v'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

et $$f'(x) = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}} = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$$

Si $x < 0$, *alors* $f(x) = \sqrt{u(x)}$ *où* $u(x) = -x + \sqrt{-x}$ *et* $u'(x) = -1 - \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$

$$f'(x) = \frac{-1 + \frac{-1}{2\sqrt{-x}}}{2\sqrt{-x + \sqrt{-x}}} = \frac{-2\sqrt{-x} - 1}{4\sqrt{x^2 - x\sqrt{-x}}}$$

2) La fonction $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ *est une composée de fonctions. On fait le raisonnement suivant :*

D'abord, la fonction $u(x) = x^2 + 1$ *est un polynôme, donc dérivable sur* $\mathbb{R}$.

On compose avec la fonction racine qui est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. *Comme* $u(x) \geq 1$, *on a* $u(x) \in]0, +\infty[$ $\forall x \in \mathbb{R}$ *et par suite* $v(x) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$ *est dérivable en tout* $x \in \mathbb{R}$.

Et donc la fonction $w(x) = x + v(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(somme du polynôme* x *et de* $v(x)$*).*

Remarquons ensuite que :

$x \geq 0 \Rightarrow w(x) \geq x + 1 \geq 1 > 0$

et $x < 0 \Rightarrow w(x) > x + \sqrt{x^2} = x + |x| = x - x = 0$.

Ce qui donne $w(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Comme la fonction $\ln(t)$ *est dérivable en tout* $t > 0$, *on en déduit que la composée* $\ln(w(x)) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ *est définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$.

Finalement la fonction $g(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *tout entier.*

Et l'on écrit que

$$\begin{aligned} g'(x) = (\ln(w(x)))' &= \frac{w'(x)}{w(x)} &&= \frac{1 + v'(x)}{w(x)} \\ &= \frac{1 + \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}{w(x)} &&= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}(\sqrt{x^2 + 1} + x)} &&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

3) Par définition de la fonction puissance, on a : $a^b = e^{b \ln a}$ *et donc*

$h(x) = (x^x)^x = e^{x \ln(x^x)} = e^{x(x \ln x)} = e^{x^2 \ln x}$

La fonction $u(x) = \ln x$ *est définie, continue et dérivable en tout* $x > 0$. *On multiplie par le polynôme* $v(x) = x^2$ *qui est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *donc* $w(x) = x^2 \ln x$ *est dérivable en tout* $x > 0$.

On compose avec la fonction exponentielle qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On obtient $h(x) = e^{w(x)}$ *qui est donc dérivable en tout* $x > 0$.

Finalement la fonction $h(x)$ *est définie, continue et dérivable sur* $]0, +\infty[$.

Et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$h'(x) = w'(x)e^{w(x)} = (2x \ln x + x^2 \frac{1}{x})e^{x^2 \ln x} = x(2 \ln x + 1)e^{x^2 \ln x}$.

On peut même écrire que $h'(x) = x(2 \ln x + 1)x^{x^2} = (2 \ln x + 1)x^{x^2 + 1}$.

4) De même $k(x) = x^{(x^x)} = e^{(x^x) \ln x} = e^{(e^{x \ln x}) \ln x}$ *est définie, continue et dérivable sur* $]0, +\infty[$ *comme composée des fonction suivantes :*

posons $u(t) = \ln t$, $v(s) = e^s$, $w(z) = z$, *donc* k *s'écrit*

$k(x) = v\left(v\left(w(x)u(x)\right)u(x)\right)$ *comme composée et produits de fonctions dérivables sur* $]0, +\infty[$.

Et pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} k'(x) &= \left((e^{x \ln x}) \ln x\right)' e^{(e^{x \ln x}) \ln x} &&= \left((e^{x \ln x})' \ln x + e^{x \ln x}(\ln x)'\right) x^{(x^x)} \\ &= \left((\ln x + 1)e^{x \ln x} \ln x + e^{x \ln x}\frac{1}{x}\right) x^{(x^x)} &&= \left((\ln x + 1) \ln x + \tfrac{1}{x}\right) e^{x \ln x} x^{(x^x)} \\ &= \left((\ln x + 1) \ln x + \frac{1}{x}\right) e^{\ln x^x} x^{(x^x)} &&= \left((\ln x + 1) \ln x + \tfrac{1}{x}\right) x^x x^{(x^x)} \end{aligned}$$

Solution 3.3. — *1) La fonction* $g(x) = \cos \frac{1}{x}$ *n'admet pas de limite en* 0 *car les*

deux suites de termes généraux $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ ont pour limite 0.
Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(y_n) = 0$ sont différentes.

— 2) D'après la majoration $|x^2\sin\frac{1}{x}| \leq x^2$ et le résultat $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x^2 = 0$,

on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$.

Ce qui assure la continuité en 0.

— 3) En $x_o = 0$ on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

(d'après la majoration $|x\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$).
Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ -(car composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$)-
f est alors dérivable sur $\mathbb{R}$.

— 4) Pour $x \neq 0$,
$f'(x) = (x^2\sin\frac{1}{x})' = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$
on a vu que $x\sin\frac{1}{x}$ tend vers 0 et que $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0. Par suite $f'(x)$ n'a pas de limite en 0 et donc f' n'est pas continue en 0.

Solution 3.4. :
Notons les fonctions suivantes :
$u(t) = |t|^a$, $v(s) = \frac{1}{s}$ et $w(q) = \sin q$.
La fonction f s'écrit $f(x) = u(x) \times w(v(x))$.
v est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. w est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc la composée $w(v(x))$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction $u(x) = |x|^a$ étant définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, donc le produit donne $f(x)$ qui est continue sur $\mathbb{R}^*$.
Il nous reste à étudier la continuité en 0 :
1^{er} cas $a > 0$
On sait que $\forall x \neq 0$, $|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$,
ce qui donne $\forall x \neq 0$, $|f(x)| = \big||x|^a\sin\frac{1}{x}\big| \leq |x|^a$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0}|x|^a = 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Ainsi f est continue en 0 et par suite continue sur $\mathbb{R}$.
$2^{ème}$ cas $a = 0$
$\forall x \neq 0$ $f(x) = \sin\frac{1}{x}$
On sait que cette fonction n'a pas de limite en 0.
Donc f n'est pas continue en 0.
$3^{ème}$ cas $a < 0$
La fonction $|x|^a = \frac{1}{|x|^{-a}}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 et $\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.
Par suite $f(x)$ n'a pas de limite en 0.
Finalement :
f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 0$.
2) Puisque f n'est continue sur $\mathbb{R}$ que pour $a > 0$, pour la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ on étudie seulement les cas $a > 0$.
Sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ la fonction f est dérivable sans problème car produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

En $x_o = 0$, on écrit

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{|t|^a\sin\frac{1}{t} - 0}{t-0} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t^{a-1}\sin\frac{1}{t}.$$

1^{er} cas $a > 1$
On a : $\forall t > 0$, $0 \leq |t^{a-1}\sin\frac{1}{t}| \leq t^{a-1}$ (car $|\sin\frac{1}{t}| \leq 1$ et $0 < t^{a-1}$).
Comme $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t^{a-1} = 0$, on a aussi $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t^{a-1}\sin\frac{1}{t} = 0$.

Par suite $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = 0$

et f est dérivable à droite en $x_o = 0$.
De la même façon on obtient $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = 0$, donc f est dérivable à gauche en $x_o = 0$.
Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
On conclut que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$2^{ème}$ cas $a = 1$ ou $0 < a < 1$
A cause de la fonction $\sin\frac{1}{t}$ qui n'a pas de limite en 0 et de la fonction $t^{a-1} = \dfrac{1}{t^{1-a}}$ qui tend vers l'infini en 0 lorsque $0 < a < 1$,
la limite $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t^{a-1}\sin\dfrac{1}{t}$ n'existe pas et donc f n'est pas dérivable en 0.
Finalement on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 1$.

3) Pour étudier la dérivabilité deux fois, f doit d'abord être dérivable une fois. On doit donc travailler avec $a > 1$.
D'abord on a $f'(x)$ est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} ax^{a-1}\sin\frac{1}{x} + x^a(-\frac{1}{x^2})\cos\frac{1}{x} = ax^{a-1}\sin\frac{1}{x} - x^{a-2}\cos\frac{1}{x} & \text{si } x > 0\\ = -a(-x)^{a-1}\sin\frac{1}{x} - (-x)^{a-2}\cos\frac{1}{x} & \text{si } x < 0\\ f'(0) = 0 & \text{si } x = 0\end{cases}$$

On aura donc
1^{er} cas $a > 2$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{f'(t)-f'(0)}{t-0} = \lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} \frac{f'(s)-f'(0)}{s-0} = 0$$

et donc $f''(0) = 0$ (ceci en passant par les majorations $|ax^{a-1}\sin\frac{1}{x}| \leq |ax^{a-1}|$ et $|x^{a-2}\cos\frac{1}{x}| \leq |x^{a-2}|$).
$2^{ème}$ $1 < a \leq 2$
la fonction $x^{a-2}\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 et donc f' n'est pas dérivable en 0.
Comme f' est dérivable sans problème sur $\mathbb{R}^*$, on conclut que :
f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 2$.

Solution 3.5. :
1) Notons $u(x) = 2x$ et $v(x) = 2x - 1$. La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $[0, \frac{1}{2}[$ avec $u([0, \frac{1}{2}[) = [0, 1[$. Comme f est continue sur $[0, 1[$, $g(x) = f(u(x))$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}[$.
Par un raisonnement semblable $g(x) = f(v(x))$ est continue sur $]\frac{1}{2}, 1]$.
En $x_o = \frac{1}{2}$, on a :

$\lim\limits_{x\to\frac12^-} g(x) = \lim\limits_{x\to\frac12^-} f(2x) = f(1) = g(\frac12)$
et $\lim\limits_{x\to\frac12^+} g(x) = \lim\limits_{x\to\frac12^+} f(2x-1) = f(0)$
ceci car f est continue en 0 *et en* 1.
L'hypothèse $f(0)=f(1)$ *nous permet d'écrire que*
$\lim\limits_{x\to\frac12^+} g(x) = \lim\limits_{x\to\frac12^+} g(x) = g(\frac12)$.
Ainsi g *est continue en* $\frac12$ *et par suite continue sur* $[0,1]$.

2) g *est dérivable sur* $[0,\frac12[$ *et sur* $]\frac12,1]$ *car composée de fonctions dérivables (raisonnement identique à (1)).*
En $x_o=\frac12$, *on a :*

$$\lim_{x\to\frac12^-}\frac{g(x)-g(\frac12)}{x-\frac12} = \lim_{x\to\frac12^-}\frac{f(2x)-f(1)}{x-\frac12} = \lim_{x\to\frac12^-} 2\frac{f(2x)-f(1)}{2x-1}$$
$$= 2\lim_{u\to1^-}\frac{f(u)-f(1)}{u-1} = 2f'_g(1).$$
$$\lim_{x\to\frac12^+}\frac{g(x)-g(\frac12)}{x-\frac12} = \lim_{x\to\frac12^+}\frac{f(2x-1)-f(0)}{x-\frac12} = \lim_{x\to\frac12^+} 2\frac{f(2x-1)-f(0)}{2x-1}$$
$$= 2\lim_{u\to0^+}\frac{f(u)-f(0)}{u-0} = 2f'_d(0).$$

Puisque f *est dérivable en* 0 *et en* 1, g *est dérivable à gauche de* $\frac12$ *avec* $g'_g(\frac12)=2f'_g(1)$ *et aussi dérivable à droite de* $\frac12$ *avec* $g'_d(\frac12)=2f'_d(0)$.
Pour que g *soit dérivable en* $\frac12$ *il nous faut* $f'_g(1)=f'_d(0)$ *(la dérivée à gauche de* f *en* 1 *doit être égale à la dérivée à droite de* f *en* 0*).*

<u>Solution</u> 3.6. :
a) On a $f(x)=\frac{1}{(a+x)^m(b+x)^n} = u(x)v(x)$ *avec* $u(x)=(a+x)^{-m}$ *et* $v(x)=(b+x)^{-n}$
Donc
$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = (-m(a+x)^{-m-1})(b+x)^{-n}+(a+x)^{-m}(-n(b+x)^{-n-1})$
$=[-m(b+x)-n(a+x)]((a+x)^{-m-1}(b+x)^{-n-1})$.
D'où

$$f'(x)=\frac{-m(b+x)-n(a+x)}{(a+x)^{m+1}(b+x)^{n+1}} \quad \text{pour tout } x\neq -a \text{ et } x\neq -b$$

b) On a $g(x)=\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}=\sqrt{u(x)}$ *avec* $u(x)=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=\frac{s(x)}{t(x)}$,
$s(x)=1+x+x^2$ *et* $t(x)=1-x+x^2$.
Comme $u'(x)=\frac{s'(x)t(x)-s(x)t'(x)}{(s(x))^2} = \frac{(1+2x)(1-x+x^2)-(1+x+x^2)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2}$
$=\frac{2-2x^2}{(1-x+x^2)^2}=2\frac{1-x^2}{(1-x+x^2)^2}$,
on a

$$g'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2\frac{1-x^2}{(1-x+x^2)^2}}{2\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}}.$$

D'où

$$g'(x)=\frac{1-x^2}{(1-x+x^2)^2}\sqrt{\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}}.$$

Remarque :
g *est dérivable sur* ℝ *puisque les deux polynômes* $1-x+x^2$ *et* $1+x+x^2$ *ne s'annulent jamais sur* ℝ *(leurs discriminants sont négatifs).*

c) On a $h(x)=\ln\frac{a+b\tan x}{a-b\tan x} = \ln u(x)$ *avec* $u(x)=\frac{a+b\tan x}{a-b\tan x}=\frac{s(x)}{t(x)}$.
Comme
$u'(x)=\frac{s'(x)t(x)-s(x)t'(x)}{(t(x))^2} = \frac{b(1+\tan^2x)(a-b\tan x)-(a+b\tan x)(-b(1+\tan^2 x))}{(a-b\tan x)^2}$
$=\frac{2ab(1+\tan^2x)}{(a-b\tan x)^2}$
On aura donc

$$h'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{2ab(1+\tan^2 x)}{(a-b\tan x)^2}}{\frac{a+b\tan x}{a-b\tan x}}$$
$$=\frac{2ab(1+\tan^2x)}{(a-b\tan x)^2}\times\frac{a-b\tan x}{a+b\tan x}.$$

D'où

$$h'(x)=\frac{2ab(1+\tan^2 x)}{(a-b\tan x)(a+b\tan x)} = \frac{2ab(1+\tan^2x)}{a^2-b^2\tan^2x}.$$

d) On a $k(x)=\ln[\ln(\ln x)] = \ln u(x)$ *avec* $u(x)=\ln v(x)=\ln(\ln x)$ *et* $v(x)=\ln x$.
Comme $v'(x)=\frac1x$, *on a* $u'(x)=\frac{v'(x)}{v(x)}=\frac{1}{x\ln x}$
et $k'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\frac{1}{x\ln x}}{\ln(\ln x)}$
D'où

$$k'(x)=\frac{1}{x(\ln x)(\ln(\ln x))}.$$

e) On a $l(x)=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}=u(x)v(x)$ *avec* $u(x)=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}$ *et* $v(x)=e^{ax}$.
Comme $u'(x)=\frac{-ab\sin bx+b^2\cos bx}{a^2+b^2}$ *et* $v'(x)=ae^{ax}$,
on a

$$\begin{aligned} l'(x) &= u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = \frac{-ab\sin bx+b^2\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}ae^{ax} \\ &= \left[\frac{-ab\sin bx+b^2\cos bx}{a^2+b^2}+\frac{a^2\cos bx+ab\sin bx}{a^2+b^2}\right]e^{ax} \\ &= \left[\frac{-ab\sin bx+b^2\cos bx+a^2\cos bx+ab\sin bx}{a^2+b^2}\right]e^{ax}\end{aligned}$$

D'où

$$l'(x)=e^{ax}\cos bx.$$

<u>Solution</u> 3.7. :

— *1) La fonction* $f(x)=x^3+x$ *est un polynôme donc continue et dérivable sur* ℝ.
Et l'on a $f'(x)=3x^2+1$ *qui est strictement positive.*
Par suite f *est une fonction strictement croissante et continue. D'après les*

théorèmes du cours, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$ où $f(\mathbb{R}) =]\lim_{t\to-\infty} f(t), \lim_{s\to+\infty} f(s)[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.
Ainsi la fonction f admet une réciproque notée h définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

— *2) On a pour tout $z \in \mathbb{R}$, $f(-z) = -z^3 - z = -(z^3+z) = -f(z)$. f est alors impaire et sa réciproque est aussi impaire.*
En effet
Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h(-x) &= h(-f(z)) && \text{avec } x = f(z) \Leftrightarrow h(x) = z \\ &= h(f(-z)) && \text{car } f \text{ impaire} \\ &= -z && \text{car } (h\circ f)(t) = t \\ &= -h(x) && \text{car } z = h(x) \end{aligned}$$

d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = -h(x)$ et donc h est impaire.
On sait que h a la même monotonie que f. Donc h est strictement croissante et
$\lim_{s\to+\infty} h(s) = +\infty$ *et* $\lim_{t\to-\infty} h(t) = -\infty$.

— *3) On a pour tout $z \in \mathbb{R}_+$, $f(z) = z^3 + z \geq z$*
Et donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $f(h(x)) \geq h(x)$ ($x \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq h(0) = 0$ puisque h croissante).
Ce qui donne pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $x \geq h(x)$

— *4) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(h(x)) = x$ et donc $(h(x))^3 + h(x) = x$*
ce qui donne $\dfrac{x}{(h(x))^3} = 1 + \dfrac{1}{(h(x))^2}$
On passe à la limite en écrivant que
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{(h(x))^3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{(h(x))^2}\right) = 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(h(x))^2} = 1,$$
ceci car $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.
D'où le résultat
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{h^3(x)} = 1.$$

— *5) Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais ($f'(x) = 3x^2+1 \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$), alors sa réciproque h est aussi dérivable sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.*

— *6) D'après les résultats sur la dérivée de la réciproque, on a*
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \dfrac{1}{f'(h(x))}$.
Pour $x = 2$, $h'(2) = \dfrac{1}{f'(h(2))}$
comme $f(1) = 2$ donne $1 = h(2)$, on obtient
$$h'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

Solution 3.8. :
1) La dérivée de l'application $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ est donnée par $f'(x) = -\sin x + x$.
La dérivée de cette dérivée est $(f')'(x) = f''(x) = -\cos + 1$ qui est donc positive puisque $\cos x \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Par suite l'application $f'(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) D'après (1), pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \geq f'(0)$ avec $f'(0) = 0$.
Ce qui assure que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (sa dérivée étant positive).
Et donc pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq f(0) \geq 0$.
En plus pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $(-x) \in \mathbb{R}_+$ et $f(-x) = f(x)$ avec $f(-x) \geq 0$.
D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$. Et par suite
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

3) En posant $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, sa dérivée donne
$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = f(x)$.
Comme f est positive, en particulier sur $\mathbb{R}_+$, g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Et donc
$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\quad g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq g(0) = 0$.
C'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$.
Et d'après (1) on a vu que $f'(x) = x - \sin x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}_+$.
Et donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = x - \sin x \geq f'(0) = 0$.
Finalement
$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \qquad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

Solution 3.9. :
1) Dérivons la fonction $f(x) = a^3 + b^3 + x^3 - 3abx$, on trouve $f'(x) = 3x^2 - 3ab = 3(x^2 - ab)$. Comme a et b sont deux réels positifs, $f'(x)$ est négative sur l'intervalle $[-\sqrt{ab}, \sqrt{ab}]$ et positive sur $]-\infty, -\sqrt{ab}[\cup]\sqrt{ab}, +\infty[$. Donc f est décroissante sur $[-\sqrt{ab}, \sqrt{ab}]$ et croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, -\sqrt{ab}[$ et $]\sqrt{ab}, +\infty[$.

2) D'après (1), f atteint son minimum sur $\mathbb{R}_+$ en $x_o = \sqrt{ab}$.
Par suite, pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, $f(c) \geq f(\sqrt{ab})$.
Ce qui donne, pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq a^3 + b^3 - 2ab\sqrt{ab}$.
Or $a^3 + b^3 - 2ab\sqrt{ab} = (a\sqrt{a} - b\sqrt{b})^2$ est positive.
On en déduit que pour tous réels a, b et c de $\mathbb{R}_+$: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$.
D'où le résultat :
$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \qquad a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Solution 3.10. :
1) Pour $f(x) = \cos x$, on a $f^{(o)}(x) = f(x) = \cos x$ et :
$f'(x) = -\sin x \qquad f''(x) = (f')'(x) = -\cos x$
$f^{(3)}(x) = (f^{(2)})'(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(x) = (f^{(3)})'(x) = \cos x = f(x)$.
A partir de ce calcul on peut écrire en général

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= f(x) = \cos x && \text{si } n = 4k,\ k \in \mathbb{N} \\ f^{(n)}(x) &= f'(x) = -\sin x && \text{si } n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ f^{(n)}(x) &= f''(x) = -\cos x && \text{si } n = 4k+2,\ k \in \mathbb{N} \\ f^{(n)}(x) &= f^{(3)}(x) = \sin x && \text{si } n = 4k+3,\ k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(ceci en faisant une récurrence sur k).
On résume ces cas en écrivant que $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$
(en passant par la formule $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$).

2) Pour $f(x) = e^{-x}$ et $n \in \mathbb{N}$.
$f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x} = f(x)$
Et en général :

$f^{(n)}(x) = e^{-x}$ *si n est pair et* $f^{(n)}(x) = -e^{-x}$ *si n est impair.*
C'est à dire $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$ *(qu'on peut vérifier par récurrence).*

Solution 3.11. *:*
Soit $n \in \mathbb{N}$.
1) Pour $f(x) = e^x \sin x$*, on a*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x).\\
f''(x) &= (f'(x))' = (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)'\\
&= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)\\
&= 2e^x \cos x.\\
f^{(3)}(x) &= (f''(x))' = (2e^x\cos x)' = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x = 2e^x(\cos x - \sin x)\\
f^{(4)}(x) &= 2e^x\left[(\cos x - \sin x) + (-\sin x - \cos x)\right] = -4e^x \sin x = (-4)f(x).
\end{aligned}$$

on retrouve f multiplié par -4.
Et par récurrence :
$f^{(8)}(x) = f^{(4\times 2)}(x) = (f^{(4)})^{(4)}(x) = \left((-4f)^{(4)}\right)(x) = (-4)(f^{(4)})(x) = (-4)^2 f(x)$
et en général $f^{(4k)}(x) = (-4)^k f(x)$ *pour* $k \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, faisons la division euclidienne de n par 4. On aura $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$ ou $r = 3$.
Par suite $f^{(4k+r)}(x) = (f^{(4k)})^{(r)}(x) = ((-4)^k f)^{(r)}(x) = (-4)^k (f^{(r)}(x))$.
D'où le résultat

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-4)^k e^x \sin x & si\ n = 4k\ \ (k \in \mathbb{N})\ (n\ multiple\ de\ 4\ (r=0))\\ (-4)^k(\sin x + \cos x)e^x & si\ n = 4k+1\ (k \in \mathbb{N})\ (r=1)\\ (-4)^k(2\cos x)e^x & si\ n = 4k+2\ (k \in \mathbb{N})\ (r=2)\\ (-4)^k(-\sin x + \cos x)e^x & si\ n = 4k+3\ (k \in \mathbb{N})\ (r=3)\end{cases}$$

2) Pour $g(x) = e^x x^p$ *avec* $p \in \mathbb{N}^*$*, en utilisant la formule de Leibnitz, on a :*
$g^{(n)}(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m (x^p)^{(m)} (e^x)^{(n-m)}$.
Sachant que : $(e^x)^{(n-m)} = e^x$, $(x^p)^{(0)} = x^p$ *et que*
$(x^p)^{(m)} = p(p-1)\cdots(p-m+1)x^{p-m} = \frac{p!}{(p-m)!}x^{p-m}$ *si* $p \geq m > 1$ *et* $(x^p)^{(m)} = 0$ *si* $m > p$,
on obtient
1^{er} *cas* $n \leq p$

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(x) &= \left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m \tfrac{p!}{(p-m)!}x^{p-m}\right)e^x\\
&= \left(C_n^0 x^p + C_n^1 p x^{p-1} + C_n^2 p(p-1)x^{p-2} + \cdots + C_n^n \tfrac{p!}{(p-n)!}x^{p-n}\right)e^x.
\end{aligned}$$

$2^{ème}$ *cas* $n > p$

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(x) &= \sum_{m=0}^{n} C_n^m (x^p)^{(m)}(e^x)^{(n-m)}\\
&= \sum_{m=0}^{p} C_n^m (x^p)^{(m)}(e^x)^{(n-m)} \quad (car\ (x^p)^{(m)} = 0\ pour\ m > p)\\
&= \left(\sum_{m=0}^{p} C_n^m \tfrac{p!}{(p-m)!}x^{p-m}\right)e^x\\
&= \left(C_n^0 x^p + C_n^1 p x^{p-1} + C_n^2 p(p-1)x^{p-2} + \cdots + C_n^{p-1} p!x + C_n^p p!\right)e^x
\end{aligned}$$

3) Pour $h(x) = x^k \cos x$ *pour* $k \in \mathbb{N}^*$*, on utilise la formule de Leibnitz.*
Soit $n \in \mathbb{N}$
1^{er} *cas* $n \leq k$
$h^{(n)}(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m (x^k)^{(m)}(\cos x)^{(n-m)} = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m \frac{k!}{(k-m)!}x^{k-m}\cos(x + (n-m)\frac{\pi}{2})$.
$2^{ème}$ *cas* $n > k$
Comme les dérivées $(x^k)^{(m)}$ deviennent nulles pour $m > k$, il reste la somme jusqu'à k.
$h^{(n)}(x) = \sum\limits_{m=0}^{k} C_n^m (x^k)^{(m)}(\cos x)^{(n-m)} = \sum\limits_{m=0}^{k} C_n^m \frac{k!}{(k-m)!}x^{k-m}\cos(x + (n-m)\frac{\pi}{2})$.

On a par exemple :
$h'(x) = kx^{k-1}\cos x - x^k \sin x = kx^{k-1}\cos x + x^k\cos(x + \frac{\pi}{2})$.
$h''(x) = k(k-1)x^{k-2}\cos x + kx^{k-1}\cos(x + \frac{\pi}{2}) + kx^{k-1}\cos(x + \frac{\pi}{2}) + x^k\cos(x + 2\frac{\pi}{2})$
$= k(k-1)x^{k-2}\cos x + 2kx^{k-1}\cos(x + \frac{\pi}{2}) + x^k\cos(x + 2\frac{\pi}{2})$ *(avec $k \geq 2$).*

Solution 3.12. *:*
1) Pour $f(x) = \frac{1}{x-a}$*, on écrit* $f(x) = (x-a)^{-1}$ *et par suite*
$f'(x) = (-1)(x-a)^{-2}$, $f''(x) = (-1)(-2)(x-a)^{-3} = 2!(-1)^2(x-a)^{-3}$
Faisons l'hypothèse de récurrence
$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x-a)^{-n-1}$
Pour $n+1$ on aura :
$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left((-1)^n n!(x-a)^{-n-1}\right)' = (-1)^n n!(-(n+1))(x-a)^{-n-1-1}$
et donc $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!(x-a)^{-n-2}$.
D'où le résultat

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x-a)^{-n-1} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}.$$

2) Pour $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ *on utilise la décomposition en éléments simples. Ce qui donne*
$g(x) = \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}$*, et ensuite :*
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^{(n)}(x) = \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)^{(n)}$.
En utilisant la question (1) avec $a = 1$, puis $a = -1$, on trouve pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$g^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left[\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right] = \frac{1}{2}(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$.
3) Pour $h(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}$*, on utilise la décomposition en éléments simples. Ce qui donne*
$h(x) = \frac{\alpha}{(x-1)} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{(x+1)} + \frac{\lambda}{(x+1)^2}$,
après calcul, on trouve $\frac{1}{4} = -\alpha = \beta = \gamma = \delta$ *et donc*
$h(x) = \frac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{(x-1)} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)^2}\right)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. En faisant comme avant, on a :
$\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)^{(n)} = \left((x-1)^{-2}\right)^{(n)} = (-2)(-3)\cdots(-2-n+1)x^{-2-n}$
$= \dfrac{(-1)^n 2\times 3\cdots(n+1)}{(x-1)^{n+2}} = \dfrac{(-1)^n(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$.
Et de même

$$\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}.$$

Finalement on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$h^n(x) = \frac{1}{4}\left(-\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n+1)!}{(x-1)^{n+2}} + \frac{(-1)^n(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}\right)$$

Qu'on peut écrire sous la forme : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$h^n(x) = \frac{1}{4}(-1)^n n!\left(-\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{(n+1)}{(x-1)^{n+2}} + \frac{(n+1)}{(x+1)^{n+2}}\right).$$

Solution 3.13. :

1) La fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2} = u(v(x))$ est composée de $v(s) = 1 - s^2$ et $u(t) = \sqrt{t}$.

Notons D_f, D_u et D_v les ensembles de définition respectivement de f, u et v.

On sait que $D_v = \mathbb{R}$ et $D_u = [0,+\infty[$. Et l'on a

$$\begin{aligned}
x \in D_f &\Leftrightarrow f(x) \text{ est définie}\\
&\Leftrightarrow v(x) \text{ est définie et } v(x) \in D_u\\
&\Leftrightarrow x \in D_v \text{ et } v(x) \in [0,+\infty[\\
&\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } (1-x^2) \geq 0\\
&\Leftrightarrow 1 \geq x^2 \geq 0\\
&\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1\\
&\Leftrightarrow x \in [-1,1]
\end{aligned}$$

D'où $D_f = [-1,1]$.

$v(x)$ étant un polynôme, il est continu et dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc continu et dérivable sur $[-1,1]$.

La fonction u étant continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est dérivable que sur $]0,+\infty[$ (u non dérivable en 0).

Il s'en suit que $f(x) = u(v(x))$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $[-1,1]$ sauf pour x tel que $v(x) = 1 - x^2 = 0$ (qui donne $x = 1$ ou $x = -1$).

Finalement, f est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

2) Sur l'intervalle $]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} &= f'(x) = (u(v(x)))' = v'(x)u'(v(x))\\
&= (-2x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\\
&= \frac{-x}{f(x)}
\end{aligned}$$

D'où le résultat

$$\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = -x.$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{1-x^2} &= f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'\\
&= \frac{-\sqrt{1-x^2} + x(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})}{(\sqrt{1-x^2})^2}\\
&= \frac{-(\sqrt{1-x^2})^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2})^2}\\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}\\
&\frac{-1}{f^3(x)}
\end{aligned}$$

D'où le résultat

$$\sqrt{1-x^2}\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{1-x^2} = \frac{-1}{(1-x^2)}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dx^3}\sqrt{1-x^2} &= f'''(x) = (f''(x))' = \left(\frac{-1}{f^3(x)}\right)'.\\
&= \frac{3f'(x)}{f^4(x)}\\
&= \frac{\frac{-3x}{f(x)}}{f^4(x)}\\
&= \frac{-3x}{f^5(x)}
\end{aligned}$$

D'où le résultat

$$\sqrt{1-x^2}\frac{d^3}{dx^3}\sqrt{1-x^2} = f(x)\frac{-3x}{f^5(x)} = \frac{-3x}{(1-x^2)^2}.$$

Solution 3.14. :

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad (e^{\alpha x})^{(1)} = \alpha e^{\alpha x}$, $(e^{\alpha x})^{(2)} = (\alpha e^{\alpha x})^{(1)} = \alpha^2 e^{\alpha x}$

et par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, $\quad (e^{\alpha x})^{(k)} = \alpha^k e^{\alpha x}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant n-fois la relation $e^{(a+b)x} = e^{ax}e^{bx}$, on obtient $\left(e^{(a+b)x}\right)^{(n)} = \left(e^{ax}e^{bx}\right)^{(n)}$.

En utilisant la formule de Leibnitz et ce qui précède on aura

$$\begin{aligned}
(a+b)^n e^{(a+b)x} &= \sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_n^m (e^{ax})^{(m)}(e^{bx})^{(n-m)} = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_n^m a^m e^{ax} b^{n-m} e^{bx}\\
&= e^{ax}e^{bx}\left(\sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_n^m a^m b^{n-m}\right) = e^{(a+b)x}\left(\sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_n^m a^m b^{n-m}\right)
\end{aligned}$$

En simplifiant des deux cotés par $e^{(a+b)x}$ -qui est non nul- on retrouve la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_n^m a^m b^{n-m}, \quad a \text{ et } b \text{ deux réels.}$$

Solution 3.15. :

1) On a $e^{-\frac{1}{x^2}} = v(u(x))$, avec $u(s) = -\frac{1}{s^2}$ et $v(t) = e^t$.

La fonction u est définie, continue et dérivable autant de fois qu'on veut sur $\mathbb{R}^*$ (et ses dérivées successives sont continues sur $\mathbb{R}^*$).

La fonction v est définie, continue et dérivable autant de fois qu'on veut sur $\mathbb{R}$.

Donc la composée $f = v \circ u$ est définie, continue et dérivable autant de fois qu'on veut sur $\mathbb{R}^*$.
En $x_o = 0$ on a :
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{y\to+\infty} e^{-y^2} = 0 = f(0)$ *(en faisant le changement de variable $\frac{1}{x} = y$)*
f est donc continue en $x_o = 0$.
En plus
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y\to+\infty} ye^{-y^2} = 0$$
(ceci d'après le résultat $\lim\limits_{z\to+\infty} z^p e^{-z} = 0$).
Ainsi f est dérivable en $x_o = 0$ et $f'(0) = 0$.
Et par suite, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2) Pour $x \neq 0$, on a
$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = u'(x)v'(u(x)) = \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ *elle est continue sur $\mathbb{R}^*$*
et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{y\to+\infty} 2y^3e^{-y^2} = 0 = f'(0)$.
Par suite $f'(x)$ est continue en 0, et donc continue sur $\mathbb{R}$.

3) Pour $x \neq 0$, on a
$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \\ &= \left(\frac{2}{x^3}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \\ &= \frac{-6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}\left(\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= \left(\frac{-6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$
En $x_o = 0$, on a
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y\to+\infty} 2y^4e^{-y^2} = 0$$
D'où $f''(0) = 0$.
En plus
$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f''(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left(\frac{-6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{y\to+\infty} (-6y^4 + 4y^6)e^{-y^2} = 0 = f''(0). \end{aligned}$$
Par suite f'' est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

4) Pour $x \neq 0$, on a vu que
$f^{(o)}(x) = f(x) = P_o(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ *où $P_o(z) = 1$ polynôme constant de degré $d^oP_o = 3\times 0$.*
Et $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = P_1(\dfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$
avec P_1 le polynôme $P_1(z) = 2z^3$ et $d^oP_1 = 3\times 1$.
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$
$f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ *où P_n est un polynôme de degré $3n$.*

On aura
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = (P_n(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}})' \\ &= (P_n(\tfrac{1}{x}))'e^{-\frac{1}{x^2}} + P_n(\tfrac{1}{x})(e^{-\frac{1}{x^2}})' \\ &= \frac{-1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} + P_n(\frac{1}{x})(\frac{2}{x^3})e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left(\frac{-1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x}) + \frac{2}{x^3}P_n(\frac{1}{x})\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= P_{n+1}(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$
Avec $P_{n+1}(z) = -z^2P_n'(z) + 2z^3P_n(z)$. On a
$d^o(z^2P_n') = 2 + d^oP_n' = 2 + 3n - 1 = 3n+1$ *et* $d^o(z^3P_n) = 3 + d^oP_n = 3 + 3n = 3n+3$
Par suite $d^o(P_{n+1}) = 3n+3 = 3(n+1)$ et donc l'hypothèse de récurrence est vraie pour $n+1$.
D'où le résultat

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad f^{(n)}(x) = P_n(\dfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ *où P_n est un polynôme de degré $3n$.*

5) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ dérivable autant de fois qu'on veut.
En $x_o = 0$, on raisonne par récurrence :

- *pour $n = 0$ $f^{(o)}(x) = f(x)$ est continue et $f(0) = 0$.*
- *Supposons que $f^{(n)}$ est continue en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$.*
- *Pour $n+1$ on sait que*
$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x}P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{y\to+\infty} yP_n(y)e^{-y^2} = 0. \end{aligned}$$
D'où $f^{(n+1)}(0) = (f^{(n)})'(0) = 0$.
En plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f^{(n+1)}(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} P_{n+1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{y\to+\infty} P_{n+1}(y)e^{-y^2} = 0 = f^{(n+1)}(0)$.
Ainsi $f^{(n+1)}$ est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.
Finalement on conclut que $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ce qui assure que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Remarque :
$yP_n(y)e^{-y^2} = y(a_o + a_1y + \cdots + a_{3n}y^{3n})e^{-y^2} = a_oye^{-y^2} + a_1y^2e^{-y^2} + \cdots + a_{3n}y^{3n+1}e^{-y^2}$
c'est une somme finie de quantités qui tendent vers 0 quand y tend vers l'infini.
Par suite $\lim\limits_{y\to+\infty} yP_n(y)e^{-y^2} = 0$.

Solution 3.16. *:*
D'abord on a :
la dérivée de $e^{\frac{1}{x}}$ est $(e^{\frac{1}{x}})' = (\frac{1}{x})'e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, ceci en utilisant la dérivée de la composée.
Ensuite on a

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= (f_{n+1})^{(n+1)}(x) = (x^{(n+1)-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n+1)} = (x^ne^{\frac{1}{x}})^{(n+1)} \\ &= ((x^ne^{\frac{1}{x}})^{(1)})^{(n)} = ((x^ne^{\frac{1}{x}})')^{(n)} \\ &= (nx^{n-1}e^{\frac{1}{x}} - x^n\tfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} \end{aligned}$$

$$g_n'(x) = ((f_n)^{(n)})'(x) = (f_n')^{(n)}(x) = ((x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})')^{(n)}$$

$$= ((n-1)x^{n-2}e^{\frac{1}{x}} - x^{n-1}\tfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}$$

$$\begin{aligned}
g_{n+2}(x) &= (f_{n+2})^{(n+2)}(x) = (x^{(n+2)-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n+2)} = (x^{n+1}e^{\frac{1}{x}})^{(n+2)}\\
&= ((x^{n+1}e^{\frac{1}{x}})^{(2)})^{(n)} = (((x^{n+1}e^{\frac{1}{x}})')')^{(n)}\\
&= (((n+1)x^{n}e^{\frac{1}{x}} - x^{n+1}\tfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}})')^{(n)}\\
&= ((n+1)nx^{n-1}e^{\frac{1}{x}} - (n+1)x^{n}\tfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - (n-1)x^{n-2}e^{\frac{1}{x}} + x^{n-1}\tfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}\\
&= (n+1)\left[nx^{n-1}e^{\frac{1}{x}} - x^{n}\tfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right]^{(n)} - \left[(n-1)x^{n-2}e^{\frac{1}{x}} - x^{n-1}\tfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right]^{(n)}
\end{aligned}$$

ceci en utilisant le fait que $(au(x)+bv(x))^{(n)} = au^{(n)}(x) + bv^{(n)}(x)$.
D'où le résultat

$$g_{n+2}(x) = (n+1)g_{n+1}(x) - g'_n(x) \qquad (*)$$

Ensuite et par récurrence :

— $(f_1)^{(1)}(x) = (e^{\frac{1}{x}})' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = (-1)^1x^{-1-1}e^{\frac{1}{x}}$.

— *Faisons l'hypothèse de récurrence suivante :*
$\forall k,\ 1 \le k \le n \quad g_k(x) = (f_k)^{(k)}(x) = (-1)^k x^{-k-1}e^{\frac{1}{x}}$.

— *Pour* $n+1$, *on a d'après la relation (*)*

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(x) &= ng_n(x) - g'_{n-1}(x) = n(-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}} - \left((-1)^{n-1}x^{-(n-1)-1}e^{\frac{1}{x}}\right)'\\
&= n(-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}} - \left((-1)^{n-1}x^{-n}e^{\frac{1}{x}}\right)'\\
&= n(-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}} - \left((-1)^{n-1}(-n)x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}} + (-1)^{n-1}x^{-n}(-\tfrac{1}{x^2})e^{\frac{1}{x}}\right)\\
&= n(-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}} - (-1)^{n-1}(-n)x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}} + (-1)^{n-1}x^{-n-2}e^{\frac{1}{x}}\\
&= n(-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}} - n(-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}} + (-1)^{n-1}x^{-n-2}e^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

D'où $g_{n+1}(x) = (-1)^{n-1}x^{-(n+1)-1}e^{\frac{1}{x}} = (-1)^{n+1}x^{-(n+1)-1}e^{\frac{1}{x}}$
la formule est donc vraie jusqu'à l'ordre $n+1$.

On conclut finalement que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad g_n(x) = (f_n)^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}}$$

Solution 3.17.
1) Calculons les dérivées successives de e^{-x^2}.

$$\begin{aligned}
(e^{-x^2})' &= -2xe^{-x^2}\\
(e^{-x^2})'' &= (-2xe^{-x^2})' = (-2x)'e^{-x^2} - 2x(e^{-x^2})' = -2e^{-x^2} - 2x(-2xe^{-x^2})\\
&= (-2+4x^2)e^{-x^2}\\
(e^{-x^2})''' &= ((-2+4x^2)e^{-x^2})' = 8xe^{-x^2} + (-2+4x^2)(-2x)e^{-x^2}\\
&= (12x - 8x^3)e^{-x^2}\\
(e^{-x^2})^{(4)} &= \left((12x-8x^3)e^{-x^2}\right)' = (12-24x^2)e^{-x^2} + (12x-8x^3)(-2x)e^{-x^2}\\
&= (12 - 48x^2 + 16x^4)e^{-x^2}\\
(e^{-x^2})^{(5)} &= \left((12-48x^2+16x^4)e^{-x^2}\right)'\\
&= (-96x + 64x^3)e^{-x^2} + (12-48x^2+16x^4)(-2x)e^{-x^2}\\
&= (-120x + 160x^3 - 32x^5)e^{-x^2}
\end{aligned}$$

Ensuite et par définition de $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$:

$$\begin{aligned}
H_o(x) &= (-1)^0 e^{x^2}\frac{d^o}{dx^o}e^{-x^2} = e^{x^2}(e^{-x^2}) = e^{x^2-x^2} = e^o = 1\\
H_1(x) &= (-1)^1 e^{x^2}\frac{d^1}{dx^1}e^{-x^2} = -e^{x^2}(e^{-x^2})' = -e^{x^2}(-2xe^{-x^2}) = 2x\\
H_2(x) &= (-1)^2 e^{x^2}\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2} = e^{x^2}(-2+4x^2)e^{-x^2} = -2+4x^2\\
H_3(x) &= (-1)^3 e^{x^2}\frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2} = -e^{x^2}(12x-8x^3)e^{-x^2} = -12x+8x^3\\
H_4(x) &= (-1)^4 e^{x^2}\frac{d^4}{dx^4}e^{-x^2} = e^{x^2}(12-48x^2+16x^4)e^{-x^2} = 12-48x^2+16x^4\\
H_5(x) &= (-1)^5 e^{x^2}\frac{d^5}{dx^5}e^{-x^2} = -e^{x^2}(-120x+160x^3-32x^5)e^{-x^2}\\
&= 120x - 160x^3 + 32x^5
\end{aligned}$$

2) On sait que :
(i) pour $m \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\left(\frac{d^m}{dx^m}u(x)\right)' = (u^{(m)})'(x) = u^{(m+1)}(x) = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}u(x) = \frac{d^m}{dx^m}(u')(x),$$

(ii) pour $p \in \mathbb{N}^*$, *on a :*
$(xu(x))^{(p)} = C_p^0(x)^{(o)}u^{(p)}(x) + C_p^1(x)^{(1)}u^{(p-1)}(x) = xu^{(p)}(x) + pu^{(p-1)}(x)$
(la dérivée seconde et les suivantes de $t(x) = x$ *s'annulent).*
Ensuite on écrit

$$\begin{aligned}
H'_n(x) &= \left((-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\right)'\\
&= (-1)^n(e^{x^2})'\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} + (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\right)'\\
&= 2x((-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}) - (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2}\\
&= 2xH_n(x) - H_{n+1}
\end{aligned}$$

D'où le résultat

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \qquad (*)$$

3) Ensuite on a :

$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n+1)} = (-1)^{n+1}e^{x^2}\left((e^{-x^2})'\right)^{(n)}$
$= (-1)^{n+1}e^{x^2}\left(-2xe^{-x^2}\right)^{(n)} = (-1)^{n+1}e^{x^2}\left(-2x(e^{-x^2})^{(n)} - 2n(e^{-x^2})^{(n-1)}\right)$ *(voir (ii)).*
$= 2x(-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)} - 2n(-1)^{n-1}e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n-1)} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.

D'où le résultat

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \qquad (**)$$

En combinant $(*)$ *et* $(**)$, *on trouve*

$$\begin{aligned}
H'_n(x) &= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)\\
&= 2xH_n(x) - (2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)) = 2nH_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

D'où le résultat

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \qquad (***)$$

4) On a

$$\begin{aligned}
H''_n(x) &= (H'_n(x))' = (2xH_n(x) - H_{n+1}(x))' && \text{(voir (**))}\\
&= 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H'_{n+1}(x)\\
&= 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - (2(n+1)H_n(x)) && ((***) \text{ pour } (n+1))\\
&= -2nH_n(x) + 2xH'_n(x)
\end{aligned}$$

D'où le résultat

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

D'après (*), on a trouvé $H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$.

Qu'on écrit sous la forme $2xH_n(x) - H_n'(x) = (2x - \dfrac{d}{dx})H(x) = H_{n+1}(x)$.

Et d'après (**), on a $2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x)$.

Solution 3.18. :

1) L'égalité $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ *donne lorsque* $x = 0$ *et* $y = 1$
$f(0)f(1) - f(0) = 1 = f(0)(f(1) - 1)$ *et donc* $f(0) \neq 0$.
Ensuite on prend $x = y = 0$ *on trouve* $f(0)f(0) - f(0) = 0 = f(0)(f(0) - 1)$. *Comme* $f(0) \neq 0$, *on a forcément* $f(0) - 1 = 0$ *et donc* $f(0) = 1$.
Fixons y *et dérivons par rapport à* x *les deux membres de l'égalité*
$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$, *on aura*
$f(y)f'(x) - yf'(xy) = 1 \quad (2)$, $\quad x$ *et* y *étant quelconques dans* $\mathbb{R}$.
(y *est considérée comme constante, la dérivée de* $f(xy) = f(u(x))$ *est* $u'(x)f'(u(x))$ *avec* $u(x) = yx$, $u'(x) = y$*).*
En prenant $y = 0$ *dans l'égalité (2), on trouve* $\quad f(0)f'(x) = 1$ *et donc* $f'(x) = 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
Donc $f(x) = x + c = x + 1$ *(puisque* $c = f(0) = 1$*).*
Réciproquement :
La fonction $f(x) = x + 1$ *vérifie* $f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - (xy+1) = x + y$.
Ainsi la seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ *vérifiant* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:$
$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ *est* $f(x) = x + 1$.

2) S'il existe g *définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *telle que*
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; g(x + y) - g(x - y) = 4xy \quad (*)$,
on dérive les membres de l'égalité $(*)$ *en considérant que* y *est constante. On obtient*
$g'(x + y) - g'(x - y) = 4y$ (3).
On dérive ensuite les membres de l'égalité $(*)$ *en considérant que* x *est constante. On obtient*
$g'(x + y) + g'(x - y) = 4x$ (4).
En faisant la somme de (3) *et* (4), *on obtient*
$2g'(x + y) = 4x + 4y = 4(x + y)$ *ceci pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Et on aura donc $g'(u) = 2u$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}$.
Ce qui donne $g(u) = u^2 + c$ *avec* c *constante dans* $\mathbb{R}$.
Réciproquement toute fonction de cette forme vérifie
$g(x + y) - g(x - y) = \left[(x + y)^2 + c\right] - \left[(x - y)^2 + c\right] = 4xy$.
Finalement les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ *vérifiant*
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; g(x + y) - g(x - y) = 4xy$
sont les fonctions de la forme $g(x) = x^2 + c$ *où* $c \in \mathbb{R}$.
Remarque
Revoir cet exercice qu'on a déjà fait dans le chapitre précédent sans l'hypothèse de la dérivation.

3.4 Exercices supplémentaires

Exercice 3.19. :
Étudier la dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{|x|}}$
2) $g(x) = \ln(x^2 + \sqrt{x + 1})$
3) $h(x) = (\ln x)^x$
4) $k(x) = x^{(\ln x)}$

Exercice 3.20. :
Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. *On pose* $f(x) = \begin{cases} x^b \sin \frac{1}{x^b} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$
Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f.

Exercice 3.21. :
On définit sur $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *la fonction numérique* f *par :*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1) Vérifier que f *est dérivable sur* I.
2) Calculer sa dérivée f' *et montrer qu'elle est continue sur* I.
3) Calculer sa dérivée seconde f'' *et montrer qu'elle est continue sur* I.
4) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ *que*
si $x \neq 0 \quad f^{(n)}(x)$ *est de la forme*
$f^{(n)}(x) = (a \cos x + b)P_n(\frac{1}{\sin x})e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$ *où* P_n *est un polynôme de degré* $3n$,
$(a, b) = (0, 1)$ *si* n *pair et* $(a, b) = (1, 0)$ *si* n *impair.*
5) En déduire que f *est de classe* C^∞ *sur* I.

Exercice 3.22. :

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :*

$$f(x) = \begin{cases} e^{(x^2-1)^{-1}} & si \quad |x| < 1 \\ 0 & si \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que f *est indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3.23. :
Calculer les dérivées $n^{\text{ème}}$ *des fonctions suivantes :*
$f(x) = \frac{1}{(x+1)^a}$ *pour* $a = 1$ *puis* $a = 2$.

Exercice 3.24. :
Soit $n \in \mathbb{N}$. *Calculer* $f^{(n)}(x)$:
1) pour $f(x) = \sin ax$ *où* $a \in \mathbb{R}^*$;
2) pour $f(x) = e^{-bx}$ *et* $b \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 3.25. :
Calculer la dérivée d'ordre n, $n = 1$, 2 *ou* 3, *des fonctions suivantes :*
1) $f(x) = e^x \tan x$.

2) $g(x) = e^{x^2}$.
3) $h(x) = \cos x^2$.

Exercice 3.26. *:*
Calculer les dérivées $n^{\text{èmes}}$ *des fonctions suivantes :*
$f(x) = 4\sin^2 x \cos x$; $g(x) = \cos^2 x$; $h(x) = x\cos x$ *et* $k(x) = x^3 sh\, x$.

Exercice 3.27. *:*
Trouver les couples de fonctions (f, g) *dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et telles que*

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} f(x+y) &= f(x) + f(g(y)) \\ g(x+y) &= g(x) + g(f(y)) \end{cases}$$

Exercice 3.28. *:*
On considère la fonction numérique à variable réelle définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ *par* $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$.
1) Montrer que

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad f'(x) > 0$$

2) En déduire que

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad 2\sin x + \tan x > 3x$$

Exercice 3.29. *:*
Soit f *une fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}_+$ *et bornée.*
On suppose que f *est deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *et que* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f''(x) \geq 0$.
Montrer que f *est décroissante.*

Exercice 3.30. *:*
Soit f *la fonction numérique à variable réelle définie par :*

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

1) Déterminer l'intervalle $]a, b[$ *tel que* f *soit une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $]a, b[$.
2) Soit g *l'application bijective réciproque de* f.
i- Étudier la dérivabilité de g *sur* $]a, b[$.
ii- Calculer $g'(x)$ *en fonction de* $g(x)$.
iii- Calculer $g'(1)$.

Exercice 3.31. *:*
Soit f *une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle* I *et telle que* f' *est continue sur* I.
Soient u *et* v *deux éléments de* $f'(I)$ *tels que* $u < v$.
Montrer que : $\forall w \in]u, v[, \quad \exists c_w \in I \ / \ w = f'(c_w)$.

3.5 Indications sur les exercices supplémentaires

Solution 3.19. *:*
1) Vérifier que $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{|x|}}$ *est définie, continue sur* $\mathbb{R}$ *et dérivable sur* $\mathbb{R}^*$.
Et que pour tout $x \neq 0 \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{|x|}}}\left(2x + \dfrac{s(x)}{2\sqrt{|x|}}\right)$ *avec* $s(x) = 1$ *si* $x > 0$ *et* $s(x) = -1$ *si* $x < 0$.
2) Vérifier que $g(x) = \ln(x^2 + \sqrt{x+1})$ *est définie et continue sur* $[-1, +\infty[$ *et dérivable sur*
$]-1, +\infty[$.
Et que pour $x > -1$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2 + \sqrt{x+1}}\left(2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$.
3) Écrire que $h(x) = (\ln x)^x = e^{x\ln(\ln x)}$. *Vérifier que* h *est définie, continue et dérivable sur* $]1, +\infty[$.
Et que pour tout $x > 1, \quad h'(x) = \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)(\ln x)^x$.
4) Écrire que $k(x) = x^{(\ln x)} = e^{(\ln x)^2}$. *Vérifier que* k *est définie, continue et dérivable sur* $]0, +\infty[$.
Et que pour tout $x > 0, \quad k'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x}e^{(\ln x)^2}$.

Solution 3.20. *:*
Vérifier que $f(x) = x^b \sin\frac{1}{x^b}$ *est définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}^*$.
Vérifier que f *est continue en* $x_o = 0$ *si et seulement si* $b > 0$.
Et que f *est dérivable en* $x_o = 0$ *si et seulement si* $b > 1$.

Solution 3.21. *:*
Revoir la solution détaillée de l'exercice sur la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Solution 3.22. *:*
Remarquer que f *est pair et justifier qu'elle est indéfiniment dérivable sur* $]-1, 1[$.
Montrer par récurrence que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x^2-1)^{2n}}e^{(x^2-1)^{-1}}$ *avec* $d^oP_n = 3(n-1)+1$.
En déduire que toutes les dérivées en 1 *sont nulles, et que* f *est indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$.

Solution 3.23. *:*
Vérifier que $(f(x))^{(n)} = (\frac{1}{(x+1)^a})^{(n)} = \dfrac{(-1)^n\frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}}{(x+1)^{a+n}}$.

Solution 3.24. *:*
1) Vérifier que $f^{(n)}(x) = a^n \sin(ax + n\frac{\pi}{2})$.
2) Vérifier que $f^{(n)}(x) = (-b)^n e^{-bx}$.

Solution 3.25. :

$f(x) = e^x \tan x$

$f'(x) = (1 + \tan x + \tan^2 x)e^x$

$f''(x) = (2 + 3\tan x + 2\tan^2 x + 2\tan^3 x)e^x$

$f^{(3)}(x) = (5 + 7\tan x + 11\tan^2 x + 6\tan^3 x + 6\tan^4 x)e^x$

$g(x) = e^{x^2}$

$g'(x) = 2xe^{x^2}$

$g''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$

$g'''(x) = (12x + 8x^3)e^{x^2}$

$h(x) = \cos x^2$

$h'(x) = -2x\sin x^3$

$h''(x) = -2\sin x^2 - 4x^2\cos x^2$

$h'''(x) = -12x\cos x^2 + 8x^3\sin x^2$

Solution 3.26. :
1) Écrire que $f(x) = 4\sin^2 x\cos x = \cos x - \cos 3x$
et $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) - 3^n\cos(3x + n\frac{\pi}{2})$
(voir avant : $(\cos ax)^{(n)}$*).*
2) Écrire que $g(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x) + \frac{1}{2}$ *et* $(g^{(n)})(x) = 2^{n-1}\cos(2x + n\frac{\pi}{2})$.
3) Utiliser La formule de Leibnitz pour $h(x) = x\cos x$ *:*
$h^{(n)}(x) = x\cos(x + n\frac{\pi}{2}) + n\cos(x + (n-1)\frac{\pi}{2})$.
4) Utiliser La formule de Leibnitz pour $k(x) = x^3 sh\ x$ *:*
$k^{(n)}(x) = x^3(sh\ x)^{(n)} + 3nx^2(sh\ x)^{(n-1)} + 3n(n-1)x(sh\ x)^{(n-2)}$
$+n(n-1)(n-2)(sh\ x)^{(n-3)}$.
Si n *pair* $k^{(n)}(x) = (x^3 + 3n(n-1)x)sh\ x + (3nx^2 + n(n-1)(n-2))ch\ x$
Si n *impair* $k^{(n)}(x) = (x^3 + 3n(n-1)x)ch\ x + (3nx^2 + n(n-1)(n-2))sh\ x$.

Solution 3.27. :
Dériver par rapport à x *la première égalité (en fixant* y*). En déduire que* $f'(y) = f'(0)$ *et que* f' *est constante. Et que* f *est affine. Faire de même pour* g.

Solution 3.28. *1) Vérifier que la dérivée de* $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ *est*
$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \dfrac{(\cos x - 1)^2(1 + 2\cos x)}{\cos^2 x}$.
En déduire que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad f'(x) > 0$.
2) Utiliser la croissance de f.

Solution 3.29. *Par l'absurde en supposant que* f' *n'est pas négative, donc* $\exists x_o \in \mathbb{R}$ *tel que* $f'(x_o) > 0$.
Vérifier que $\forall x \geq x_o\ f'(x) \geq f'(x_o) > 0$.
Poser $g(x) = f(x) - f'(x_o)x$ *et vérifier que* g *est croissante.*
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ *sachant que* f *est bornée. En déduire une contradiction.*

Solution 3.30. *1) Vérifier d'abord que* f *est définie sur* $\mathbb{R}$*. Étudier le signe de* f' *puis déduire que* f *est bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $]a, b[$ *avec* $a = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2)
i- Vérifier que $f'(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
ii- Utiliser la formuler $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$.
iii-Prendre $x = 1$ *dans (ii) sachant que :* $f(0) = 1 \Rightarrow 0 = f^{-1}(1) = g(1)$.

Solution 3.31. *Utiliser le fait que l'image* $f'(I) = J$ *de l'intervalle* I *par la fonction continue* f' *est aussi un intervalle.*
Utiliser : $(u, v) \in J^2$ *et* $u < w < v \Rightarrow w \in J = f'(I) \Rightarrow \exists c_w \in I\ /\ w = f'(c_w)$.

Chapitre 4

Théorème des accroissements finis

4.1 Rappels de cours

Accroissements finis

Théorème 4.1. *de Rolle*
Soit f *une fonction définie sur un intervalle* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *telle que :*
- f *est continue sur* $[a, b]$,
- f *est dérivable sur* $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Théorème 4.2. *des accroissements finis :*
Soit f *une fonction définie sur un intervalle* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *telle que :*
- f *est continue sur* $[a, b]$,
- f *est dérivable sur* $]a, b[$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ *tel que* $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Corollaire 4.1. *Monotonie et signe de la dérivée*
Soit f *une fonction continue sur* $I = [a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$*, on a les équivalences suivantes :*

1. f *est constante sur* $I \Longleftrightarrow f' = 0$ *sur* $]a, b[$.
2. f *est croissante sur* $I \Longleftrightarrow f' \geq 0$ *sur* $]a, b[$.
3. f *est décroissante sur* $I \Longleftrightarrow f' \leq 0$ *sur* $]a, b[$.

Conséquences :

- Accroissements finis généralisés :
  Soient f et g deux fonctions continues sur $I = [a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))\,g'(c) = (g(b) - g(a))\,f'(c)$.
- Règle de l'Hôpital :
  Soit $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Étant données deux fonctions f et g dérivables sur $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ telles que :

1. $\forall x \in]a-\varepsilon, a[\cup]a, a+\varepsilon[, \quad g'(x) \neq 0,$
2. $f(a) = g(a) = 0,$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l,$

alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Formules de Taylor

Théorème 4.3. *Formule de Taylor-Lagrange*
Soit f une fonction de classe C^n sur un segment $[a,b]$, et de classe $\mathcal{D}^{n+1}$ sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Théorème 4.4. *Formule de Taylor-Mac Laurin*
Soit f une fonction de classe C^n sur un segment $[0,x]$, et de classe $\mathcal{D}^{n+1}$ sur $]0,x[$. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

Théorème 4.5. *Formule de Taylor-Young*
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si f est dérivable à l'ordre n en a, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) = 0.$$

4.2 Énoncés des exercices

Exercice 4.1. : *Peut-on appliquer le théorème de Rolle aux fonctions suivantes ?*

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ *sur* $[-1,1]$, 2. $f_2(x) = |x-1|$ *sur* $[0,2]$,
3. $f_3(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ *sur* $[0,1]$.

Exercice 4.2. :
Peut-on appliquer le théorème de Rolle à la fonction f dans chacun des cas suivants ?

— $I = [0,\pi]$ *et* $f(x) = \sin x$.
— $I = [-1,1]$ *et* $\begin{cases} f(x) = \frac{1-\cos 2\pi x}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
— $I = [-1,1]$ *et* $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}$

Exercice 4.3. :
Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f satisfait au théorème de Rolle sur l'intervalle indiqué, puis déterminer la valeur du réel c figurant dans cette formule

1. $f(x) = x - x^3$ *sur* $[-1,0]$, 2. $f(x) = x^2(1-x^2)$ *sur* $[0,1]$,
3. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *sur* $[-1,1]$.

Exercice 4.4. :
Soit $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ a trois racines réelles.

Exercice 4.5. :
Soient a et b deux réels fixés. On pose $P(x) = x^6 - ax - b$ et $Q(x) = x^7 - ax - b$.
1) Montrer que le polynôme $P(x)$ ne peut avoir plus que deux racines réelles distinctes.
2) Montrer que le polynôme $Q(x)$ ne peut avoir plus que trois racines réelles distinctes.

Exercice 4.6. :
Écrire la formule des accroissements finis pour chacune des fonctions suivantes, puis calculer la valeur du réel c figurant dans cette formule :

1. $f_1(x) = x - x^3$ *sur* $[-2,1]$, 2. $f_2(x) = x^2$ *sur* $[a,b]$, $a < b$,
3. $f_3(x) = \frac{1}{x}$ *sur* $[a,b]$, $0 < a < b$.

Exercice 4.7. :
Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.
On définit la fonction numérique g sur l'intervalle $[-1,1]$ par :
$\begin{cases} g(x) = f(\tan(\frac{\pi x}{2})) & pour\ x \in]-1,1[\\ g(-1) = g(1) = l \end{cases}$
1) Montrer que la fonction g est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.
2) Montrer que : $(\exists \alpha \in]-1,1[)\ g'(\alpha) = 0$.
3) En déduire que : $(\exists c \in \mathbb{R})\ f'(c) = 0$.

Exercice 4.8. :
On considère la fonction f à variable réelle définie sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$f(x) = 4x(\pi - x) - \pi^2 \sin^2 x$$

1. *Vérifier que la fonction f est deux fois dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $f''(x) = -2(4 + \pi^2 \cos 2x)$.*
2. *Montrer qu'il existe $\alpha \in I$ unique tel que $f'(\alpha) = 0$.*
3. *En déduire que :*

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \sin^2 x \leq \frac{4}{\pi^2} x(\pi - x).$$

Exercice 4.9. :
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & si\ x \in]-\infty, 1[, \\ \dfrac{1}{x} & si\ x \in [1, +\infty[. \end{cases}$$

1. *Montrer que la fonction f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0, 2]$.*
2. *Déterminer toutes les valeurs de $c \in]0, 2[$ telles que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.*

Exercice 4.10. :
Soient f, g et h trois fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ (où a et b deux réels : $a < b$).
On pose $\Delta(x) = (g(a)h(b) - g(b)h(a))f(x) + (h(a)f(b) - h(b)f(a))g(x) + (f(a)g(b) - f(b)g(a))h(x)$
($\Delta(x)$ est le déterminant $\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ h(a) & h(b) & h(x) \end{vmatrix}$).
1) Montrer que l'application $\Delta(x)$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
2) Vérifier que sa dérivée $\Delta'(x)$ est donnée par $\Delta'(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(x) \\ g(a) & g(b) & g'(x) \\ h(a) & h(b) & h'(x) \end{vmatrix}$.
3) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\Delta'(c) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 4.11. :

1. *Montrer que $\dfrac{b-a}{1+b^2} < \arctan(b) - \arctan(a) < \dfrac{b-a}{1+a^2}$ si $0 < a < b$.*
2. *En déduire que $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{5} < \arctan(2) < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$.*

Exercice 4.12. :
Établir les inégalités suivantes en utilisant le théorème des accroissements finis :

1. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$,
2. $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$, $\forall x > 0$,
3. $\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{4} - x)$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,
4. $0 \leq \tan y - \tan x \leq \frac{y-x}{\cos^2 y}$, où $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$,
5. $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.13. :
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = Ax^2 + Bx + C$, où $A \in \mathbb{R}^*$, $B \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Vérifier qu'on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[a, b]$. Exprimer c en fonction de a et de b.

Exercice 4.14. :
On considère la fonction définie par $\begin{array}{cccc} f & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = 1 - |2x - 1| \end{array}$
Pour quelles valeurs de a et b peut-on appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[a, b]$?

Exercice 4.15. :
Étudier l'existence et l'unicité de c tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

dans les cas suivants :
1) $a = 1$, $b = 3$ et $f(x) = (x-1)(x-3)$.
2) $a = -1$, $b = 1$ et $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$.
3) $a = -2\pi$, $b = 2\pi$ et $f(x) = \cos x + 2x$.
4) $a = -1$, $b = 1$ et $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exercice 4.16. *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.*
On suppose que $f(a) \neq f(b)$ et $g(a) \neq g(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a) - g(b)}.$$

Indication : Considérer la fonction F définie sur $[a, b]$ par

$$F(x) = (f(a) - f(b))g(x) - (g(a) - g(b))f(x).$$

Exercice 4.17. :
Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur $[0, 1]$ et telle que :
$f(0) = 0$ et $(\forall x \in [0, 1])$, $\quad f'(x) \neq 0$.
Démontrer que f garde un signe constant sur $[0, 1]$.

Exercice 4.18. :
On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = x - \cos x$.
1) Montrer que : $(\exists x_o \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}])$ / $f(x_o) = 0$.
2) Montrer ensuite que : $(\exists c \in]x_o, \frac{\pi}{4}[)$ / $f'(c) = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{\pi - 4x_o}$.

Exercice 4.19. :

1. *Écrire la formule de Mac-Laurin pour la fonction* $f(t) = \ln(1+t)$ *à l'ordre 2.*
2. *En déduire que*

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \forall x > 0.$$

Exercice 4.20. :
Vérifier les inégalités suivantes à l'aide de la formule de Mac-Laurin :

1. $\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $\forall x > 0$,
2. $e^x \geq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
3. $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
4. $x \leq \tan x \leq x + x^3$, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{6}]$.

Exercice 4.21. :
En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin, démontrer les inégalités suivantes :
1) $(\forall x \in [0, +\infty[)$ $\quad \sin x \leq x$
2) $(\forall x \in [0, +\infty[)$ $\quad \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$
3) $(\forall x \in]0, 1[)$ $\quad \arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 4.22. :
Calculer (à la main, sans utiliser une machine) les expressions suivantes :
a) $\cos(60, 1°)$ *à trois décimales près.*
b) $\arctan(1,001)$ *à quatre décimales près.*
c) $\ln(1,002)$ *à cinq décimales près.*
d) $\sqrt{5}$ *à trois décimales près.*

Exercice 4.23. :

1. *Écrire la formule de Mac-Laurin pour la fonction* $f(t) = e^t$.
2. *En déduire la limite de la suite* $(u_n)_n$ *définie par*

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 4.24. :
Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hôpital :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{\arcsin x}$ 2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2x\sin x - \pi}{2\cos x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+\cos x} - 2}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ 6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 5x}$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ 8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{\cos 3x - 2\cos^2 x + \cos x}$

4.3 Solutions détaillées des exercices

Solution 4.1. :

1. *On ne peut pas appliquer le théorème de Rolle à la fonction* f_1 *sur l'intervalle* $I = [-1, 1]$, *car* f_1 *n'est pas définie en 1 (ni en −1).*
2. *Non, car* f_2 *n'est pas dérivable en 1. En effet, la dérivée à droite de 1 est*

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f_2(x) - f_2(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$

et elle est différente de la dérivée à gauche

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f_2(x) - f_2(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{x-1} = -1.$$

3. *Non, car* $f_3(0) \neq f_3(1)$.

Solution 4.2. :

— *La fonction* $f(x) = \sin x$ *est définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$, *donc continue sur* $I = [0, \pi]$ *et dérivable sur* $]0, \pi[$.
En plus on a $f(0) = f(\pi) = 0$, *par suite il existe* $c \in]0, \pi[$ *tel que* $f'(x) = \cos c = 0$.
En fait $c = \frac{\pi}{2}$.
— *En posant* $g(x) = \cos 2\pi x$, *on a* $g'(x) = -2\pi \sin 2\pi x$
et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2\pi x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(0) - g(x)}{x} = -g'(0) = 0$.
Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, *et* f *est continue en 0.*
Ensuite :
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2\pi x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \pi x}{(\pi x)^2}\pi^2 = 2\pi^2$.
Ainsi f *est dérivable en 0.*
Comme f *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *puisqu'elle est quotient de deux fonctions continues et dérivables sur* $\mathbb{R}^*$ *et le dénominateur ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^*$, f *est alors continue sur* $I = [-1, 1]$ *et dérivable sur* $]-1, 1[$.
En plus on a $f(-1) = f(1) = 0$, *ce qui nous permet d'utiliser le théorème de Rolle et d'assurer l'existence de* $c \in]-1, 1[$ *tel que* $f'(c) = 0$.
— *La fonction* $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}$ *est définie et continue sur* $I = [-1, 1]$.
On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(2 + \sqrt[3]{x^2}) - 2}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$
par suite f *n'est pas dérivable en 0 et on ne peut pas utiliser le théorème de Rolle.*

Solution 4.3. :

1. *La fonction* f *est un polynôme, donc définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(sans problème et on peut la dériver autant de fois qu'on veut sur toute partie de* $\mathbb{R}$*). En particulier, elle est continue sur* $[-1, 0]$, *et dérivable sur* $]-1, 0[$. *De plus* $f(-1) = f(0) = 0$. *Donc il existe* $c \in]-1, 0[$ *tel que* $f'(c) = 0$. *Comme* $f'(x) = 1 - 3x^2$, *alors* $c^2 = \frac{1}{3}$. *Par conséquent* $c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, *car* $c \in]-1, 0[$.

2. *Comme dans le premier cas, f est un polynôme donc continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ avec $f(0)=f(1)=0$.*
Alors il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c)=0$.
On a $f'(x) = 2x(1-2x^2) = 2x(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)$. Puisque $c \in]0,1[$, alors $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. *La fonction f est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $f(-1)=f(1)=0$. Donc il existe $c \in]-1,1[$ tel que $f'(c) = -\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = 0$.*
D'où $c=0$.

Solution 4.4. :
La fonction f étant polynomiale, elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus $f(-3)=f(-2)=f(-1)=f(0)=0$.
D'après le théorème de Rolle appliqué sur chacun des intervalles $[-3,-2]$, $[-2,-1]$ et $[-1,0]$, ils existent $c_1 \in]-3,-2[$, $c_2 \in]-2,-1[$ et $c_3 \in]-1,0[$ tels que
$f'(c_1)=f'(c_2)=f'(c_3)=0$.
Ce qui assure que l'équation $f'(x)=0$ a trois racines réelles c_1, c_2 et c_3.

Solution 4.5. :
1) Supposons que le polynôme $P(x)=x^6-ax-b$ a au moins trois racines réelles distinctes $x_1<x_2<x_3$.
La fonction polynomiale $P(x)$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$
et $P(x_1)=P(x_2)=P(x_3)=0$.
On a les hypothèses du théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[x_1,x_2]$ et $[x_2,x_3]$.
Par suite, il existe $c_1 \in]x_1,x_2[$ et $c_2 \in]x_2,x_3[$ tels que
$P'(c_1)=0=6c_1^5-a$ et $P'(c_2)=0=6c_2^5-a$.
On aurait $c_1=c_2=(\frac{a}{6})^{\frac{1}{5}}$ ce qui est absurde avec $c_1<x_2<c_2$!
Ainsi $P(x)$ ne peut avoir plus que deux racines réelles distinctes.
2) Supposons que le polynôme $Q(x)=x^7-ax-b$ a au moins quatres racines réelles distinctes $y_1<y_2<y_3<y_4$. La continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ nous permettent d'après le théorème de Rolle d'affirmer que le polynôme $Q'(x)=7x^6-a=7(x^6-\frac{a}{7})$ a trois racines réelles distinctes $c_1\in]y_1,y_2[$, $c_2\in]y_2,y_3[$ et $c_3\in]y_3,y_4[$.
C'est absurde ! D'après la question (1) le polynôme $x^6-\frac{a}{7}$ ne peut avoir plus que deux racines réelles distinctes.
Par suite le polynôme $Q(x)=x^7-ax-b$ ne peut avoir plus que trois racines réelles distinctes.

Solution 4.6. :

1. *$f_1(1)-f_1(-2)=(1+2)f'(c)$, où $c\in]-2,1[$. Il vient $-6=3(1-3c^2)$, et donc $c^2=1$. Par conséquent $c=-1$, car $c\in]-2,1[$.*
2. *$b^2-a^2=2(b-a)c$, où $c\in]a,b[$. Par suite $c=\dfrac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\dfrac{b+a}{2}$.*
3. *$\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{(b-a)}{c^2}$, où $c\in]a,b[$. Ce qui donne $\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{c^2}$, et donc $c=\sqrt{ab}$ (ceci car $0<a<c$).*

Solution 4.7. :
1) Notons $u(x)=\frac{\pi x}{2}$ la fonction bien définie, continue et dérivable de $]-1,1[$ dans

J où $J=u(]-1,1[)=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $v(x)=\tan(u(x))=\tan(\frac{\pi x}{2})$ la fonction bien définie, continue et dérivable de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.
Comme f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $g(x)=f(v(x))=f(\tan(\frac{\pi x}{2}))$ est bien dérivable sur $]-1,1[$.
En plus
$$\lim_{x\to-1^+} g(x)=\lim_{x\to-1^+} f(\tan(\tfrac{\pi x}{2}))=\lim_{u\to-\frac{\pi}{2}^+} f(\tan u)=\lim_{v\to-\infty} f(v)=l=g(-1).$$
Et de même $\lim_{x\to1^-} g(x)=l=g(1)$.
Ainsi g est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.
2) D'après la question (1) et puisque $g(-1)=g(1)$, on utilise le théorème de Rolle : il existe $\alpha\in]-1,1[$ tel que $g'(\alpha)=0$.
3) La dérivée de g sur $]-1,1[$ est donnée par
$g'(x)=v'(x)f'(v(x))=u'(x)(1+\tan^2(u(x)))f'(v(x))$
Et donc $g'(x)=\frac{\pi}{2}(1+\tan^2(\frac{\pi x}{2}))f'(\tan(\frac{\pi x}{2}))$.
En posant $c=\tan(\frac{\pi\alpha}{2})$, on a $0=g'(\alpha)=\frac{\pi}{2}(1+\tan^2(\frac{\pi\alpha}{2}))f'(c)$
D'où l'existence de $c\in\mathbb{R}$, tel que $f'(c)=0$.

Solution 4.8. :

1. *La fonction f est différence du polynôme $4x(\pi-x)$ et de la fonction $\pi^2\sin^2 x$ qui sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc deux fois dérivable sur $I=[0,\frac{\pi}{2}]$.*
Et l'on a $f'(x)=4\pi-8x-2\pi^2\sin x\cos x=4\pi-8x-\pi^2\sin 2x$,
puis $f''(x)=-8-2\pi^2\cos 2x=-2(4+\pi^2\cos 2x)$
2. *On a $f(\frac{\pi}{2})=4\frac{\pi}{2}(\pi-\frac{\pi}{2})-\pi^2=0$ et $f(0)=0$.*
f étant continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$, le théorème de Rolle nous assure l'existence de $\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$ tel que $f'(\alpha)=0$.
Remarquons que l'équation $f''(x)=0$ équivaut à $\cos 2x=-\frac{4}{\pi^2}$ a une seule solution dans l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}[$, notée β.
En plus on a le tableau de variation de f' :

x	0		β		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	4π	$\searrow$	$f'(\beta)<0$	$\nearrow$	0

On voit donc que f' s'annule une seule fois entre 0 et β et est strictement négative sur $]\beta,\frac{\pi}{2}[$.
D'où l'unicité de $\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$ tel que $f'(\alpha)=0$.

3. *En dressant le tableau de variation de f, on a :*

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	4π	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)>0$	$\searrow$	0

Ce qui montre que : $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]\quad f(x)\geq 0$
D'où le résultat :
$$\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]\qquad \sin^2 x\leq\frac{4}{\pi^2}x(\pi-x)$$

Solution 4.9. :

1. *La fonction f est continue sur $[0,1[\cup]1,2]$, et de plus*

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{3-x^2}{2}=1=f(1)\quad et \quad \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1=f(1).$$

D'où f est continue en 1 et donc elle est continue sur l'intervalle $[0,2]$.
D'autre part, f est dérivable sur $]0,1[\cup]1,2[$, et puisque

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x^2}{2(x-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(1+x)}{2}=-1,$$

et

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{-1}{x}=-1,$$

alors f est dérivable en 1. D'où f est dérivable sur l'intervalle $]0,2[$.

2. *Soit $c\in]0,2[$ tel que $f(2)-f(0)=2f'(c)$. Alors $f'(c)=-\frac{1}{2}$.*
Puisque $f'(1)=-1$, alors $c\neq1$.
Si $x<1$, alors $f'(x)=(\frac{3-x^2}{2})'=-x$, et donc $f'(c)=-\frac12\Leftrightarrow c=\frac12$.
Et si $x>1$, alors $f'(x)=(\frac1x)'=-\frac{1}{x^2}$, et donc $f'(c)=-\frac12\Leftrightarrow c=\sqrt2$.
D'où $c=\frac12$ où $c=\sqrt2$.

Solution 4.10. :

1) L'application
$\Delta(x)=(g(a)h(b)-g(b)h(a))f(x)+(h(a)f(b)-h(b)f(a))g(x)+(f(a)g(b)-f(b)g(a))h(x)$
est de la forme $\Delta(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)+\gamma h(x)$ qui est continue sur $[a,b]$ puisque les trois fonctions f, g et h sont continues sur $[a,b]$ et α, β, γ constantes.
Et l'on a $\Delta(x)$ est dérivable sur $]a,b[$ puisque les trois fonctions f, g et h sont dérivables sur $]a,b[$ et α, β, γ constantes.
2) La dérivée de $\Delta(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\Delta'(x)&=(g(a)h(b)-g(b)h(a))f'(x)+(h(a)f(b)-h(b)f(a))g'(x)+(f(a)g(b)-f(b)g(a))h'(x)\\&=\begin{vmatrix}g(a)&h(a)\\g(b)&h(b)\end{vmatrix}f'(x)-\begin{vmatrix}f(a)&h(a)\\f(b)&h(b)\end{vmatrix}g'(x)+\begin{vmatrix}f(a)&g(a)\\f(b)&g(b)\end{vmatrix}h'(x)\\&=\begin{vmatrix}f(a)&f(b)&f'(x)\\g(a)&g(b)&g'(x)\\h(a)&h(b)&h'(x)\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

3) En plus on a :

$$\Delta(a)=\begin{vmatrix}f(a)&f(b)&f(a)\\g(a)&g(b)&g(a)\\h(a)&h(b)&h(a)\end{vmatrix}=0 \text{ et } \Delta(b)=\begin{vmatrix}f(a)&f(b)&f(b)\\g(a)&g(b)&g(b)\\h(a)&h(b)&h(b)\end{vmatrix}=0$$

en disant que ces deux déterminants ont deux colonnes égales (ou en effectuant les calculs).
Ainsi l'application $\Delta(x)$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $\Delta(a)=\Delta(b)$, par le théorème de Rolle on a l'existence de $c\in]a,b[$ tel que $\Delta'(c)=0$

$$c.\grave{a}.d\ \begin{vmatrix}f(a)&f(b)&f'(c)\\g(a)&g(b)&g'(c)\\h(a)&h(b)&h'(c)\end{vmatrix}=0.$$

Solution 4.11. :

1. *La fonction $\arctan(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.*
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in]a,b[$ tel que $\arctan(b)-\arctan(a)=\frac{b-a}{1+c^2}$.
Puisque $0<a<c<b$, alors $\frac{1}{1+b^2}<\frac{1}{1+c^2}<\frac{1}{1+a^2}$,
et $\frac{b-a}{1+b^2}<\frac{b-a}{1+c^2}<\frac{b-a}{1+a^2}$,
d'où le résultat

$$\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan(b)-\arctan(a)<\frac{b-a}{1+a^2}\quad \textit{pour } a,b \textit{ tels que } 0<a<b$$

2. *En prenant $a=1$ et $b=2$, on en déduit que $\frac15<\arctan(2)-\frac\pi4<\frac12$ et par suite :*

$$\frac\pi4+\frac15<\arctan(2)<\frac\pi4+\frac12$$

Solution 4.12. :

1. *Pour tout $x>0$, la fonction $f(t)=\sqrt t$ est continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$.*
Donc il existe $c\in]x,x+1[$ tel que $f(x+1)-f(x)=f'(c)$.
Ce qui donne $\sqrt{x+1}-\sqrt x=\frac{1}{2\sqrt c}$.
Et comme $x<c<x+1$, on a $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}<\frac{1}{2\sqrt c}<\frac{1}{2\sqrt x}$.
D'où le résultat :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}<\sqrt{x+1}-\sqrt x<\frac{1}{2\sqrt x}$$

2. *La fonction $f(t)=e^t$ est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$.*
D'après le théorème des accroissements finis, $\exists c\in]0,x[$ tel que $f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$.
Et donc $e^x-1=xe^c$.
Or $0\le c\le x\Rightarrow 1\le e^c\le e^x\Rightarrow x\le xe^c\le xe^x$.
D'où le résultat

$$x\le e^x-1\le xe^x$$

3. *L'inégalité est vérifiée si $x=\frac\pi4$.*
Pour $x\in[0,\frac\pi4[$, la fonction $f(t)=\cos t$ est continue sur $[x,\frac\pi4]$ -qui est un intervalle non vide- et dérivable sur $]x,\frac\pi4[$.
D'où il existe $c\in]x,\frac\pi4[$ tel que $f(\frac\pi4)-f(x)=(\frac\pi4-x)f'(c)$.
Par suite $\cos x-\frac{\sqrt2}{2}=(\frac\pi4-x)\sin c$.
La fonction $\sin t$ est croissante sur $[0,\frac\pi4]$ et $0\le c\le\frac\pi4$,
donc $\sin c\le\sin\frac\pi4=\frac{\sqrt2}{2}$.
D'où le résultat

$$\cos x-\frac{\sqrt2}{2}\le\frac{\sqrt2}{2}(\frac\pi4-x)$$

4. *La fonction $f(t)=\tan t$ est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$, donc il existe un réel $c\in]x,y[$ tel que $f(y)-f(x)=(y-x)f'(c)$.*
Par suite, $\tan y-\tan x=\frac{y-x}{\cos^2c}\ge0$.
Comme la fonction $\cos t$ est décroissante sur $[0,\frac\pi2]$, et $0<c\le y<\frac\pi2$, on a $\cos c\ge\cos y>0$. D'où $\frac{1}{\cos^2c}\le\frac{1}{\cos^2y}$ et ensuite $\frac{y-x}{\cos^2c}\le\frac{y-x}{\cos^2y}$
Sachant que tan est croissante sur $[0,\frac\pi2]$ on en déduit le résultat

$$0\le\tan y-\tan x\le\frac{y-x}{\cos^2y}\quad pour\ 0<x<y<\frac\pi2$$

5. *Si* $x = 0$, *alors* $|\sin 0| = |0|$.
Et si $x \neq 0$, *on considère la fonction* $\sin$ *qui est continue sur* $[0, x]$ *(ou* $[x, 0]$*) et dérivable sur* $]0, x[$ *(ou* $]x, 0[$*), en utilisant le théorème des accroissements finis on en déduit :*
il existe c *entre* 0 *et* x *tel que* $\sin x - \sin 0 = (x - 0)\cos c$. *D'où le résultat*

$$|\sin x| = |x||\cos c| \leq |x|.$$

Solution 4.13. :
La fonction $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ *est polynomiale, donc continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$.
Pour $a < b$ *deux réels,* f *est continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$. *D'après le théorème des accroissements finis il existe* $c \in]a, b[$ *tel que*
$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
Ce qui donne $A(b^2 - a^2) + B(b - a) = (b - a)(2Ac + B) = 2A(b - a)c + B(b - a)$, *et donc* $c = \frac{A(b^2-a^2)}{2A(b-a)} = \frac{b+a}{2}$.

Solution 4.14. :
La fonction $f(x) = 1 - |2x - 1|$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et dérivable là où* $2x - 1 \neq 0$ *(car la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en* 0*). C'est à dire* $x \neq \frac{1}{2}$.
On peut donc appliquer le théorème des accroissements finies à f *sur un intervalle* $[a, b]$ *tel que* $\frac{1}{2} \notin]a, b[$ *(*$a < b \leq \frac{1}{2}$ *ou bien* $\frac{1}{2} \leq a < b$*).*

Solution 4.15. :
1) Pour $a = 1$, $b = 3$ *et* $f(x) = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$-
l'équation $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ *donne :*
$0 = 2c - 4$ *et donc un unique* $c = 2$, *dont l'existence est déjà assuré par le théorème des accroissements finis.*
2) Pour $a = -1$, $b = 1$ *et* $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$
l'équation $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ *donne :*
$1 - (-1) = (1 - (-1))\frac{3}{5}c^{-\frac{2}{5}}$ *et donc* $c = (\frac{3}{5})^{\frac{5}{2}} \in] - 1, 1[$.
On a une solution même si le théorème des accroissements finis ne s'applique pas à cause de la non dérivabilité en 0 *de la fonction* $f(x)$.
3) Pour $a = -2\pi$, $b = 2\pi$ *et* $f(x) = \cos x + 2x$ *l'existence de* c *est déjà assuré par le théorème des accroissements finis.*
L'équation $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ *donne :*
$(1 + 4\pi) - (1 - 4\pi) = 8\pi = 4\pi(-\sin c + 2)$ *et donc* $\sin c = 0$.
Cette équation a plusieurs solutions dans $] - 2\pi, 2\pi[$, *à savoir* $c = -\pi$, $c = 0$ *ou* $c = \pi$.
4) Pour $a = -1$, $b = 1$ *et* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *l'équation* $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ *donne :*
$1 - (-1) = (1 - (-1))\frac{1}{3}c^{-\frac{2}{3}}$ *et donc* $c = (\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}} \in] - 1, 1[$.
On a une solution même si le théorème des accroissements finis ne s'applique pas à cause de la non dérivabilité en 0 *de la fonction* $f(x)$.

Solution 4.16. :
La fonction $F(x) = (f(a) - f(b))g(x) - (g(a) - g(b))f(x)$ *est de la forme* $F(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ *avec* $\alpha = f(a) - f(b)$ *et* $\beta = g(a) - g(b)$ *des constantes.*
Comme $f(x)$ *et* $g(x)$ *sont continues sur* $[a, b]$, $F(x)$ *est continue sur* $[a, b]$.
Et comme $f(x)$ *et* $g(x)$ *sont dérivables sur* $]a, b[$, $F(x)$ *est aussi dérivable sur* $]a, b[$.
Et l'on a en plus $F(a) = F(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$.

On a par conséquence du théorème de Rolle l'existence de $c \in]a, b[$ *tel que* $F'(c) = 0$.
D'où $(f(a) - f(b))g'(c) - (g(a) - g(b))f'(c) = 0$, *et par suite* $\frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a) - g(b)}$.

Solution 4.17. :
Supposons que f *change de signe sur* $[0, 1]$, *ce qui signifie qu'il existe* a *et* b *dans* $[0, 1]$ *tels que*
$f(a) \times f(b) < 0$.
f *étant dérivable sur* $[0, 1]$, *donc elle est continue sur* $[0, 1]$. *D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f(c) = 0$ $(0 < a < c < b)$.
f *étant dérivable sur* $[0, 1]$, *donc continue sur* $[0, c]$ *et dérivable sur* $]0, c[$. *D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc* $d \in]0, c[$ *tel que*
$f(c) - f(0) = (c - 0)f'(d)$.
Comme $f(c) = f(0) = 0$ *et* $c \neq 0$, *on arrive à* $f'(d) = 0$ *! Ce qui est absurde.*
Par suite f *garde un signe constant sur* $[0, 1]$.

Solution 4.18. :
1) La fonction $f(x) = x - \cos x$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6} \approx -0.34 < 0$ *et* $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4} \approx 0.08 > 0$.
Ainsi f *est continue sur* $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ *et* $f(\frac{\pi}{6}) \times f(\frac{\pi}{4}) < 0$. *En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires on obtient :*
$(\exists x_o \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[)\ /\ f(x_o) = 0$.
2) La fonction f *étant continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$, *elle est donc continue sur* $[x_o, \frac{\pi}{4}]$ *et dérivable sur* $]x_o, \frac{\pi}{4}[$.
D'après le théorème des accroissements finis on en déduit :
$(\exists c \in]x_o, \frac{\pi}{4}[)$ *tel que* $f(\frac{\pi}{4}) - f(x_o) = (\frac{\pi}{4} - x_o)f'(c)$
qui donne $\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4} = (\frac{\pi}{4} - x_o)f'(c)$.
D'où $(\exists c \in]x_o, \frac{\pi}{4}[)\ /\ f'(c) = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{\pi - 4x_o}$.

Solution 4.19. :

1. *La formule de Mac-Laurin à l'ordre 2 s'écrit*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f^{(3)}(c),$$

où c *est entre* 0 *et* x.
On a $f(t) = \ln(1 + t)$, $f'(t) = \frac{1}{1+t}$, $f''(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}$ *et* $f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$. *D'où* $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$ *et* $f^{(3)}(c) = \frac{2}{(1+c)^3}$. *Par suite*

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1 + c)^3}.$$

2. *Par encadrement, on obtient*

$$0 < c < x \Rightarrow 0 < \frac{1}{(1 + x)^3} < \frac{1}{(1 + c)^3} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x^3}{3(1 + x)^3} < \frac{x^3}{3(1 + c)^3} < \frac{x^3}{3}.$$

D'où

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Solution 4.20. :

1. *D'après la formule de Mac-Laurin appliquée à la fonction* $f(t) = \sqrt{1+t}$, *il existe* $c \in]0, x[$ *tel que*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(c).$$

On a $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$ *et* $f''(t) = -\frac{1}{4\sqrt{(1+t)^3}}$. *D'où* $f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8\sqrt{(1+c)^3}}$. *Et*

$$c > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(1+c)^3}} < 1 \Rightarrow -\frac{x^2}{8\sqrt{(1+c)^3}} > -\frac{x^2}{8} \Rightarrow f(x) > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

2. *L'inégalité est vérifiée si* $x = 0$. *Pour* $x \neq 0$ *et* $f(t) = e^t$, *la formule de Mac-Laurin à l'ordre trois assure l'existence d'un réel* c *entre* 0 *et* x *tel que*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{24} f^{(4)}(c).$$

Puisque $f^{(k)}(t) = e^t, \forall k \in \mathbb{N}$, *alors* $f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 1$ *et* $f^{(4)}(c) = e^c$. *D'où*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} e^c \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

car $\frac{x^4}{24} e^c \geq 0$.

3. *Pour* $x = 0$, *l'inégalité est vérifiée. Pour* $x \neq 0$, *et d'après la formule de Mac-Laurin appliquée à la fonction* $f(t) = \cos t$ *avec* $n = 1$ *et* $n = 3$ *respectivement, ils existent deux réels* c_1 *et* c_2 *entre* 0 *et* x *tels que*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(c_1)$$

et

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{24} f^{(4)}(c_2).$$

Comme $f'(t) = -\sin t$, $f''(t) = -\cos t$, $f^{(3)}(t) = \sin t$ *et* $f^{(4)}(t) = \cos t$, *on obtient*

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \cos c_1 \quad \text{et} \quad f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \cos c_2.$$

On a

$$\cos c_1 \leq 1 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} \cos c_1 \geq -\frac{x^2}{2} \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} \cos c_1 \geq 1 - \frac{x^2}{2},$$

et

$$\cos c_2 \leq 1 \Rightarrow \frac{x^4}{24} \cos c_2 \leq \frac{x^4}{24} \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \cos c_2 \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

D'où

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

4. *En appliquant la formule de Mac-Laurin à la fonction* $f(t) = \tan t$ *sur* $[0, x]$, *il existe* $c \in]0, x[$ *tel que*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f^3(c).$$

On a $f'(t) = 1 + \tan^2 t$, $f''(t) = 2\tan t(1 + \tan^2 t)$ *et* $f^{(3)}(t) = 2(1 + \tan^2 t)(1 + 3\tan^2 t)$. *D'où*

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3}(1 + \tan^2 c)(1 + 3\tan^2 c) \geq x.$$

La fonction $\tan t$ *étant croissante sur* $[0, \frac{\pi}{6}]$ *et* $0 \leq c \leq \frac{\pi}{6}$, *il vient*

$$(1 + \tan^2 c)(1 + 3\tan^2 c) \leq (1 + \tan^2 \frac{\pi}{6})(1 + 3\tan^2 \frac{\pi}{6}) = (1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{3}{3}) = \frac{8}{3}.$$

D'où

$$\tan x \leq x + \frac{8}{9} x^3 \leq x + x^3.$$

Solution 4.21. :

1) Soit $x > 0$. *En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin à l'ordre un, pour* $f(t) = \sin t$ *-indéfiniment dérivable- sur l'intervalle* $]0, x[$, *on a l'existence de* $\theta \in]0, 1[$ *tel que*
$\sin x = f(x) = f(0) + xf'(\theta x) = x\cos(\theta x)$.
Comme $x > 0$ *et* $\cos(\theta x) \leq 1$, *on obtient* $\sin x = x\cos(\theta x) \leq x$ *(valable même si* $x = 0$*).*
D'où le résultat

$$\forall x \geq 0, \quad \sin x \leq x.$$

2) Si $x = 0$, *l'inégalité est évidemment vérifiée.*
Si $x > 0$, *on considère la fonction* $f(t) = \arctan t$ *sur l'intervalle* $[0, x]$. *Elle est indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$. *On lui applique la formule de Taylor-Mac-Laurin. On a l'existence de* $\theta \in]0, 1[$ *tel que*
$\arctan x = f(x) = f(0) + xf'(\theta x) = x\frac{1}{1 + (\theta x)^2}$
Comme $0 < \theta < 1$ *et* $x > 0$, *donnent* $1 < 1 + (\theta x)^2 < 1 + x^2$,
puis $\frac{1}{1 + x^2} < \frac{1}{1 + (\theta x)^2} < 1$,
on obtient finalement

$$(\forall x \in [0, +\infty[), \qquad \frac{x}{1 + x^2} \leq \arctan x \leq x.$$

3) Pour $x \in]0, 1[$, *on considère la fonction* $f(t) = \arcsin t$ *sur l'intervalle* $[0, x]$. *Elle est indéfiniment dérivable sur* $]0, x[$. *On lui applique la formule de Taylor-Mac-Laurin. On a l'existence de* $\theta \in]0, 1[$ *tel que*
$\arcsin x = f(x) = f(0) + xf'(\theta x) = x\frac{1}{\sqrt{1 - (\theta x)^2}}$.
Comme $0 < \theta < 1$ *et* $0 < x < 1$, *donnent* $0 < 1 - x^2 \leq 1 - (\theta x)^2$,
puis $\frac{1}{\sqrt{1 - (\theta x)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$,
on obtient finalement

$$(\forall x \in]0, 1[), \qquad \arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Solution 4.22. :

a) On a : $60,1^o = (60+0,1)^o = 60^o(1+\frac{1}{600}) = \frac{\pi}{3}(1+\frac{1}{600}) = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{1800}$ *en radians.*
Posons $a = \frac{\pi}{3}$ *et* $b = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{1800}$.
Par application de la formule de Taylor-Lagrange, on a l'existence de $c \in]a,b[$ *tel que*
$\cos(b) = \cos(a) - (b-a)\sin(a) - \frac{(b-a)^2}{2}\cos(c)$.
Ce qui donne $\cos(b) = \cos(60,1)^o \approx \frac{1}{2} - \frac{\pi}{1800}\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,4985$.

b) Par la même formule et avec $a=1$, $b=1,001$ *et* $f(t) = \arctan t$, *il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*
$\arctan(1,001) = \arctan 1 + \frac{0,001}{1+a^2} + \frac{(0,001)^2}{2}f''(c) \approx 0,7858$.

c) On fait de même qu'avant : $a=1$, $b=1,002$ *et* $f(t)=\ln t$, *il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*
$\ln(1,002) = f(1) + (0,002)f'(1) - \frac{(0,002)^2}{2}f''(1) + \frac{(0,002)^3}{6}f'''(c) \approx 0,001998$.

d) On a : $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = 2\sqrt{1+0,25} \approx 2(1+\frac{0,25}{2} - \frac{(0,25)^2}{4} + \frac{3}{8}(0,25)^3)$.
C'est à dire $\sqrt{5} \approx 2,235$ *(on a utilisé la fonction* $f(x) = \sqrt{1+x}$*).*

Solution 4.23. :

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$, *il existe un réel c entre 0 et x tel que*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Puisque, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(t) = e^t$, *on obtient*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c.$$

2. *Pour* $x = 1$, *on a*

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^c.$$

D'où $|u_n - e| = \frac{1}{(n+1)!}e^c \leq \frac{e}{(n+1)!}$, *car* $c < 1$. *Et puisque* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{(n+1)!} = 0$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

Solution 4.24. :

1. *En posant* $f(x) = \tan x$ *et* $g(x) = \arcsin x$, *on a :*
   1- $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0$ *sur* $]-1,0[\cup]0,1[$
   2- $f(0) = g(0) = 0$
   3- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{1+\tan^2(x)}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 1$
   A partir de ces hypothèses, on utilise la règle de l'Hôpital . D'où

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\tan(x)}{\arcsin x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$$

2. *En utilisant la règle de l'Hôpital avec* $f(x) = 2x\sin x - \pi$ *et* $g(x) = 2\cos x$, *on a*
   $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2x\sin x - \pi}{2\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2\sin x + 2x\cos x}{-2\sin x} = -1.$
3. *En utilisant la règle de l'Hôpital avec* $f(x) = \sqrt{3+\cos x} - 2$ *et* $g(x) = x^2$ *et ensuite le fait que* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ *on a :*
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{3+\cos x}}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{x}\dfrac{1}{4\sqrt{3+\cos x}} = \dfrac{-1}{8}.$
4. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\dfrac{\pi x}{2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\cos\frac{\pi x}{2}}\sin\dfrac{\pi x}{2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}} = -\dfrac{2}{\pi}.$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-\sin x}{2x\cos x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 5x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} = \dfrac{1}{5}\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 5x}{\cos x}\right)^2 = \dfrac{1}{5}\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{5\sin 5x}{\sin x}\right)^2 = 5.$
   Pour cette limite on a utilisé deux fois la règle de l'Hôpital (et en général autant de fois qu'on veut).
7.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + 1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}.$$

8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{\cos 3x - 2\cos^2 x + \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x} - 2e^x}{-3\sin 3x + 2\sin 2x - \sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x} - 2e^x}{-9\cos 3x + 4\cos 2x - \cos x} = -\frac{1}{3}.$$

Là aussi, On a utilisé deux fois la règle de l'Hôpital.

4.4 Exercices supplémentaires

Exercice 4.25. :
Peut-on appliquer le théorème de Rolle aux fonctions suivantes ?

1. $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ *sur* $[0,4]$, 2. $g(x) = \tan x$ *sur* $[0,\pi]$.

Exercice 4.26. :
1) On pose $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ *a exactement trois solutions dans* $\mathbb{R}$.
2) Que peut-on dire de la fonction $g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ *?*

Exercice 4.27. :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos(2x)}{1+\cos^2(2x)}$. *Montrer que* f' *s'annule au moins une fois sur l'intervalle* $]0,\pi[$.

Exercice 4.28. :
Soit f *une fonction définie et continue sur* $[a,b]$, *dérivable sur* $]a,b[$ *telle que* f' *ne s'annule pas sur* $]a,b[$. *Montrer que* f *est injective.*

Exercice 4.29. :
Montrer que l'équation $e^x = 1 + x$ *admet une seule solution* $x = 0$.

Exercice 4.30. :
Montrer qu'entre deux racines réelles de $e^x \sin x = 1$, *il existe une racine réelle de* $e^x \cos x = -1$.
Indication : Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $e^{-x} - \sin x$.

Exercice 4.31. :
Soient a *et* b *deux réels fixés et* n *un entier tel que* $n \geq 2$. *On pose* $P(x) = x^n - ax - b$.
1) Montrer que si n *est pair le polynôme* $P(x)$ *ne peut avoir plus que deux racines réelles.*
2) Montrer que si n *est impair le polynôme* $P(x)$ *ne peut avoir plus que trois racines réelles.*

Exercice 4.32. :
On considère la fonction définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = |x^2-1| + |2x^2 - x| \end{array}$
Pour quelles valeurs de a *et* b *peut-on appliquer le théorème des accroissements finis à* f *sur* $[a,b]$ *?*

Exercice 4.33. :
Étudier l'existence et l'unicité de $c \in]a,b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

dans les cas suivants :
1) $a = -1$, $b = 1$ *et* $f(x) = x^2 - 1$.
2) $a = -2$, $b = 2$ *et* $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.
3) $a = 0$, $b = 2\pi$ *et* $f(x) = \sin x + 3x$.

Exercice 4.34. :

1. *Montrer que* $1 - \frac{a}{b} < \ln(\frac{b}{a}) < \frac{b}{a} - 1$ *si* $0 < a < b$.
2. *En déduire que* $\frac{1}{6} < \ln(1,2) < \frac{1}{5}$.

Exercice 4.35. :
Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ *on a :*

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 4.36. :

1. *Montrer que pour tout* $x > 0$, $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.
2. *En déduire* $\lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$, *puis* $\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x$.

Exercice 4.37. :
Démontrer que pour tout $x > 0$ *on a :*

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x.$$

Exercice 4.38. :
Démontrer que pour tous a *et* b *deux réels donnés tels que* $0 < a \leq b < \frac{\pi}{2}$ *on a :*

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}.$$

Exercice 4.39. :
Soit f *une fonction numérique à variable réelle définie et dérivable sur l'intervalle* $[a,b]$, *telle que :*

$$f'(a) = f'(b).$$

Montrer que : $\exists c \in]a,b[$, $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

Exercice 4.40. :
Soit f *une fonction numérique définie et dérivable sur* $]0,+\infty[$ *telle que :*

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad et \quad f(1) = 0.$$

1) Déterminer le signe de $f(x)$ *pour tout* $x \in]0,+\infty[$.
2) Démontrer que pour tout a *strictement positif*

$$\frac{a-1}{a} \leq f(a) \leq a - 1.$$

3) Démontrer que :

$$\forall (x,y) \in (]0,+\infty[)^2, \quad \begin{cases} f(xy) = f(x) + f(y) \\ f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) \end{cases}$$

Exercice 4.41. :
Établir les inégalités suivantes en utilisant le théorème des accroissements finis :

1. $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x, \forall x > 0.$
2. $\arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]0,1[.$
3. $\frac{-x}{2\sqrt{1-x}} < \sqrt{1-x} - 1 < \frac{-x}{2}, \forall x \in]0,1[.$
4. $|\cos(x+1) - \cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R},$
5. $|e^{-y} - e^{-x}| \leq |y - x|, \forall x, y$ *tels que* $x \geq 0$ *et* $y \geq 0.$

Exercice 4.42. :
En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\cosh x} - e^{\cos x}}{\cosh x - \cos x}.$$

Exercice 4.43. :

1. *Écrire la formule de Mac-Laurin pour la fonction* $f(x) = \ln(1+x)$.
2. *En déduire la limite de la suite* $(u_n)_n$ *définie par*

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 4.44. :

1. *Montrer que* $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \forall x > 0.$
2. *En déduire* $\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n^2}).$

Exercice 4.45. :
Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hôpital :

1. $\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ 2. $\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x}$ 3. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$

4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ 5. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$ 6. $\lim_{x \to 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$

7. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2}$ 8. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$

Exercice 4.46. :
Soit $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2 *telle que* $g(0) = g'(0) = 0$. *On pos*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \in [-1,1] \backslash \{0\}, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f *est dérivable en* 0.

4.5 Indications sur les exercices supplémentaires

Solution 4.25. :

1. *Non, car* f *n'est pas dérivable en* 2 :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}} = +\infty.$$

2. *Non, car* g *n'est pas définie en* $\frac{\pi}{2}$.

Solution 4.26. :
1) Remarquer que $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ *est un polynôme de degré quatre, sa dérivée* $f'(x)$ *est de degré trois, a au plus trois racines dans* $\mathbb{R}$. *Utiliser le théorème de Rolle pour montrer que* $f'(x)$ *a déjà au mois trois solutions* $x_1 \in]0,1[$, $x_2 \in]1,2[$ *et* $x_3 \in]2,3[$.
2) Faire de même pour vérifier que si $g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ *l'équation* $g'(x) = 0$ *a exactement quatre racines dans* $\mathbb{R}$.

Solution 4.27. :
La fonction f *est continue sur* $[0, \pi]$ *et dérivable sur* $]0, \pi[$. *De plus,* $f(0) = f(\pi) = \frac{1}{2}$.
D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, \pi[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Solution 4.28. :
Supposons qu'ils existent $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$, *tels que* $f(x_1) = f(x_2)$. *La fonction* f *est continue sur* $[x_1, x_2]$, *et dérivable sur* $]x_1, x_2[$. *Donc il existe* $c \in]x_1, x_2[$ *tels que* $f'(c) = 0$, *ce qui est absurde.*

Solution 4.29. :
Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $e^a = 1 + a$. *La fonction* $f(x) = e^x - x$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec* $f(0) = f(a) = 1$. *D'après le théorème de Rolle, il existe un réel* c *entre 0 et* a *tel que* $f'(c) = 0$. *D'où* $e^c = 1$, *ce qui est absurde car* $c \neq 0$.

Solution 4.30. :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *tels que* $e^a \sin a = e^b \sin b = 1$. *La fonction* $f(x) = e^{-x} - \sin x = \frac{1 - e^x \sin x}{e^x}$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec* $f(a) = \frac{1 - e^a \sin a}{e^a} = 0$, *et de même,* $f(b) = 0$. *Donc il existe* $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$. *D'où* $-e^{-c} - \cos c = 0$, *et par conséquent,* $e^c \cos c = -1$.

Solution 4.31. :
1) Pour $n \geq 2$ *pair, la seule racine réelle de* $P'(x) = nx^{n-1} - a = 0$ *est* $\sqrt[n-1]{\frac{a}{n}}$.
Et donc $P(x)$ *ne peut avoir plus que deux racines réelles (sinon, en utilisant le théorème de Rolle* $P'(x)$ *aurait plus d'une racine !).*
2) Pour $n \geq 2$ *impair,* $Q(x) = P'(x) = nx^{n-1} - a = n(x^{n-1} - \frac{a}{n})$ *ne peut avoir plus que deux racines réelles d'après (1). Et donc* $P(x)$ *ne peut avoir plus que trois racines réelles.*

Solution 4.32. :
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ *et définie par*

$f(x) = |x^2-1| + |2x^2-x| = |x+1|\times|x-1| + 2|x-0|\times|x-\frac{1}{2}|$
est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1[\cup]1,+\infty[$ *et ne l'est pas aux points* -1, 0, $\frac{1}{2}$ *et* 1. *On peut appliquer le théorème des accroissements finis à* f *sur* $[a,b]$ *tel que*
$[a,b]\subset]-\infty,-1]$, *ou* $[a,b]\subset[-1,0]$, *ou* $[a,b]\subset[0,\frac{1}{2}]$, *ou* $[a,b]\subset[\frac{1}{2},1]$, *ou* $[a,b]\subset[1,+\infty[$.

Solution 4.33. :
1) Pour $a=-1$, $b=1$ *et* $f(x)=x^2-1$, $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ *équivaut à* $0=2(2c)$ *et donc* $c=0$ *est unique.*
2) Pour $a=-2$, $b=2$ *et* $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ *équivaut à* $0=4(\frac{2}{3c^{\frac{1}{3}}})$ *et donc pas d'existence de* c.
3) Pour $a=0$, $b=2\pi$ *et* $f(x)=\sin x+3x$, $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ *équivaut à* $6\pi=2\pi(\cos c+3)$, *puis à* $\cos c=0$.
Comme $c\in]0,2\pi[$, *on obtient deux solutions* $c=\frac{\pi}{2}$ *ou* $c=\frac{3\pi}{2}$.

Solution 4.34. :

1. *On applique le théorème des accroissements finis à la fonction* $\ln(x)$ *sur l'intervalle* $[a,b]$. *Il existe alors* $c\in]a,b[$ *tel que* $\ln(\frac{b}{a})=\ln(b)-\ln(a)=\frac{b-a}{c}$.
   Or $0<a<c<b\Rightarrow\frac{b-a}{b}<\frac{b-a}{c}<\frac{b-a}{a}$, *d'où* $1-\frac{a}{b}<\ln(\frac{b}{a})<\frac{b}{a}-1$.
2. *Il suffit de prendre* $a=1$ *et* $b=1,2$. *Ou, d'une manière générale,* $a\in\mathbb{R}_+^*$ *quelconque et* $b=1,2a$. *Alors* $\frac{b}{a}=1,2$, $\frac{b}{a}-1=0,2=\frac{1}{5}$ *et* $1-\frac{a}{b}=\frac{0,2}{1,2}=\frac{1}{6}$. *D'où le résultat.*

Solution 4.35. :
On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $\ln(1+t)$ *sur l'intervalle* $[0,x]$.
On aura l'existence de c *tel que* $0<c<x$ *et* $f(x)-f(0)=(x-0)f'(c)$
et donc $\ln(1+x)=x\frac{1}{1+c}$ *avec* $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+c}<1$.
En multipliant par x *positif, on obtient,* $\forall x\in\mathbb{R}_+$:

$$\frac{x}{1+x}\leq\ln(1+x)\leq x$$

Solution 4.36. :

1. *La fonction* $\ln(t)$ *est continue et dérivable sur* $]0,+\infty[$, *donc elle vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur l'intervalle* $[x,x+1]$ *si* $x>0$. *Par suite, il existe* $c\in]x,x+1[$ *tel que* $\ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{c}$. *On en déduit que* $\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}$, *puisque* $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$.
2. *D'après la question 1.,* $\frac{x}{x+1}<x(\ln(x+1)-\ln(x))<1$.
   Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(x+1)-\ln(x))=1$.
   On a
   $$(1+\frac{1}{x})^x=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{x\ln\frac{x+1}{x}}=e^{x(\ln(x+1)-\ln(x))}.$$
   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

Solution 4.37. :
Pour $x>0$, *utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle* $[0,x]$ *et avec la fonction* $f(t)=e^t$. *Ce qui donne :*
$\exists c\in]0,x[$ *tel que* $\frac{e^x-e^0}{x-0}=\frac{e^x-1}{x-0}=e^c$.
Comme $0<c<x$, *on a* $1<e^c<e^x$. *D'où le résultat :*

$$\forall x>0,\quad 1\leq\frac{e^x-1}{x}\leq e^x.$$

Solution 4.38. :
Utiliser le théorème des accroissements finies sur $]a,b[\subset]0,\frac{\pi}{2}[$ *avec* $f(x)=\tan x$ *et comparer* $\cos^2 a$, $\cos^2 b$ *et* $\cos^2 c$.

Solution 4.39. :
Définir la fonction $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & si\ x\in]a,b]\\ f'(a) & si\ x=a\end{cases}$.
Justifier l'existence de $d\in]a,b[$: $g'(d)=\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$.
Vérifier que $g'(b)=-g'(d)$.
Si $g'(d)=0$ *donner* c.
Si $g'(d)\neq0$, *justifier que* g' *change de signe et que* g *possède un extremum puis conclure.*

Solution 4.40. :
1) f' *étant strictement positive donc* f *est strictement croissante, en déduire le signe de* f *sur* $]0,1[$ *et sur* $]0,+\infty[$.
2) Utiliser le théorème des accroissements finis sur $]a,1[$ *ou* $]1,a[$ *suivant que* $1<a$ *ou* $a<1$.
3) Poser $h(x)=f(xy)-f(x)-f(y)$ *en fixant* y. *Calculer* $h'(x)$ *et en déduire que* h *est constante nulle.*
Appliquer h *à* $\frac{x}{y}$.

Solution 4.41. :

1. *La fonction* $f(t)=\ln(1+t)$ *est continue sur* $[0,x]$ *et dérivable sur* $]0,x[$, *d'où* $\exists c\in]0,x[$ *tel que* $f(x)-f(0)=xf'(c)$. *Par conséquent,* $\ln(1+x)=\frac{x}{1+c}$. *Or* $0<c<x\Rightarrow\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+c}<1$. *D'où* $\dfrac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$.
2. *La fonction* $f(t)=\arcsin t$ *est continue sur* $[0,x]$ *et dérivable sur* $]0,x[$. *Donc il existe* $c\in]0,x[$ *tel que* $f(x)-f(0)=(x-0)f'(c)$, *soit* $\arcsin x=\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$.
   Comme $0<c<x<1$, *alors* $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. *D'où* $\arcsin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. *On applique le théorème des accroissements finis pour* $f(t)=\sqrt{1-t}$ *sur l'intervalle* $[0,x]$. *Il existe alors* $c\in]0,x[$ *tel que* $\sqrt{1-x}-1=\frac{-x}{2\sqrt{1-c}}$. *Comme* $0<c<x$, *alors* $1<\frac{1}{\sqrt{1-c}}<\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. *D'où* $\frac{-x}{2\sqrt{1-x}}<\sqrt{1-x}-1<\frac{-x}{2}$.
4. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$, *l'application* $t\mapsto\cos t$ *est continue sur* $[x,x+1]$ *et dérivable sur* $]x,x+1[$ *avec* $\cos' t=-\sin t$. *Donc il existe* $c\in]x,x+1[$ *tel que* $\cos(x+1)-\cos x=-\sin c$. *Par suite* $|\cos(x+1)-\cos x|=|\sin c|\leq1$.

5. *L'inégalité est vérifiée si $x = y$. Supposons que $x \neq y$, alors il existe c entre x et y tel que $e^{-y} - e^{-x} = -e^{-c}(y-x)$. D'où $|e^{-y} - e^{-x}| = e^{-c}|y-x| \leq |y-x|$, car $e^{-c} \leq 1$.*

Solution 4.42. :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction e^t est continue sur $[\cos x, \cosh x]$ et dérivable sur $]\cos x, \cosh x[$. Donc il existe $c \in]\cos x, \cosh x[$ tel que

$$e^{\cosh x} - e^{\cos x} = (\cosh x - \cos x)e^c.$$

Si $x \to 0$, alors $c \to 1$, et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cosh x} - e^{\cos x}}{\cosh x - \cos x} = \lim_{c\to 1} e^c = e.$$

Solution 4.43. :

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe un réel c entre 0 et x tel que*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}$. D'où

$$\frac{x^k}{k!}f^k(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$$

Par suite

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}.$$

2. *Pour $x = 1$, on obtient $\ln(2) = u_n + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$. D'où*

$$|u_n - \ln(2)| = \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$.

Solution 4.44. :

1. *D'après l'exercice précédent, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+c)^2}$, où $c \in]0, x[$. Puisque $0 < c < x \Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} < \frac{1}{(1+c)^2} < 1$, alors*

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)^2} < x.$$

2. *Posons $u_n = (\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n^2}))$. Alors*

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n^2}) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

En utilisant les résultats $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^n k^2 \leq n \times n^2$ on a

$$\ln(u_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4} \geq \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \geq \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2n}.$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n^2}) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Solution 4.45. :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}.$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \times \frac{1}{1+x} = 1.$
3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x(1 - \cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 3.\end{aligned}$$

4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0.$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{\cos 3x} \times \frac{\cos 2x}{2\sin 2x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{2\cos 2x} = \frac{9}{4}.$
6. $\lim_{x\to 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi \sin \pi x}{2x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$
7.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{4x\sin x + 2x^2\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\sin x}{x}}{4\frac{\sin x}{x} + 2\cos x} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin 2x}{2x\sin^2 x + x^2 \sin 2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{2\sin^2 x + 4x\sin 2x + 2x^2\cos 2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin 2x}{6\sin 2x + 12x\cos 2x - 4x^2 \sin 2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{8\cos 2x}{24\cos 2x - 32x\sin 2x - 8x^2\cos 2x} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Solution 4.46. :
En utilisant la règle de l'Hôpital deux fois, pour passer de $\frac{g(x)}{x^2}$ à $\frac{g'(x)}{2x}$, et pour passer de $\frac{g'(x)}{2x}$ à $\frac{g''(x)}{2}$, on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)}{2}=\frac{g''(0)}{2}.$$

Par conséquent, $f'(0)=\frac{g''(0)}{2}$.

Chapitre 5

La convexité et ses applications

5.1 Rappels de cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I et C la courbe représentative de f dans un repère du plan.

Définition 5.1. *Une partie Δ de $\mathbb{R}^2$ est dite convexe lorsque, pour A et B deux points quelconques de Δ, on a le segment $[AB]$ est inclus dans Δ.*
L'épigraphe de f est l'ensemble noté et défini par $Ep(f)=\{(x,y)\in I\times\mathbb{R}\ /\ y\geq f(x)\}$.
On dit que f est convexe lorsque son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.
f est une fonction concave si la fonction $(-f)$ est convexe.

Propriétés 8. *Les énoncés suivants sont équivalents :*
- *f est convexe sur I,*
- *$\forall(u,v)\in I^2$ et $\forall\lambda\in]0,1[$*

$$f(\lambda u+(1-\lambda)v)\leq\lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)$$

- *Pour tout $a\in I$ la fonction $\varphi_a(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I-\{a\}$*

Théorème 5.1. *Lorsque f est dérivable sur I on a l'équivalence :*
f convexe sur $I \iff f'$ croissante sur I

Théorème 5.2. *Lorsque f est deux fois dérivable sur I on a l'équivalence :*
f convexe sur $I \iff f''$ positive sur I

Proposition 5.1. *Soit f convexe et dérivable sur l'intervalle $I=[a,b]$. Pour chaque $x_o\in[a,b]$ on a :*

$$\forall x\in[a,b],\qquad f(x_o)+(x-x_o)f'(x_o)\leq f(x)\leq f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Ce qui signifie que la courbe de f sur I est au dessus de la tangente en x_o quelconque de $[a,b]$ et au dessous de la corde reliant les deux points $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$.

5.2 Énoncés des exercices

Exercice 5.1. :
On définit la fonction f par

$$f \; : \; I=[0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow \begin{cases} 1-x & si\ x\in[0,1[\\ 1 & si\ x=1 \\ x-1 & si\ x\in]1,2] \end{cases}$$

1) Étudier la continuité, la dérivabilité et la dérivabilité seconde de f sur I.
2) Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose $x_1=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{3}{2}$.
Calculer $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$ et $\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$.
3) f est-elle convexe (resp. concave) sur I ?

Exercice 5.2. :
Déterminer les intervalles de convexité et de concavité, les points d'inflexion des courbes des fonctions suivantes :
$f(x)=e^{-x^2}$ et $g(x)=xe^{-x^2}$.

Exercice 5.3. :
Soit $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ avec a,b et c trois réels.
Déterminer a,b,c pour que f soit convexe sur $[0,+\infty[$ et concave sur $]-\infty,0[$.

Exercice 5.4. :
Soit $f(x)=ax^3+bx$ avec a,b deux réels et $a\neq 0$.
Étudier la convexité de f suivant les valeurs de a et b.

Exercice 5.5. :
1) Montrer que la fonction $f(x)=e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire que pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:
a- $e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}} \leq \frac{e^x}{2}+\frac{e^y}{3}+\frac{e^z}{6}$.
b- $e^{\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}} \leq \frac{1}{3}(e^x+e^y+e^z)$.

Exercice 5.6. :
a) Montrer que la fonction définie par $f(x)=e^{2x+\sin x}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
b) Soit $g \; : \; \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$ $\quad g(x)>0$.
Montrer que si la fonction $h(x)=\ln(g)$ est convexe alors g est convexe.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5.7. :
Soient $n\geq 2$ un entier naturel, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ des réels positifs tels que :
$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$.
Montrer que pour tous $x_1,x_2,\cdots,x_n$ des réels donnés on a :
1)
$$(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2 \leq a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2.$$

2) Et si en plus $a_i>0$ et $x_i>0$ pour $i=1,2\cdots,n$ alors
$$\ln(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n) \geq a_1\ln x_1+a_2\ln x_2+\cdots+a_n\ln x_n.$$
3) Et si en plus $a_i>0$ et $x_i>0$ pour $i=1,2\cdots,n$ alors
$$\frac{1}{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n} \leq \frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}.$$

Exercice 5.8. :
On pose $f(x)=-\ln x$.
1) Montrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$.
2) Vérifier que $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}\quad\forall(x,y)\in I^2$.
3) Montrer que pour $n\geq 2$ un entier naturel, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ des réels strictement positifs on a :
$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.
4) Étudier le problème d'égalité dans cette inégalité.

Exercice 5.9. :
Soient $n\geq 2$ un entier naturel, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{p=1}^{n}a_p=a_1+a_2+\cdots+a_n=1$.
1) Montrer que si k est un entier naturel alors on a :
$n^{k+1}\leq a_1^{-k}+a_2^{-k}+\cdots+a_n^{-k}$.
2) Étudier le problème d'égalité dans cette inégalité.

Exercice 5.10. :
Soit $p\in\mathbb{R}$ et f_p la fonction définie par $f_p(x)=x^p$ sur $]0,+\infty[$.
1) Pour quelle valeurs de p la fonction f_p est convexe ?
2) Pour $p>1$, vérifier que f_p est convexe et que l'on a
$$\forall x\in[1,2]\quad (x-1)p+1\leq x^p\leq(2^p-1)(x-1)+1.$$

Exercice 5.11. :
a- Vérifier que la fonction $f(x)=\sin x$ est concave sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
b- En déduire que :
$$\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]\quad \frac{2}{\pi}x\leq\sin x\leq x.$$

Exercice 5.12. :
Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, dérivable et concave telle que $f(0)\geq 0$.
Montrer que
$$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2\qquad f(x+y)\leq f(x)+f(y).$$
Essayer d'utiliser la fonction $g_x(y)=f(x+y)-f(x)-f(y)$ définie pour x fixé.

5.3 Solutions détaillées des exercices

Solution 5.1. :
1) La fonction f est continue sur $[0,1[$ et sur $]1,2]$ puisqu'elle est polynomiale sur chacun de ces intervalles disjoints.
Et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x-1) = 0 \neq f(1)$. Par suite f n'est pas continue en 1.
Les dérivées premières et secondes de la fonction f sur chacun des intervalles disjoints $[0,1[$ et $]1,2]$ existent. Mais f n'est pas dérivable en 1 puisqu'elle n'est même pas continue en 1.

2) Pour $\alpha \in]0,1[$, $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{3}{2}$, on a :
$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f(\alpha\frac{1}{2} + (1-\alpha)\frac{3}{2}) = f(\frac{3-2\alpha}{2})$.
Comme on a :

$$0<\alpha<1 \Rightarrow \begin{cases} 0<\alpha<\frac{1}{2} & \Rightarrow -1<-2\alpha<0 \quad \Rightarrow 1<\frac{3-2\alpha}{2}<\frac{3}{2} \\ & \text{ou} \\ \alpha=\frac{1}{2} & \Rightarrow \frac{3-2\alpha}{2}=1 \\ & \text{ou} \\ \frac{1}{2}<\alpha<1 & \Rightarrow -2<-2\alpha<-1 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{3-2\alpha}{2}<1 \end{cases}$$

On en déduit que

$$f(\tfrac{3-2\alpha}{2}) = \begin{cases} (\frac{3-2\alpha}{2})-1 = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1}{2}-\alpha & si \quad 0<\alpha<\frac{1}{2} \\ 1 & si \quad \alpha=\frac{1}{2} \\ 1-(\frac{3-2\alpha}{2}) = \alpha-\frac{1}{2} & si \quad \frac{1}{2}<\alpha<1 \end{cases}$$

D'autre part
$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2) = \alpha f(\frac{1}{2})+(1-\alpha)f(\frac{3}{2}) = \alpha\frac{1}{2}+(1-\alpha)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
3) On en déduit que $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$ si $\alpha \neq \frac{1}{2}$
et $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2) > \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$ si $\alpha=\frac{1}{2}$.
Ainsi f n'est ni convexe ni concave sur I.

Solution 5.2. :
1- La fonction $f(x) = e^{-x^2}$ étant dérivable à l'ordre deux, on utilise la dérivée seconde pour étudier la convexité.
On a $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ et $f''(x) = 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$.
Le polynôme $(2x^2-1)$ s'annule en $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et en $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de signe positif sur $]-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty[$ et de signe négatif sur $[x_1,x_2]$.
Par suite $f''(x)\geq 0$ sur $]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty[$ et donc f est convexe sur chacun des intervalles $]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}]$ et $[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty[$.
Et $f''(x)\leq 0$ sur $[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$, donc f est concave sur $[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$.
Les points d'inflexion de f sont $A(x_1,f(x_1))$ et $B(x_2,f(x_2))$.

2- La dérivée seconde de $g(x) = xe^{-x^2}$ est donnée par
$g''(x) = ((-2x^2+1)e^{-x^2})' = (4x^3-6x)e^{-x^2} = 2x(2x^2-3)e^{-x^2}$.
Elle s'annule aux points $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = 0$ et $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.
$g''(x)$ est donc positive sur $[-\sqrt{\frac{3}{2}},0]\cup[\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty[$ ce qui implique que g convexe sur

chacun des intervalles $[-\sqrt{\frac{3}{2}},0]$ et $[\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty[$.
Et $g''(x)$ est négative sur $]-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}]\cup[0,\sqrt{\frac{3}{2}}]$ ce qui implique que g concave sur chacun des intervalles $]-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}]$ et $[0,\sqrt{\frac{3}{2}}]$.
Les points d'inflexion sont :
$A(-\sqrt{\frac{3}{2}},g(-\sqrt{\frac{3}{2}}))$, $B(0,g(0))$ et $C(\sqrt{\frac{3}{2}},g(\sqrt{\frac{3}{2}}))$.

Solution 5.3. :
La dérivée seconde de $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ est $f''(x) = 6x+2a$.
Pour que f soit convexe sur $[0,+\infty[$ il nous faut $f''(x) = 6x+2a \geq 0$ $\forall x\geq 0$. Ce qui donne $a\geq 0$ (en prenant $x=0$).
Pour que f soit concave sur $]-\infty,0[$ il nous faut $f''(x) = 6x+2a\leq 0$ $\forall x<0$. Ce qui donne $a\leq 0$ (en tendant x vers 0).
Par suite $a=0$. Et avec $a=0$ on a bien ce qu'il faut.

Solution 5.4. :
La dérivée seconde de $f(x) = ax^3+bx$ est $f''(x) = 6ax$.
Par suite on a les cas :
1- Si $a\geq 0$ f'' est positive sur $[0,+\infty[$ et donc f est convexe sur $[0,+\infty[$.
f'' est négative sur $]-\infty,0]$ et donc f est concave sur $]-\infty,0]$.
2- Si $a<0$ f'' est négative sur $[0,+\infty[$ et donc f est concave sur $[0,+\infty[$.
f'' est positive sur $]-\infty,0]$ et donc f est convexe sur $]-\infty,0]$.

Solution 5.5. :
1) La fonction $f(x) = e^x$ a sur $\mathbb{R}$ comme dérivée seconde $f''(x) = e^x$ qui est positive sur $\mathbb{R}$.
Par suite f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) En utilisant la définition de la convexité, on a pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:
a- En prenant $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ et $\alpha_3 = \frac{1}{6}$.
On a bien $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1$ et $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in[0,1]$
d'où $f(\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z)\leq\alpha_1f(x)+\alpha_2f(y)+\alpha_3f(z)$
Ce qui donne

$$e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}} \leq \frac{e^x}{2}+\frac{e^y}{3}+\frac{e^z}{6}$$

b- En prenant ensuite $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ et $\alpha_3 = \frac{1}{3}$.
On a bien $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1$ et $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in[0,1]$
d'où $f(\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z)\leq\alpha_1f(x)+\alpha_2f(y)+\alpha_3f(z)$
Ce qui donne

$$e^{\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}} \leq \frac{1}{3}(e^x+e^y+e^z)$$

Solution 5.6. :
a) La fonction $f(x) = e^{2x+\sin x}$ a une dérivée seconde donnée par
$f''(x) = (f'(x))' = ((2+\cos x)e^{2x+\sin x})' = ((2+\cos x)^2-\sin x)\,e^{2x+\sin x}$.
On a $-1\leq\cos x$, qui donne $1\leq(2+\cos x)$ et donc $1\leq(2+\cos x)^2$. Comme $-1\leq-\sin x$ et en rajoutant les membres de ces dernières inégalités on obtient

$0 \leq (2+\cos x)^2 - \sin x$.
Par suite $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et f est bien convexe sur $\mathbb{R}$.
b) On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) > 0$, la fonction $h(x) = \ln(g)$ est bien définie.
Si la fonction $h(x) = \ln(g)$ est convexe alors
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\forall (a,b) \in [0,1]^2$ *tels que* $a+b=1$: $h(ax+by) \leq ah(x) + bh(y)$,
ce qui donne $\ln(g(ax+by)) \leq a\ln(g(x)) + b\ln(g(y))$ *(1)*
Sachant que $\ln$ *est concave on a déjà*
$a\ln(g(x)) + b\ln(g(y)) \leq \ln(ag(x) + bg(y))$ *(2)*
En combinant (1) et (2) on obtient
$\ln(g(ax+by)) \leq \ln(ag(x) + bg(y))$.
En composant avec la fonction exponentielle, qui est croissante, on obtient
$g(ax+by) \leq ag(x) + bg(y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\forall (a,b) \in [0,1]^2$ *tels que* $a+b=1$.
La fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

La réciproque est fausse :
D'après la première question la fonction f est convexe. Et $h(x) = \ln f(x) = 2x + \sin x$ dont la dérivée seconde $h''(x) = -\sin x$ change de signe sur $\mathbb{R}$. La fonction $\ln(f(x))$ n'est donc pas convexe.

Solution 5.7. :
Soient $n \geq 2$ un entier naturel, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des réels positifs tels que
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$.
Pour tous $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des réels donnés on a :
1) On considère la fonction $f(x) = x^2$ dont la dérivée seconde est $f''(x) = 2$ qui est positive sur $\mathbb{R}$. Par suite f est convexe sur $\mathbb{R}$ et l'on a :
$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \leq a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \cdots + a_nf(x_n)$
D'où le résultat

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 \leq a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$$

2) Et si en plus $a_i > 0$ et $x_i > 0$ pour $i = 1, 2 \cdots, n$, on considère la fonction $g(x) = \ln x$ définie sur $]0, +\infty[$, dont la dérivée seconde $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$ qui est négative sur $]0, +\infty[$. Par suite g est concave sur $]0, +\infty[$ et l'on a :
$g(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \geq a_1g(x_1) + a_2g(x_2) + \cdots + a_ng(x_n)$
D'où le résultat

$$\ln(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \geq a_1\ln x_1 + a_2\ln x_2 + \cdots + a_n\ln x_n$$

3) Et si en plus $a_i > 0$ et $x_i > 0$ pour $i = 1, 2 \cdots, n$ on considère la fonction $h(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$, dont la dérivée seconde $h''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ qui est positive sur $]0, +\infty[$.
Par suite h est convexe sur $]0, +\infty[$ et l'on a :
$h(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \leq a_1h(x_1) + a_2h(x_2) + \cdots + a_nh(x_n)$
D'où le résultat

$$\frac{1}{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n} \leq \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n}{x_n}$$

Solution 5.8. :
1) La dérivée seconde de la fonction $f(x) = -\ln x$ définie sur $I =]0, +\infty[$ est

$f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$. *Comme $f''(x) > 0$ $\forall x \in I$, f est strictement convexe sur I.*

2) Prenons $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ et $(x,y) \in I^2$. On a $\alpha + \beta = 1$. La convexité de f donne
$f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$
Et donc $-\ln(\frac{x+y}{2}) \leq -\frac{1}{2}(\ln x + \ln y) = -\frac{1}{2}\ln xy = -\ln\sqrt{xy}$
Ce qui donne $\ln\sqrt{xy} \leq \ln(\frac{x+y}{2})$.
En passant par la croissance de l'application exponentielle on trouve
$\sqrt{xy} = \exp(\ln\sqrt{xy}) \leq \exp(\ln(\frac{x+y}{2})) = \frac{x+y}{2}$
D'où le résultat

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad \forall (x,y) \in I^2$$

3) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, choisissons $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$.
On a bien $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = n \times \dfrac{1}{n} = 1$ et les $(\alpha_i)_i$ sont positifs.
Si $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont des réels strictement positifs, on a d'après la convexité de $f(x) = -\ln x$:
$f(\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \cdots + \alpha_na_n) \leq \alpha_1f(a_1) + \alpha_2f(a_2) + \cdots + \alpha_nf(a_n)$.
Ce qui donne

$$\begin{aligned} -\ln\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) &\leq \frac{1}{n}(-\ln(a_1) - \ln(a_2) + \cdots - \ln(a_n)) \\ &\leq -\frac{1}{n}(\ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)) \\ &\leq -\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n) \end{aligned}$$

Ce qui implique que
$\ln(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}) = \dfrac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n) \leq \ln\left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)$.
En composant avec la fonction exponentielle on obtient le résultat

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

4) La fonction étant strictement convexe l'égalité dans cette inégalité s'obtient si et seulement les $(a_i)_i$ sont égaux.

Solution 5.9. :
Soient $n \geq 2$ un entier naturel, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des réels strictement positifs tels que
$\sum_{p=1}^{n} a_p = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$.
1) Pour k un entier naturel on considère la fonction $f_k(x) = x^{-k}$ définie sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée seconde $f''(x) = -k(-k-1)x^{-k-2} = k(k+1)x^{-k-2}$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Par suit f est strictement convexe.
On a donc l'inégalité
$f(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}) \leq \dfrac{1}{n}f(a_1) + \dfrac{1}{n}f(a_2) + \cdots + \dfrac{1}{n}f(a_n)$
Sachant que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, on obtient
$n^k = (\dfrac{1}{n})^{-k} \leq \dfrac{a_1^{-k} + a_2^{-k} + \cdots + a_n^{-k}}{n}$
D'où le résultat

$$n^{k+1} \leq a_1^{-k} + a_2^{-k} + \cdots + a_n^{-k}$$

2) Puisque f_k est strictement convexe on a égalité dans cette inégalité si et seulement $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Solution 5.10. :

1) La fonction $f_p(x) = x^p$ étant dérivable deux fois sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée seconde est donnée par $f_p''(x) = p(p-1)x^{p-2}$.
Puisque $x \in]0, +\infty[$, le signe de $p(p-1)$ est positif si et seulement si $p \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ et l'on aura dans ce cas $f_p''(x) \geq 0$ et donc f_p est convexe.
2) Comme $p > 1$, d'après ce qui précède f_p est bien convexe sur $]0, +\infty[$ et donc f est convexe sur $[1, 2] \subset]0, +\infty[$.
Soit $x_o \in [1, 2]$:
L'équation de la tangente au point $(x_o, f_p(x_o))$ à la courbe de f_p est donnée par $y = f_p'(x_o)(x - x_o) + f_p(x_o)$.
L'équation de la corde reliant $(1, f_p(1)) = (1, 1)$ et $(2, f_p(2)) = (2, 2^p)$ est donnée par $\dfrac{y - f(1)}{x - 1} = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 2^p - 1$.
Ce qui donne $y = (2^p - 1)(x - 1) + 1$.
D'après la convexité, on a la tangente est au dessous de la courbe et la courbe est au dessous de la corde.
Ainsi pour chaque $x_o \in [1, 2]$ et $\forall x \in [1, 2]$, on a :
$px_o^{p-1}(x - x_o) + x_o^p = f_p'(x_o)(x - x_o) + f_p(x_o) \leq f_p(x) \leq (2^p - 1)(x - 1) + 1$
En particulier avec $x_o = 1$, on obtient :

$$\forall x \in [1, 2] \qquad p(x-1) + 1 \leq x^p \leq (2^p - 1)(x - 1) + 1$$

Remarque :
On peut utiliser d'autre valeur de $x_o \in [1, 2]$ pour avoir d'autre inégalité. Par exemple avec $x_o = \frac{3}{2}$ on aura
$\forall x \in [1, 2] \qquad p(\frac{3}{2})^{p-1}(x - \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2})^p \leq x^p \leq (2^p - 1)(x - 1) + 1.$

Solution 5.11. :

a- La fonction $f(x) = \sin x$ a une dérivée seconde égale à $f''(x) = -\sin x \leq 0$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On en déduit que f est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
b- L'équation de la corde reliant le point $(0, f(0)) = (0, 0)$ et le point $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})) = (\frac{\pi}{2}, 1)$ est donnée par $y = \dfrac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0}(x - 0) + f(0) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}x = \dfrac{2}{\pi}x$.
L'équation de la tangente en $x_o \in [0, \frac{\pi}{2}]$ est donnée par $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o) = \cos x_o(x - x_o) + \sin x_o$.
D'après la concavité on sait que la corde est au dessous de la courbe de f qui est elle même au dessous de la tangente. D'où les inégalités
Pour chaque $x_o \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a :
$\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq \cos x_o(x - x_o) + \sin x_o$.
En particulier pour $x_o = 0$, on a

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \qquad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

Remarque :
Pour $x_o = \frac{\pi}{4}$ on aura $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\qquad \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - \dfrac{\pi}{4}) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour $x_o = \frac{\pi}{3}$ on aura $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\qquad \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq \dfrac{1}{2}(x - \dfrac{\pi}{3}) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Solution 5.12. :

La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ étant dérivable et concave, sa dérivée est alors décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Pour $x \geq 0$ fixé on considère la fonction $g_x(y) = f(x + y) - f(x) - f(y)$ qui est dérivable et $g_x'(y) = (x + y)'f'(x + y) - f'(y) = f'(x + y) - f'(y) \leq 0$ (car f' est décroissante et $y \leq x + y$ donne $f'(x + y) \leq f'(y)$).
Ainsi $g_x(y)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc $g_x(y) \leq g_x(0)$ $\forall y \in \mathbb{R}_+$.
Ce qui donne $f(x + y) - f(x) - f(y) \leq f(x) - f(x) - f(0) = -f(0)$.
Sachant que $f(0) \geq 0$ et donc $-f(0) \leq 0$ et que x est quelconque dans $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \qquad f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

5.4 Exercices supplémentaires

Exercice 5.13. :

On définit la fonction f par
$$f\ :\ \begin{array}{ccl} I=[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \to & \begin{cases} x^2 & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{pour } x=0 \end{cases} \end{array}$$

1) Étudier la continuité, la dérivabilité et la dérivabilité seconde de f sur I.
2) Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose $x_1=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{1}{2}$.
Calculer $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$ et $\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$.
3) f est-elle convexe (resp. concave) sur I ?

Exercice 5.14. :
On pose $I=[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ et $f(x)=2\cos x-3x$.
1) Peut-on trouver $\alpha\in[0,1]$ tel que
$\forall (x,y,z)\in I^3\ f(\alpha x+\frac{1}{2}y+\frac{2}{5}z)\leq \alpha f(x)+\frac{1}{2}f(y)+\frac{2}{5}f(z)$?
2) Donner l'exemple d'un intervalle $J\subset[\pi,3\pi]$ tel que
$\forall (a,b,c,d)\in J^4\ f(0,3a+0,12b+\frac{1}{2}c+0,08d)\geq 0,3f(a)+0,12f(b)+\frac{1}{2}f(c)+0,08f(d)$.

Exercice 5.15. :

1) Montrer que la fonction $f(x)=e^{x^2}$ est convexe sur $I=[1,+\infty[$.
2) En déduire que pour tout $(x,y,z,t)\in I^4$:
a- $e^{\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{5}z+\frac{13}{60}t\right)^2}\leq \frac{1}{3}e^{x^2}+\frac{1}{4}e^{y^2}+\frac{1}{5}e^{z^2}+\frac{13}{60}e^{t^2}$.
b- $e^{\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}+\frac{t}{4}\right)^2}\leq \frac{1}{4}\left(e^{x^2}+e^{y^2}+e^{z^2}+e^{t^2}\right)$.

Exercice 5.16. :
Déterminer suivant la valeur de $a\in\mathbb{R}$, les intervalles de convexité et de concavité, les points d'inflexion de la courbe de la fonction $f(x)=x^a e^{-x^2}$ sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$.

Exercice 5.17. :
Soient $n\geq 2$ un entier naturel, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ des réels strictement positifs et $\alpha>1$.
Montrer que
$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^\alpha\leq n^{\alpha-1}\left(x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha\right).$$

Exercice 5.18. :
On pose $f(x)=-\ln(\ln x)$.
1) Montrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $I=]1,+\infty[$.
2) Vérifier que $\sqrt{\ln x\ln y}\leq \ln\frac{x+y}{2}\ \forall (x,y)\in I^2$.
3) Montrer que pour $n\geq 2$ un entier naturel, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ des réels appartenant à I, on a :
$\sqrt[n]{\ln a_1\ln a_2\cdots\ln a_n}\leq \ln\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.
4) Étudier le problème d'égalité dans cette inégalité.

Exercice 5.19. :
Soient $n\geq 2$ un entier naturel, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ des réels strictement positifs.

On pose $S=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{p=1}^{n}a_p$.
1) Montrer que
$$\frac{n}{S}\leq\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$
2) Étudier le problème d'égalité dans cette inégalité.
3) On pose $b_p=(1-a_p)S$ (donc $a_p=1-\frac{b_p}{S}$).
Montrer que
$$\frac{n}{S}-1\leq\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{b_p}{S-b_p}.$$
puis étudier le problème d'égalité dans cette inégalité.

Exercice 5.20. :
Soient $n\geq 2$ un entier naturel, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ des réels positifs tels que $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$.
Montrer que pour tous $x_1,x_2,\cdots,x_n$ des réels donnés on a :
1) $(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^4\leq a_1x_1^4+a_2x_2^4+\cdots+a_nx_n^4$.
2) Et si en plus $a_i>0$ et $x_i>0$ pour $i=1,2\cdots,n$ alors
$$\frac{1}{(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2}\leq\frac{a_1}{x_1^2}+\frac{a_2}{x_2^2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n^2}.$$

Exercice 5.21. :
Soient p et q deux réels tels que $p>1$ et $q>1$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
1) Exprimer p en fonction de q.
2) On se donne a et b deux réels strictement positifs et on pose $\alpha=\frac{1}{p}\ln a$ et $\beta=\frac{1}{q}\ln b$.
Exprimer a (resp.b) en fonction de α (resp.β).
3) En utilisant la convexité de la fonction $x\mapsto e^x$, montrer que $ab\leq\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$.
4) Soient $x_1,x_2,\cdots,x_n$ et $y_1,y_2,\cdots,y_n$ $2n$ réels positifs.
On pose $u=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $v=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.
Montrer que pour chaque i :
$$\frac{x_iy_i}{uv}\leq\frac{1}{p}\frac{(x_i)^p}{u^p}+\frac{1}{q}\frac{(y_i)^q}{v^q}.$$
5) Montrer l'inégalité de Holder :
$$x_1y_1+\cdots+x_ny_n\leq\left(x_1^p+\cdots+x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(y_1^q+\cdots+y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
6) Écrire cette formule dans le cas $p=q=2$ et $n=3$ et l'interpréter.

5.5 Indications sur les exercices supplémentaires

Solution 5.13. :
1) Vérifier qu'en dehors de 0 f est deux fois dérivable et que f'' est positive et qu'en $x=0$ elle n'est même pas continue.

2) $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=f(\frac{1-2\alpha}{2})=\begin{cases} f(0)=1 & si\ \alpha=\frac{1}{2} \\ (\frac{1-2\alpha}{2})^2 & si\ \alpha\in]0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1[\end{cases}$

3) f n'est ni convexe, ni concave sur I.

Solution 5.14. :
1) Vérifier que f est convexe sur I en déterminant le signe de $f''(x)$ sur I. Trouver ensuite $\alpha\in[0,1]$ tel que
$\alpha+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=1$.
2) Déterminer le signe de $f''(x)$ dans $[\pi,3\pi]$. Choisir ensuite $J\subset[\pi,3\pi]$ sur lequel f est concave pour avoir l'inégalité désirée.

Solution 5.15. :
1) Vérifier que la dérivée seconde de $f(x)=e^{x^2}$ est positive sur $[1,+\infty[$.
2) a- Vérifier que $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1$ pour $\alpha_1=\frac{1}{5}$, $\alpha_2=\frac{1}{4}$, $\alpha_3=\frac{1}{3}$ et $\alpha_4=\frac{13}{60}$, puis utiliser l'inégalité de la convexité.
b- Prendre $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\dfrac{1}{4}$.

Solution 5.16. :
Vérifier que $f''(x)=x^{a-2}(4x^4-2(2a+1)x^2+a(a-1))e^{-x^2}$.
Étudier le signe et les racines positives du polynôme $P(y)=4y^2-2(2a+1)y+a(a-1)$ $(y=x^2)$.
Discuter ensuite suivant que $a<-\frac{1}{8}$, $a=-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{8}<a<0$, $a=0$, $0<a<1$, $a=1$ ou $a>1$.

Solution 5.17. :
Vérifier que $f(x)=x^\alpha$ est convexe pour $\alpha>1$.
Utiliser l'inégalité de la convexité avec $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\frac{1}{n}$ et $x_1,x_2,\cdots,x_n$ des réels strictement positifs.

Solution 5.18. :
1) Calculer la dérivée seconde et vérifier qu'elle est positive sur $I=]1,+\infty[$.
2) Utiliser l'inégalité de la convexité pour $a_1=x$ et $a_2=y$ avec $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$ et passer par les propriétés de la fonction ln.
3) Même indication que pour (2), avec $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\frac{1}{n}$.
4) Remarquer que f'' est strictement positive sur I. L'égalité se produit si et seulement si les $(a_i)_i$ sont égaux.

Solution 5.19. :
1) S'assurer que la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ est convexe sur $I=]0,+\infty[$, puis utiliser cette propriété pour $n\geq 2$ un entier naturel, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ des réels strictement positifs et

$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\frac{1}{n}$.
Remplacer la somme $a_1+a_2+\cdots+a_n$ par S.
2) Remarquer que f est strictement convexe et conclure.
3) Dans l'inégalité obtenue en (1) remplacer $\frac{1}{a_p}$ par $\frac{1}{a_p}=\frac{S}{S-b_p}=1+\frac{b_p}{S-b_p}$.
Passer ensuite par la question (2) pour l'égalité.

Solution 5.20. :
1) Utiliser la fonction $f(x)=x^4$.
2) Utiliser la fonction $g(x)=\frac{1}{x^2}$.

Solution 5.21. :
1) Vérifier que $p=\frac{q}{q-1}$.
2) Vérifier que $a=e^{\alpha p}$ et $b=e^{\beta q}$.
3) Utiliser l'inégalité de la convexité $e^{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2}\leq\alpha_1e^{x_1}+\alpha_2e^{x_2}$ avec $\alpha_1=\frac{1}{p}$ et $\alpha_2=\frac{1}{q}$ et $x_1=p\ln a=\ln a^p$ et $x_2=q\ln b=\ln b^q$.
4) Utiliser la question (3) avec $a=\frac{x_i}{u}$ et $b=\frac{y_i}{v}$ pour chaque i de 1 à n.
5) Faire la somme ensuite de 1 à n des inégalités obtenues en faisant sortir les constantes ne dépendant pas de i et sachant que $u^p=\sum\limits_{i=1}^n x_i^p$ et $v^q=\sum\limits_{i=1}^n y_i^q$.
6) Pour le cas $p=q=2$ et $n=3$ revoir l'inégalité de Schwartz (produit scalaire et norme).

Chapitre 6

Fonctions hyperboliques, fonctions circulaires

6.1 Rappels de cours

Définitions

Définition 6.1. *La fonction cosinus hyperbolique, notée* cosh *(ou* ch *) et la fonction sinus hyperbolique, notée* sinh *(ou* sh *) sont définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\cosh x = \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) \qquad et \qquad \sinh x = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$$

Et la fonction tangente hyperbolique, notée tanh *(ou), est définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\tanh x = x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Formulaires

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} (1) & \cosh x + \sinh x = e^{x} \\ (2) & \cosh x - \sinh x = e^{-x} \\ (3) & \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \end{cases}$
2. Pour tous x et y réels,

$$\begin{array}{ll} (4) & \cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ (5) & \sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\ (6) & \cosh(x-y) = \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y) \\ (7) & \sinh(x-y) = \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y) \end{array}$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(8) \quad \cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x \qquad (9) \quad \sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$

4. Pour tous x et y réels,

$$\begin{array}{ll} (10) & \cosh x \cosh y = \frac{1}{2}\left[\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\right] \\ (11) & \sinh x \sinh y = \frac{1}{2}\left[\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\right] \\ (12) & \sinh x \cosh y = \frac{1}{2}\left[\sinh(x+y) + \sinh(x-y)\right] \\ (13) & \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \\ (14) & \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1) \end{array}$$

5. Pour tous x et y réels,

$$\begin{array}{ll}
(15) & \cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2} \\
(16) & \cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2} \\
(17) & \sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2} \\
(18) & \sinh x - \sinh y = 2\sinh\frac{x-y}{2}\cosh\frac{x+y}{2}
\end{array}$$

6. Pour tous x et y réels,

$$(19)\ \tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1+\tanh x \tanh y} \quad (20)\ \tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1-\tanh x \tanh y}$$

7. Pour tout x réel, en posant $t = \tanh\frac{x}{2}$,

$$(21)\ \tanh x = \frac{2t}{1+t^2} \quad (22)\ \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \quad (23)\ \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(24)\ 1-\tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Propriétés 9. *a) Les fonctions* $\cosh x$ *et* $\sinh x$ *sont définies sur* $\mathbb{R}$ *et sont respectivement paire et impaire.*
b) $\cosh x$ *et* $\sinh x$ *sont de classe* C^∞ : $\cosh' x = \sinh x$ *et* $\sinh' x = \cosh x$.
c) $\cosh x$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$, $\sinh$ *est convexe sur* $[0,+\infty[$ *et concave sur* $]-\infty,0]$.
d) $\tanh x$ *est impaire, de classe* C^∞ *et* $\tanh' x = 1-\tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

Fonctions hyperboliques réciproques Les applications $\cosh x$, $\sinh x$ et $\tanh x$ définissent des bijections continues et strictement croissantes de $\mathbb{R}_+$ dans $[1,+\infty[$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ respectivement.
Leurs réciproques sont les fonctions hyperboliques réciproques.

Définition 6.2.

1) La fonction argument cosinus hyperbolique, notée argch, $\begin{cases} [1,+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \operatorname{argch} x \end{cases}$ *est définie par*

$$\begin{cases} y = \operatorname{argch} x \\ x \geq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cosh y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

2) La fonction argument sinus hyperbolique, notée argsh, $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \operatorname{argsh} x \end{cases}$ *est définie par*

$$\begin{cases} y = \operatorname{argsh} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sinh y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3) La fonction argument tangente hyperbolique, notée argth , $\begin{cases}]-1,1[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \operatorname{argth} x \end{cases}$ *est définie par*

$$\begin{cases} y = \operatorname{argth} x \\ x \in]-1,1[\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tanh y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Propriétés 10. *1. Pour tout* $x \in [1,+\infty[$, $\operatorname{argch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$
et pour $x > 1$ $\operatorname{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ *et* $\operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

3. Pour tout $x \in]-1,1[$, $\operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$
et $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Fonctions circulaires réciproques

Définition 6.3. *La fonction* $\sin x$ *est continue, strictement croissante sur* $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *et* $\sin([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]) = [-1,1]$.
Elle définit une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *dans* $[-1,1]$. *Sa réciproque est appelée la fonction arc-sinus et notée* arcsin. *Et l'on a l'équivalence*

$$u = \arcsin x \text{ et } x \in [-1,1] \Longleftrightarrow x = \sin u \text{ et } u \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

Définition 6.4. *La fonction* cos *est continue, strictement décroissante sur* $[0,\pi]$ *et* $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$.
Elle définit une bijection de $[0,\pi]$ *dans* $[-1,1]$. *Sa réciproque est appelée la fonction arc-cosinus et notée* arccos. *Et l'on a l'équivalence*

$$u = \arccos x \text{ et } x \in [-1,1] \Longleftrightarrow x = \cos u \text{ et } u \in [0,\pi]$$

Définition 6.5. *La fonction* tan *est continue, strictement croissante sur* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *et* $\tan(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$.
Elle définit une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *dans* $\mathbb{R}$. *Sa réciproque est appelée la fonction arc-tangente et notée* arctan. *Et l'on a l'équivalence*

$$u = \arctan x \text{ et } x \in]-\infty,+\infty[\Longleftrightarrow x = \tan u \text{ et } u \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

Propriétés 11. *1. La fonction arc-cosinus est dérivable sur* $]-1,1[$
et $\arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. La fonction arc-sinus est dérivable sur $]-1,1[$ *et* $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. La fonction arc-tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et* $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

6.2 Énoncés des exercices

Exercice 6.1. :
Simplifier les expressions suivantes :
1) $A = \arcsin(\sin(\frac{19\pi}{4}))$ 2) $B = \arctan(\tan(-\frac{11\pi}{3}))$

3) $C = \arccos(\cos(\frac{21\pi}{5}))$ 4) $D = \arcsin(\cos(-\frac{107\pi}{4}))$

Exercice 6.2. :
Simplifier les expressions suivantes

1. $\cos(2\arccos x)$, *où* $x \in [-1,1]$, 2. $\arccos(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}})$, *où* $x \in [-\pi,\pi]$,

3. $\arccos(\sqrt{\frac{1+x}{2}})$, *où* $x \in [-1,1]$, 4. $\arcsin(2\sin x\cos x)$, *où* $x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Exercice 6.3. :
On considère la fonction $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x$ *définie sur* $I = [0,\frac{\pi}{2}]$.
1) Vérifier que f *est une bijection de* I *dans l'intervalle* J *(à déterminer).*
2) Donner en fonction de $x \in J$ *la fonction réciproque* $f^{-1}(x)$.

Exercice 6.4. :
On considère la fonction $f(x) = \sin x - 2\cos x$ *définie sur* $I = [0,\frac{\pi}{2}]$.
1) a- Vérifier que f *est strictement monotone sur* I.
b- Préciser $f(I)$.
2) a- Démontrer que f *est une bijection de* I *dans un intervalle* J *à préciser.*
b- Exprimer $f^{-1}(x)$ *en fonction de* $x \in J$.

Exercice 6.5. :
On considère la fonction numérique à variable réelle définie par :

$$f(x) = \arccos(\frac{2x}{1+x^2})$$

1) Déterminer D_f *le domaine de définition de la fonction* f.
2) a- Calculer $f'(x)$ *dans chacun des intervalles suivants :*
$I_1 =]-\infty,-1[$, $I_2 =]-1,1[$ *et* $I_3 =]1,+\infty[$.
b- En déduire une autre expression de $f(x)$ *pour tout* $x \in D_f$.
3) Étudier la dérivabilité de f *aux points* $x_1 = -1$ *et* $x_2 = 1$.

Exercice 6.6. :
On considère la fonction numérique à variable réelle définie par :

$$f(x) = \arcsin(\frac{1-x^2}{1+x^2})$$

1) Déterminer D_f *le domaine de définition de la fonction* f.
2) Étudier la dérivabilité de f *aux points* $x_1 = 0$ *et* $x_2 = 1$ *et en déduire la dérivabilité de* f *en* $x_3 = -1$.

3) Calculer $f'(x)$ *pour* $x \in]-\infty,0[$ *et pour* $x \in]0,+\infty[$.
4) On pose $x = \tan\frac{t}{2}$ *avec* $-\pi < t < \pi$,
donner une expression simple de $f(x)$.

Exercice 6.7. :
On pose $f(x) = \arctan(\text{sh}\,(x))$.
1) Montrer que l'application $f(x)$ *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
2) Vérifier que la réciproque de f *est l'application* $g(y) = \text{argsh}(\tan y)$.
3) En posant $y = f(x)$, *vérifier les égalités suivantes :*
$\sin y = \tanh x$ $\cos y = \frac{1}{\text{ch}\, x}$
$\tan\frac{y}{2} = \tanh\frac{x}{2}$ $\tan(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}) = e^x$

Exercice 6.8. *Montrer que :*
1. $\forall x \in [-1,1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,

2. $\forall x > 0$, $\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$,

3. $\forall x < 0$, $\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6.9. :
Montrer que :
1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{argsh}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$,
2. $\forall x \in [1,+\infty[$, $\text{argch}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$,
3. $\forall x \in]-1,1[$, $\text{argth}\, x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

Exercice 6.10. :
Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivation et calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes

1. $f(x) = \arcsin(x^2-1)$ 2. $f(x) = \arccos(\frac{1-x}{1+x})$ 3. $f(x) = \arctan(\frac{1}{1+x})$

4. $f(x) = \text{argch}(x^2+1)$ 5. $f(x) = \text{argsh}(\frac{x}{x^2+1})$ 6. $f(x) = \text{argth}\,(2x-1)$

Exercice 6.11. :
Soit f *la fonction définie par* $f(x) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
1. *Déterminer le domaine de définition de* f *et étudier sa parité.*
2. *Montrer que* f *est continue et dérivable sur* D_f *et calculer sa dérivée.*
3. *En déduire une expression simplifiée de* f.

Exercice 6.12. *Soit* f *la fonction définie par* $f(x) = \arctan\frac{1-x}{1+x}$.
1. *Déterminer le domaine de définition de* f.
2. *Étudier la continuité et la dérivabilité de* f.
3. *Calculer la dérivée de* f *et en déduire une expression simplifiée de* $f(x)$.

Exercice 6.13. *Calculer la dérivée puis donner une expression simplifiée de chacune des fonctions suivantes*

1. $f_1(x) = \text{argch}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$, 2. $f_2(x) = \text{argsh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

3. $f_3(x) = \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, *où* $x \in]0,1]$.

6.3 Solutions détaillées des exercices

Solution 6.1. :

1) On a $\sin(\frac{19\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{4}+5\pi) = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$.
Et donc $A = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}$.
Ceci car $\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *et la fonction* arcsin *est la réciproque de* sin *sur cet intervalle.*

2) On a $\tan(-\frac{11\pi}{3}) = \tan(-\frac{11\pi}{3} + 4\pi) = \tan(\frac{\pi}{3})$
D'où $B = \arctan(\tan(-\frac{11\pi}{3})) = \arctan(\tan(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$
Ceci car $\frac{\pi}{3} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *et* arctan *est la réciproque de* tan *sur cet intervalle.*

3) On a $\cos(\frac{21\pi}{5}) = \cos(\frac{\pi}{5} + 4\pi) = \cos(\frac{\pi}{5})$
Et donc $C = \arccos(\cos(\frac{21\pi}{5})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{5})) = \frac{\pi}{5}$.
Ceci car $\frac{\pi}{5} \in [0, \pi]$ *et* arccos *est la réciproque de* cos *sur cet intervalle.*

4) On a :
$\cos(-\frac{107\pi}{4}) = \cos(-\frac{3\pi}{4} - 26\pi) = \cos(-\frac{3\pi}{4}) = \sin(-\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{4})$.
D'où
$D = \arcsin(\cos(-\frac{107\pi}{4})) = \arcsin(\sin(-\frac{\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4}$
Ceci car $\frac{-\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *et la fonction* arcsin *est la réciproque de* sin *sur cet intervalle.*

Solution 6.2. :

1) Soit $x \in [-1, 1]$. *On a*
$\cos(2\arccos x) = 2(\cos(\arccos x))^2 - 1 = 2x^2 - 1$.
Ceci en utilisant la formule trigonométrique $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ *et la réciprocité de* $f = \arccos$ *et* $g = \cos$ *sachant que* $x \in [-1, 1] = D_f$.

2) Soit $x \in [-\pi, \pi]$. *On a*
$\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+(2\cos^2\frac{x}{2}-1)}{2}} = \sqrt{\cos^2\frac{x}{2}} = |\cos\frac{x}{2}| = \cos\frac{x}{2}$
Ceci en passant par la formule précédente et sachant que $\frac{x}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $(\cos\frac{x}{2} \geq 0)$.
D'où
$\arccos(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}) = \arccos(\cos(\frac{x}{2})) = \frac{x}{2}$ *si* $x \in [0, \pi]$.
Et si $-\pi \leq x < 0$ *alors* $0 < -x \leq \pi$ *et donc* $0 < -\frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$
Ce qui donne
$\arccos\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right) = \arccos\left(\cos(\frac{x}{2})\right) = \arccos\left(\cos(-\frac{x}{2})\right) = -\frac{x}{2}$ *si* $x \in [-\pi, 0[$.
Finalement

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si\ x \in [0, \pi] \\ -\frac{x}{2} & si\ x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

Ou plus simplement

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right) = \frac{|x|}{2} \qquad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

3) Pour $x \in [-1, 1]$, *posons* $z = \arccos x$, $z \in [0, \pi]$ *et* $x = \cos z$. *Alors*
$\arccos(\sqrt{\frac{1+x}{2}}) = \arccos(\sqrt{\frac{1+\cos z}{2}}) = \frac{z}{2}$ *d'après la question précédente.*

D'où

$$\arccos(\sqrt{\frac{1+x}{2}}) = \frac{1}{2}\arccos x$$

4) En utilisant la formule $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$, *on a :*
$\arcsin(2\sin x\cos x) = \arcsin(\sin(2x))$.
Par suite on a les cas :
si $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ *alors* $2x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
et $\arcsin(2\sin x\cos x) = 2x$;
si $x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ *alors* $2x \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$ *et* $\pi - 2x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
Et donc $\arcsin(2\sin x\cos x) = \arcsin(\sin(2x)) = \arcsin(\sin(\pi - 2x)) = \pi - 2x$.
Si $x \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}[$ *alors* $2x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[$ *et* $\pi + 2x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
Et donc $\arcsin(2\sin x\cos x) = \arcsin(\sin(2x)) = \arcsin(-\sin(\pi + 2x)) = -(\pi + 2x)$.
Finalement on résume

$$\arcsin(2\sin x\cos x) = \begin{cases} -\pi - 2x & si\ x \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}[\\ 2x & si\ x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \\ \pi - 2x & si\ x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Solution 6.3. :

1) La fonction $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x$ *est continue et dérivable sur* $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ *comme étant somme et produit de fonctions continues et dérivables sur* $\mathbb{R}$.
Sa dérivée $f'(x) = 2\cos x\sin x - 2\cos x = 2\cos x(\sin x - 1)$ *est strictement négative sur* $]0, \frac{\pi}{2}[$, *puisque* $\cos x > 0$ *et* $(\sin x - 1) < 0\ \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
f *est ainsi strictement décroissante sur* I *et par suite bijective de* I *dans* $f(I)$ *avec* $f(I) = [f(\frac{\pi}{2}), f(0)] = [-1, 0] = J$.

2) Par des équivalences on a :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in [-1, 0]\ et\ y \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ x \in [-1, 0]\ et\ y \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 y - 2\sin y = x \\ x \in [-1, 0]\ et\ y \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \sin y)^2 - 1 = x \\ x \in [-1, 0]\ et\ y \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \sin y)^2 = x + 1 \\ x \in [-1, 0]\ et\ y \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sin y = \sqrt{x+1} \\ x \in [-1, 0]\ et\ y \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = 1 - \sqrt{x+1} \\ x \in [-1, 0]\ et\ y \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \arcsin(1 - \sqrt{x+1}) \\ x \in [-1, 0]\ et\ y \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

D'où

$$\forall x \in [-1, 0] \qquad f^{-1}(x) = \arcsin(1 - \sqrt{x+1})$$

Solution 6.4. :

1) a- La fonction $f(x) = \sin x - 2\cos x$ *est continue et dérivable avec* $f'(x) = \cos x + 2\sin x > 0$ *pour tout* $x \in I = [0, \frac{\pi}{2}]$. *Par suite* f *est strictement croissante sur* I.
b- Puisque f *est continue et strictement croissante on en déduit que* $f(I) = f([0, \frac{\pi}{2}]) = [f(0), f(\frac{\pi}{2})] = [-2, 1]$.

2) a- Comme f *est strictement croissante, on a l'implication suivante :*

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad \left(x \neq y \Rightarrow \begin{cases} x < y \\ ou \\ y < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) < f(y) \\ ou \\ f(y) < f(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) \neq f(y) \right).$$

La fonction f est donc injective sur I.
Et par suite c'est une bijection de I dans $J = f(I) = [-2, 1]$.
b- Par des équivalences on a :

$$\left\{\begin{array}{l} y = f^{-1}(x) \\ x \in [-2,1] \text{ et } y \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(y) = x \\ x \in [-2,1] \text{ et } y \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin y - 2\cos y = x \\ x \in [-2,1] \text{ et } y \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{array}\right.$$

En remarquant que $x + 2\cos y = \sin y \geq 0$ et $\cos y \geq 0$ pour $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a

$$\begin{aligned} \sin y - 2\cos y = x &\Leftrightarrow (x + 2\cos y)^2 = \sin^2 y = 1 - \cos^2 y \\ &\Leftrightarrow 5\cos^2 y + 4x\cos y + (x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\cos y + \tfrac{2x}{5})^2 = \left(\frac{\cos y + 2(x + 2\cos y)}{5}\right)^2 = \frac{5 - x^2}{25} \\ &\Leftrightarrow \cos y + \tfrac{2x}{5} = \sqrt{\frac{5 - x^2}{25}} \\ &\Leftrightarrow y = \arccos\left(\frac{\sqrt{5 - x^2} - 2x}{5}\right) \end{aligned}$$

D'où le résultat

$$\forall x \in [-2, 1], \qquad f^{-1}(x) = \arccos\left(\frac{\sqrt{5 - x^2} - 2x}{5}\right).$$

Solution 6.5. *:*
1) Posons $u(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ et $v(t) = \arccos t$. Alors $f(x) = v(u(x))$. Et l'on a par équivalence :
$x \in D_f \Leftrightarrow u(x)$ est définie et $u(x) \in D_v \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) \in D_v$
Comme $D_u = \mathbb{R}$, $1 + x^2 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et
$u(x) \in D_v \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 - x^2 \leq 2x$ et $2x \leq 1 + x^2$
$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 + 2x + 1$ et $0 \leq x^2 - 2x + 1$
$\Leftrightarrow 0 \leq (1 + x)^2$ et $0 \leq (1 - x)^2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
On en déduit que : $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
et donc $D_f = \mathbb{R}$.

2) a- Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $u^2(x) \neq 1$, f est dérivable et l'on a

$$f'(x) = u'(x)\frac{-1}{\sqrt{1 - u^2(x)}} = \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)' \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} \times \frac{-(1 + x^2)}{\sqrt{(1 - x^2)^2}} = \frac{-2(1 - x^2)}{(1 + x^2)|1 - x^2|} = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)|x^2 - 1|}$$

Par suite on a :

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{2}{1 + x^2} & si\ x \in I_1 =]-\infty, -1[\\ \dfrac{-2}{1 + x^2} & si\ x \in I_2 =]-1, 1[\\ \dfrac{2}{1 + x^2} & si\ x \in I_3 =]1, +\infty[\end{array}\right.$$

b- Sachant que la dérivée $(2\arctan x)' = \dfrac{2}{1 + x^2}$, on en déduit qu'il existe trois constantes réelles c_1, c_2 et c_3

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 2\arctan x + c_1 & si\ x \in I_1 =]-\infty, -1[\\ -2\arctan x + c_2 & si\ x \in I_2 =]-1, 1[\\ 2\arctan x + c_3 & si\ x \in I_3 =]1, +\infty[\end{array}\right.$$

Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} = \lim_{x \to -\infty} 2\arctan x + c_1 = 2\frac{-\pi}{2} + c_1 = -\pi + c_1$
on obtient $c_1 = 3\frac{\pi}{2}$
El l'on a $f(0) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} = c_2$.
De même $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} = \lim_{x \to +\infty} 2\arctan x + c_3 = 2\frac{\pi}{2} + c_3 = \pi + c_3$
on obtient $c_3 = -\frac{\pi}{2}$
Finalement et puisque f est continue sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 2\arctan x + \frac{3\pi}{2} & si\ x \in I_1 =]-\infty, -1[\\ -2\arctan x + \frac{\pi}{2} & si\ x \in I_2 = [-1, 1] \\ 2\arctan x - \frac{\pi}{2} & si\ x \in I_3 =]1, +\infty[\end{array}\right.$$

3) On a $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{c \to 1^+} f'(c) = \lim_{c \to 1^+} \frac{2}{1 + c^2} = 1$ (en utilisant le théorème des accroissements finies).
D'autre part $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{c \to 1^-} f'(c) = \lim_{c \to 1^-} \frac{-2}{1 + c^2} = -1$.
Par suite f n'est pas dérivable en 1. Et de même elle n'est pas dérivable en -1.

Solution 6.6. *:*
1) La fonction $f(x) = \arcsin(\frac{1-x^2}{1+x^2})$ s'écrit $f(x) = v(u(x))$ avec $u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $v(t) = \arcsin t$.
On a $u(x)$ est une fraction rationnelle continue et définie sur $D_u = \mathbb{R}$ (puisque $1 + x^2 \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$)
Par équivalence on a
$x \in D_f \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) \in D_v \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$.
Traduisons les inégalités
$-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 - x^2 \leq 1 - x^2$
et $1 - x^2 \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow -1 \leq 1$ et $0 \leq 2x^2$
C'est toujours vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Par suite ($x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$) et donc $D_f = \mathbb{R}$.

2) Par la règle de l'Hôpital on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\arcsin(\frac{1-x^2}{1+x^2}) - \frac{\pi}{2}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-4x}{|2x|} \cdot \frac{1}{1 + x^2} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{-2}{1 + x^2} = -2 \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2.$

Et de même, $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2.$

Par suite, f n'est pas dérivable en 0*, donc non dérivable en* $x_1=0$.

Ensuite, en utilisant le calcul précédent, on a

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\arcsin(\frac{1-x^2}{1+x^2})-0}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-2}{1+x^2}=-1$$

D'où

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$$

f est donc dérivable en $x_2=1$.

Puisque la fonction f est paire, la dérivabilité en $x_2=1$ implique la dérivabilité en $x_3=-1$.

3) La fonction $v(t)=\arcsin t$ étant dérivable sur $D_v=[-1,1]$ sauf en -1 et 1. Donc $v(u(x))$ est dérivable en tout x tel que $u(x)\neq\pm1$.

Or $u(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}=1$ donne $1-x^2=1+x^2$ et donc $x=0$

et $u(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1$ donne $1-x^2=-1-x^2$ qui n'est jamais vraie.

Par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\}$ et pour tout $x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$$f'(x)=u'(x)v'(u(x))=\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}=\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$$

D'où

$$f'(x)=\frac{-2x}{|x|(1+x^2)}=\begin{cases}\frac{2}{1+x^2} & si\ x\in]-\infty,0[\\ \frac{-2}{1+x^2} & si\ x\in]0,+\infty[\end{cases}$$

4) En posant $x=\tan\frac{t}{2}$ avec $-\pi<t<\pi$ (et donc $t=2\arctan x$), on obtient

$f(x)=\arcsin(\frac{1-x^2}{1+x^2})=\arcsin(\frac{1-\tan^2\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}})=\arcsin(\cos t)$.

Pour $-\pi<t<0$ ($x\in]-\infty,0[$) $\cos t=\sin(t+\frac{\pi}{2})$,

on a $\arcsin(\cos t)=\arcsin(\sin(t+\frac{\pi}{2}))=t+\frac{\pi}{2}$ (ceci car $(t+\frac{\pi}{2})\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$).

Et pour $0<t<\pi$ ($x\in]0,+\infty[$) $\cos t=\sin(\frac{\pi}{2}-t)$,

on a $\arcsin(\cos t)=\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}-t))=\frac{\pi}{2}-t$ (ceci car $(\frac{\pi}{2}-t)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$).

Finalement et d'après la continuité de f on obtient

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2\arctan x & si\ x\in]-\infty,0[\\ \frac{\pi}{2}-2\arctan x & si\ x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

Remarque :

On retrouve aussi ce résultat en remarquant que f et $2\arctan$ ont même dérivée sur $]-\infty,0[$. Donc leur différence est une constante.

Solution 6.7. *:*

1) L'application $sh(x)$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan x$ est aussi

définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par suite $f(x)=\arctan(sh(x))$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée $f'(x)=(sh(x))'\frac{1}{1+(sh(x))^2}=\frac{ch(x)}{(ch(x))^2}=\frac{1}{ch(x)}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Par suite f est strictement croissante et donc injective.

Ainsi f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(]-\infty,+\infty[)=]\lim_{s\to-\infty}f(s),\lim_{t\to+\infty}f(t)[=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

2) Avec $g(y)=argsh(\tan y)$, on a

$f(g(y))=\arctan(sh(\text{argsh}(\tan y)))=\arctan(\tan y)=y$ *si* $y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Et $g(f(x))=\text{argsh}(\tan(\arctan(shx))=\text{argsh}(sh(x))=x$ *si* $x\in\mathbb{R}$.

Ce qui montre que $g=f^{-1}$.

3) Posons $y=f(x)=\arctan(sh(x))$ pour $x\in\mathbb{R}$,

et donc $x=f^{-1}(y)=g(y)=\text{argsh}(\tan y)$.

On a :

$\tan^2 y=\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}=\frac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y}$.

Ce qui donne $\sin^2 y=\frac{\tan^2 y}{1+\tan^2 y}$ et par suite $\sin y=\frac{\tan y}{\sqrt{1+\tan^2 y}}$

(ceci car $\sin y$ et $\tan y$ ont même signe pour $y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$).

On aura $\sin y=\frac{\tan(\arctan(\text{sh}(x)))}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(\text{sh}(x)))}}=\frac{\text{sh}(x)}{\sqrt{1+\text{sh}^2(x)}}=\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}=th(x)$.

D'où

$$\sin y=thx \qquad (*)$$

Et l'on a :

$\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}$ *et donc* $\cos y=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}}$

(ceci car $\cos y\ge0$ lorsque $y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$).

Par suite $\cos y=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(sh(x)))}}=\frac{1}{\sqrt{1+(sh(x))^2}}=\frac{1}{\sqrt{ch^2(x)}}$.

D'où

$$\cos y=\frac{1}{ch(x)} \qquad (**)$$

On a :

$\tan\frac{y}{2}=\frac{\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}}=\frac{2\cos\frac{y}{2}\sin\frac{y}{2}}{2\cos^2\frac{y}{2}}=\frac{\sin y}{1+\cos y}$

On en déduit que $\tan\frac{y}{2}=\frac{thx}{1+\frac{1}{ch(x)}}=\frac{shx}{1+chx}$ *(d'après (*) et (**)).*

Or $\frac{shx}{1+chx}=\frac{2ch(\frac{x}{2})sh(\frac{x}{2})}{2ch^2(\frac{x}{2})}=\frac{sh(\frac{x}{2})}{ch(\frac{x}{2})}=th(\frac{x}{2})$.

D'où

$$\tan\frac{y}{2}=th\frac{x}{2}$$

D'après la formule $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ et puisque $\tan\frac{\pi}{4}=1$, on a :

$\tan(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\tan(\frac{y}{2})}{1-\tan(\frac{y}{2})}$

Sachant que

$$\tan\frac{y}{2} = th\frac{x}{2} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

On aura $\tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}) = \dfrac{1 + \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}{1 - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}} = \dfrac{2e^x}{2}$

D'où le résultat

$$\tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}) = e^x$$

Solution 6.8. :

1. *Considérons la fonction*

$$\begin{array}{cccc} f & : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \arcsin x + \arccos x. \end{array}$$

La fonction f *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$
Par suite f *est constante sur* $]-1,1[$. *Comme* f *est continue sur* $[-1,1]$, *elle est constante sur* $[-1,1]$.
On a $f(x) = f(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1,1]$. *D'où le résultat*

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1,1].$$

2. *Considérons la fonction*

$$\begin{array}{cccc} g & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \arctan x + \arctan(\frac{1}{x}). \end{array}$$

La fonction g *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et*
$\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 0.$
Par suite g *est constante sur* $]0,+\infty[$.
Et puisque $g(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, *alors* $g(x) = \frac{\pi}{2}$, $\forall x > 0$. *D'où le résultat*

$$\forall x > 0, \qquad \arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}.$$

3. *Considérons la fonction*

$$\begin{array}{cccc} h & : &]-\infty,0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \arctan x + \arctan(\frac{1}{x}). \end{array}$$

De la même façon on a $h'(x) = 0$, $\forall x \in]-\infty,0[$ *et* $h(-1) = -\frac{\pi}{2}$. *Et donc* $h(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\forall x < 0$. *D'où le résultat*

$$\forall x < 0, \qquad \arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}.$$

Solution 6.9. :

1. *Considérons la fonction*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \operatorname{argsh} x - \ln(x + \sqrt{x^2+1}). \end{array}$$

La fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = 0.$$

D'où $f(x)$ *est constante sur* $\mathbb{R}$. *Et puisque* $f(0) = 0$, *alors* $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
D'où le résultat

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

2. *Considérons la fonction*

$$\begin{array}{cccc} g & : & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \operatorname{argch} x - \ln(x + \sqrt{x^2-1}). \end{array}$$

La fonction g *est dérivable sur* $]1,+\infty[$.
Et l'on a pour tout $x > 1$,

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = 0.$$

On en déduit que g *est constante sur* $]1,+\infty[$.
Comme g *est continue sur* $[1,+\infty[$, *on obtient* $g(x) = g(1) = \operatorname{argch} 1 = 0$ *pour tout* $x \geq 1$.
D'où le résultat

$$\forall x, \quad x \geq 1, \qquad \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

3. *Considérons la fonction*

$$\begin{array}{cccc} h & : &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \operatorname{argth} x - \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}). \end{array}$$

La fonction h *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et pour tout* $x \in]-1,1[$,

$$h'(x) = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2}\frac{(\frac{1+x}{1-x})'}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)^2}\frac{1-x}{1+x} = 0.$$

Par suite h *est constante sur* $]-1,1[$. *Et donc* $h(x) = h(0) = 0$ *pour tout* $x \in]-1,1[$.
D'où le résultat

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}).$$

Solution 6.10. :

1. *On a* $f(x) = \arcsin u(x)$ *avec* $u(x) = x^2 - 1$. *Par des équivalences on écrit :*
$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff -1 \le u(x) \le 1 &&\iff -1 \le x^2 - 1 \le 1 \\ &\iff 0 \le x^2 \le 2 &&\iff 0 \le |x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{2} \\ &\iff -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} &&\iff x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \end{aligned}$$
Par suite $D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
Puisque arcsin *n'est pas dérivable en* 1 *et* -1, *la fonction* $\arcsin u(x)$ *est dérivable sur* D_f *là où* $u(x)$ *est dérivable et* $u(x) \neq 1$ *et* $u(x) \neq -1$.
La fonction $u(x) = x^2 - 1$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *donc* f *est dérivable en* $x \in D_f$ *tel que* $u(x) = x^2 - 1$ *soit différent de* 1 *et* -1.
Or $(x^2 - 1 \neq -1 \Leftrightarrow x \neq 0)$ *et* $(x^2 - 1 \neq 1 \Leftrightarrow x \notin \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\})$.
Donc f *est dérivable sur* $D_f - \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\} =]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[$.
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}} = (x^2-1)'\frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}.$$
D'où
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{\sqrt{2-x^2}} & si \quad x \in]-\sqrt{2}, 0[, \\ \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} & si \quad x \in]0, \sqrt{2}[. \end{cases}$$

2. *On a* $f(x) = \arccos v(x)$ *avec* $v(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. *Par des équivalences on écrit :*
$$\begin{aligned} & x \in D_f && \iff v(x) \text{ est définie et } -1 \le v(x) \le 1 \\ \iff\ & x \neq -1 \text{ et } -1 \le \frac{1-x}{1+x} \le 1 && \iff x \neq -1 \text{ et } 0 \le \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \le 1 \\ \iff\ & x \neq -1 \text{ et } (1-x)^2 \le (1+x)^2 && \iff x \neq -1 \text{ et } -2x \le 2x \\ \iff\ & 0 \le x && \iff x \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$
Par suite $D_f = \mathbb{R}_+$.
Puisque la fonction arccos *n'est pas dérivable en* 1 *et* -1, *la fonction* $\arccos v(x)$ *est dérivable là où* $v(x)$ *est dérivable et* $v(x) \neq \pm 1$.
Comme $\dfrac{1-x}{1+x}$ *est dérivable sur* D_f *et* $(\dfrac{1-x}{1+x} = \pm 1 \Leftrightarrow x = 0)$, *on obtient :*
f *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et*
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{v'(x)}{\sqrt{1-v^2(x)}} = -(\frac{1-x}{1+x})'\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1-x}{1+x})^2}} \\ &= \tfrac{2}{(1+x)^2}\tfrac{1+x}{\sqrt{4x}} = \tfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

3. *On a* $f(x) = \arctan w(x)$ *avec* $w(x) = \dfrac{1}{1+x}$. *Sachant que la fonction* arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$, *et par des équivalences on écrit :*
$x \in D_f \iff w(x)$ *est définie et* $w(x) \in \mathbb{R} \iff x \neq -1$
Par suite $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.
La fonction $\dfrac{1}{1+x}$ *est dérivable sur* D_f *et* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
Donc f *est dérivable sur* D_f *et*
$$f'(x) = \frac{w'(x)}{1+w^2(x)} = (\frac{1}{1+x})'\frac{1}{1+(\frac{1}{1+x})^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}\frac{(1+x)^2}{x^2+2x+2} = \frac{-1}{x^2+2x+2}.$$

4. *On a* $f(x) = \operatorname{argch} g(x)$ *avec* $g(x) = x^2 + 1$. *Sachant que la fonction* argch *est définie sur* $[1, +\infty[$, *et par des équivalences on écrit :*
$x \in D_f \iff g(x)$ *définie et* $g(x) = x^2 + 1 \ge 1 \iff x^2 \ge 0 \iff x \in \mathbb{R}$
Par suite $D_f = \mathbb{R}$.
La fonction argch *est dérivable sur* $]1, +\infty[$, *par conséquent* $f(x) = \operatorname{argch} g(x)$ *est dérivable en* x *tel que* $g(x) = x^2 + 1$ *est dérivable et* $x^2 + 1 \neq 1$. *Ainsi* f *est dérivable en tout* x *tel que* $x \neq 0$.
Et dans ce cas
$$f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{g^2(x)-1}} = 2x\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^2-1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2}} = \frac{2x}{|x|\sqrt{x^2+2}}.$$
D'où
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{\sqrt{x^2+2}} & si \quad x \in]-\infty, 0[, \\ \dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}} & si \quad x \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

5. *Les fonctions* $\frac{x}{x^2+1}$ *et* $\operatorname{argsh}(x)$ *sont définies et dérivables sur* $\mathbb{R}$.
Donc $D_f = \mathbb{R}$ *et* $f(x) = \operatorname{argsh}(\frac{x}{x^2+1})$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et l'on a*
$$\begin{aligned} f'(x) &= (\frac{x}{x^2+1})'\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{x}{x^2+1})^2}} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+3x^2+1}} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^4+3x^2+1}}. \end{aligned}$$

6. *On a* $f(x) = \operatorname{argth} h(x)$ *avec* $h(x) = 2x - 1$. *Sachant que* argth *est définie sur* $]-1, 1[$, *on écrit par des équivalences :*
$x \in D_f \iff h(x)$ *définie et* $-1 < h(x) < 1 \iff x \in \mathbb{R}$ *et* $-1 < 2x - 1 < 1$
$\iff 0 < 2x$ *et* $2x < 2 \iff 0 < x < 1 \iff x \in]0, 1[$
Par suite $D_f =]0, 1[$.
f *est dérivable en* x *si* $2x - 1 \in]-1, 1[$, *donc si* $x \in D_f$. *Et l'on a :*
$$f'(x) = \frac{h'(x)}{1-h^2(x)} = \frac{2}{1-(2x-1)^2} = \frac{1}{4x(1-x)} \qquad \forall x \in]0, 1[.$$

Solution 6.11. :

1. *Par des équivalences, on a :*
$$\begin{aligned} x \in D_f &\Leftrightarrow -1 \le \tfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \le 1 &&\Leftrightarrow -\sqrt{1+x^2} \le x \le \sqrt{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow |x| \le \sqrt{1+x^2} &&\Leftrightarrow x^2 \le 1 + x^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \le 1 \end{aligned}$$
Puisqu'on n'a aucune condition sur x, *on en déduit que* $D_f = \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(-x) = \arcsin\frac{-x}{\sqrt{1+(-x)^2}} = -\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -f(x).$$
Donc f *est impaire.*

2. *La fonction* $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in [-1,1]$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Et puisque la fonction* $\arcsin x$ *est continue sur* $[-1,1]$, *alors* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.
La fonction $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\arcsin x$ *est dérivable sur* $]-1,1[$.
D'après le calcul précédent, $-1 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1$. *Donc* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
Et pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \times \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$
3. *Puisque,* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \arctan'(x)$, *alors* $f(x) = \arctan(x) + c$, *où* c *est une constante. Or* $f(0) = \arcsin(0) = 0 = \arctan(0) + c = c$.
D'où $f(x) = \arctan(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solution 6.12. :

1. *On a* $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$. *Puisque* $\arctan$ *est définie sur* $\mathbb{R}$, f *est définie si* $\frac{1-x}{1+x}$ *est définie et donc si* $1 + x \neq 0$.
D'où $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 + x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$.
2. *La fonction* $\frac{1-x}{1+x}$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R} - \{-1\}$ *et* $\arctan x$ *continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Donc* f *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R} - \{-1\}$.
3. $$f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = \frac{-1}{1+x^2} = -\arctan' x.$$
Donc
$$f(x) = \begin{cases} -\arctan x + c_1 & si\ x \in]-\infty,-1[, \\ -\arctan x + c_2 & si\ x \in]-1,+\infty[, \end{cases}$$
où c_1 *et* c_2 *sont deux constantes.*
On a $f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ *et* $-\arctan(0) + c_2 = c_2$, *donc* $c_2 = \frac{\pi}{4}$.
On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, *et* $\lim_{x\to-\infty}(-\arctan x + c_1) = \frac{\pi}{2} + c_1$, *donc* $c_1 = -\frac{3\pi}{4}$. *D'où*
$$f(x) = \begin{cases} -\arctan x - \frac{3\pi}{4} & si\ x \in]-\infty,-1[, \\ -\arctan x + \frac{\pi}{4} & si\ x \in]-1,+\infty[. \end{cases}$$

Solution 6.13. :

1. *Par équivalence on écrit :*
$\sqrt{\frac{x+1}{2}} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} > 1 \Leftrightarrow x+1 > 2 \Leftrightarrow x > 1$
La fonction f_1 *est donc dérivable sur* $]1,+\infty[$ *et*
$$f_1'(x) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{2} - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\operatorname{argch}'(x).$$

Donc $f_1(x) = \frac{1}{2}\operatorname{argch}(x) + c$, $\forall x \in]1,+\infty[$, *où* $c \in \mathbb{R}$. *Or* f_1 *est continue en 1, donc*
$$0 = f_1(1) = \lim_{x\to1} f_1(x) = \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{argch}(x) + c\right) = c.$$
Par conséquent, $f_1(x) = \frac{1}{2}\operatorname{argch}(x)$, $\forall x \in [1,+\infty[$.
2. *La fonction* f_2 *est définie si et seulement si* $\sqrt{1-x^2}$ *est définie. On doit avoir* $x \in [-1,1]$.
Comme $\sqrt{1-x^2}$ *n'est dérivable que sur* $]-1,1[$, *la fonction* f_2 *est définie et dérivable sur l'intervalle* $]-1,1[$.
Et l'on a
$$f_2'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \times \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$
Donc $f_2'(x) = \operatorname{argth}'(x)$, *et par suite* $f_2(x) = \operatorname{argth}(x) + c$, *où* $c \in \mathbb{R}$.
Comme $f_2(0) = 0 = \operatorname{argth}(0) + c = c$, *on a* $f_2(x) = \operatorname{argth}(x)$, $\forall x \in]-1,1[$.
3. *La fonction* f_3 *est dérivable sur* $]0,1[$ *avec*
$$f_3'(x) = \frac{-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1-x^2}{x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Donc $f_3(x) = \arccos(x) + c$, *où* $c \in \mathbb{R}$. *La fonction* f_3 *étant continue en 1, on en déduit que*
$$0 = f_3(1) = \lim_{x\to1} f_3(x) = \lim_{x\to1}(\arccos(x) + c) = c.$$
Par suite $f_3(x) = \arccos(x)$, $\forall x \in]0,1]$.

6.4 Exercices supplémentaires

Exercice 6.14. :
Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6.15. :
1) Simplifiez les expressions suivantes

$$\cos(\arcsin x) \qquad et \qquad \sin(\arccos x)$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation suivante*

$$\arcsin 2x - \arcsin\sqrt{3}x = \arcsin x.$$

Exercice 6.16. :
Déterminer le domaine de définition et étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad et \quad g(x) = \arctan\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

Exercice 6.17. :
Montrer les égalités suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
1)

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\text{sh}x + \text{ch}x)^n = \text{sh}nx + \text{ch}nx$$

2)

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(\frac{1+\text{th}x}{1-\text{th}x}\right)^n = \frac{1+\text{th}nx}{1-\text{th}nx}$$

Exercice 6.18. :
Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivation puis calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arctan\dfrac{x-1}{x+2}$, 2. $g(x) = \sqrt{\arctan(1-x^2)}$, 3. $h(x) = \sqrt{\dfrac{\pi - 2\arcsin x}{\pi + 2\arcsin x}}$.

Exercice 6.19. :
Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ln(\cosh x))$, 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sinh x}{x}$, 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{argsh}x}{x}$.

Exercice 6.20. :
On considère la fonction $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x$ *définie sur* $I = [\frac{5\pi}{2}, 3\pi]$.
1) Vérifier que f *est une bijection de* I *dans l'intervalle* J *(à déterminer).*
2) Donner en fonction de $x \in J$ *la fonction réciproque* $f^{-1}(x)$.

Exercice 6.21. :
Soit f *la fonction définie par* $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

1. *Déterminer le domaine de définition de* f.
2. *Étudier la continuité et la dérivabilité de* f.

3. *Calculer la dérivée de* f *et en déduire une expression simplifiée de* $f(x)$.

Exercice 6.22. :
Soit f *la fonction définie par* $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

1. *Déterminer le domaine de définition de* f *et étudier sa parité.*
2. *Calculer la dérivée de* f *et en déduire une autre expression de* f.

Exercice 6.23. :
Calculer la dérivée puis donner une autre expression de chacune des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, 2. $f_2(x) = \text{argth}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 3. $f_3(x) = \text{argsh}(3x+4x^3)$

4. $f_4(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$, *où* $x \in]0, \pi[$.

Exercice 6.24. :
On considère les deux fonctions suivantes :
$f(x) = \arctan\dfrac{1}{2x^2}$ *et* $g(x) = \arctan\dfrac{x}{1+x} - \arctan\dfrac{x-1}{x}$
définies sur $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.
1) Calculer $f'(x)$ *et* $g'(x)$ *sur* $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.
2) Que peut-on déduire ?

6.5 Indications sur les exercices supplémentaires

Solution 6.14. :
Poser $a = \arctan(x-1)$, $b = \arctan x$ *et* $c = \arctan(x+1)$
et donc $\tan a = x-1$, $\tan b = x$ *et* $\tan c = x+1$.
Utiliser l'implication :
$a + c = \frac{\pi}{2} - b \Rightarrow \dfrac{\tan a + \tan c}{1 - \tan a \tan c} = \tan(a+c) = \tan(\frac{\pi}{2} - b) = \dfrac{1}{\tan b}$.
En déduire une équation vérifiée par x, *puis résoudre cette équation sachant que* $x \geq 0$.
(Si $x < 0$ *on aurait* $a < 0$ *et* $b < 0$ *et donc* $a + b = \frac{\pi}{2} - c < 0$, *absurde avec* $c \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*).*

Solution 6.15. :
1) Poser $y = \arcsin x$ *avec* $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Remarquer que $\cos y \geq 0$ *et* $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$.
Déduire que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.
Poser $z = \arccos x$ *avec* $z \in [0, \pi]$.
Remarquer que $\sin z \geq 0$ *et* $\sin z = \sqrt{1 - \cos^2 z}$.
Déduire que $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

2) Comme arcsin *est définie sur* $[-1, 1]$, *on doit avoir* $\begin{cases} -1 \leq 2x \leq 1 \\ -1 \leq \sqrt{3}x \leq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$. *Et donc*
$x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Appliquer ensuite la fonction sin *aux deux membres de l'équation.*
Passer par la formule $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ *et le résultat de (1).*

Solution 6.16. :
Pour $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ *traduire les inégalités* $-1 \leq \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \leq 1$
en $0 \leq \dfrac{(1+x)^2}{(1-x)^2} \leq 1$ *pour* $x \neq 1$, *puis en déduire ensuite* D_f.
Pour la dérivabilité, déterminer $x \in D_f$ *tel que* $\dfrac{1+x}{1-x} \neq 1$ *et* $\dfrac{1+x}{1-x} \neq -1$.
Calculer ensuite $f'(x)$ *par la formule* $\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
Pour $g(x) = \arctan\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ *remarquer que* arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et déterminer l'ensemble de définition de* $v(x) = (x + \sqrt{x^2-1})$.
Pour la dérivabilité remarquer que arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $v(x) = (x + \sqrt{x^2-1})$ *est dérivable pour* x *tel que* $x^2 - 1 \neq 0$ *(à cause de la racine).*
Calculer ensuite $g'(x)$ *par la formule* $\dfrac{v'}{1+v^2}$.

Solution 6.17. :
1) Remarquer que $(\text{sh}\, x + \text{ch}\, x)^n = (e^x)^n = e^{nx}$.
2) Remarquer que $\left(\dfrac{1+\text{th}x}{1-\text{th}x}\right)^n = \dfrac{(\text{ch}\, x + \text{sh}\, x)^n}{(\text{ch}\, x - \text{sh}\, x)^n}$.

Solution 6.18.

1. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R} - \{-2\}$. *Sa dérivée est*
$$f'(x) = \frac{3}{2x^2 + 2x + 3}.$$

2. *La fonction* g *est définie sur* $[-1, 1]$, *dérivable sur* $]-1, 1[$. *Sa dérivée est*
$$g'(x) = \frac{-x}{(1 + (1-x)^2)\sqrt{\arctan(1-x^2)}}.$$

3. *La fonction* h *est définie sur* $]-1, 1]$, *dérivable sur* $]-1, 1[$ *et sa dérivée est*
$$h'(x) = \frac{-2\pi}{(\pi + 2\arcsin x)\sqrt{(1-x^2)(\pi^2 - 4\arcsin^2 x)}}.$$

Solution 6.19. :

1. *On a*
$$x - \ln(\text{ch}\, x) = x - \ln(\frac{e^x + e^{-x}}{2}) = x - \ln(\frac{e^x(1 + e^{-2x})}{2}) = -\ln(1 + e^{-2x}) + \ln(2).$$
D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln(\text{ch}\, x)) = \ln(2)$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{sh}\, x}{x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{e^{-x}}{x}) = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
3. *On pose* $y = \text{argsh}x$. *Alors*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{argsh}x}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{\text{sh}\, y} = 0.$$

Solution 6.20. :
1) Vérifier que f *est continue et strictement croissante sur* $[\frac{5\pi}{2}, 3\pi]$ *et en déduire qu'elle est bijective de* I *dans* $f(I)$.
2) Par des équivalences et en utilisant $z = (y - 3\pi) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *lorsque* $y \in [\frac{5\pi}{2}, 3\pi]$, *puis traduire* $y = f^{-1}(x)$.

Solution 6.21. :

1. *Remarquer que* $\frac{1-x}{1+x}$ *et* $(1-x)(1+x)$ *ont même signe pour* $x \neq -1$.
$x \in D_f \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1+x} \geq 0$ *et* $1 + x \neq 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) \geq 0$ *et* $x \neq -1 \Leftrightarrow x \in]-1, 1]$.
2. *La fonction* $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ *est continue sur* $]-1, 1]$ *et* $\arctan x$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, *d'où* f *est continue sur* $]-1, 1]$.
La fonction $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et* $\arctan x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *d'où* f *est dérivable sur* $]-1, 1[$.
3. *Vérifier que* $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$.
Remarquer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \frac{1}{2}\arccos'(x)$ *et en déduire que* $f(x) = \frac{1}{2}\arccos(x) + c$.
Calculer c *en donnant une valeur à* x.

Solution 6.22. :

1. *Remarquer que* $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow (\frac{2x}{1+x^2})^2 \leq 1$, *puis vérifier que* $D_f = \mathbb{R}$.
Utiliser le fait que arcsin *est impaire pour montrer que* f *est impaire.*

2. *La fonction* f *est dérivable en tout* x *tel que* $\dfrac{2x}{1+x^2} \in]-1,1[$.
Traduire $\dfrac{2x}{1+x^2} \neq \pm 1$ *pour montrer que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.
Vérifier que $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|}$.
Écrire que $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & si \;\; x \in]-1,1[, \\ \dfrac{-2}{1+x^2} & si \;\; x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[. \end{cases}$
Puis déduire que $f(x) = \begin{cases} -2\arctan(x) + c_1 & si \;\; x \in]-\infty,-1[, \\ 2\arctan(x) + c_2 & si \;\; x \in]-1,1[, \\ -2\arctan(x) + c_3 & si \;\; x \in]1,+\infty[, \end{cases}$
où c_1, c_2 *et* c_3 *sont des constantes à déterminer en donnant des valeurs à* x.

Solution 6.23. 1. *Utiliser* $-1-x^2 \leq 1-x^2 \leq 1+x^2$ *pour montrer que la fonction* f_1 *est continue sur* $\mathbb{R}$. *Et traduire* $\frac{1-x^2}{1+x^2} \neq \pm 1$ *pour montrer que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$.
Vérifier que $f_1'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^2}} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & si \; x > 0, \\ \frac{-2}{1+x^2} & si \; x < 0. \end{cases}$
Déduire que $f_1(x) = \begin{cases} 2\arctan(x) + c_1 & si \; x > 0, \\ -2\arctan(x) + c_2 & si \; x < 0, \end{cases}$
où c_1 *et* c_2 *sont des constantes à déterminer.*
Déduire que $f_1(x) = 2\arctan|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. *Justifier que la fonction* f_2 *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et vérifier que* $f_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *et en déduire que* $f_2(x) = \text{argsh}(x) + c$ *où* $c \in \mathbb{R}$ *à déterminer.*
Conclure que $f_2(x) = \text{argsh}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. *Vérifier que la fonction* f_3 *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
Montrer que $f_3'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{1+x^2}} = (3\text{argsh}(x))'$.
En déduire que $f_3(x) = 3\text{argsh}(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ *à déterminer.*

4. *Vérifier que la fonction* f_4 *est dérivable sur* $]0,\pi[$ *et que* $f_4'(x) = \frac{1}{2}$.
En déduire que $f_4(x) = \frac{x}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$ *à déterminer.*

Solution 6.24. *1) Vérifier que* $f'(x) = \dfrac{-4x}{4x^4+1} = g'(x)$.
2) Déduire que $f(x) = g(x) + c_1$ *sur* $]-\infty,-1[$, $f(x) = g(x) + c_2$ *sur* $]-1,0[$ *et* $f(x) = g(x) + c_3$ *sur* $]0,+\infty[$. *Puis déterminer les constantes* c_1, c_2 *et* c_3.

Chapitre 7

Les développements limités

7.1 Rappels de cours

Les développements limités permettent de calculer des limites (de fonctions, de suites,...) en levant les indéterminations rencontrées. Ils facilitent l'étude locale des fonctions au voisinage d'un point donné, les calculs approximatifs de $f(x)$ sans passer par la machine, l'obtention d'équations de tangentes, d'asymptotes, l'étude des branches infinies, etc.

Définition 7.1. *Soient* $I =]a,b[$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *(avec* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $a < 0 < b$*),* f *une fonction définie de* $I^* =]a,0[\cup]0,b[$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* n *un entier naturel.*
On dit que f ***admet un développement limité au voisinage de*** 0 ***à l'ordre*** n *s'il existe des constantes réelles* $a_o, a_1, \cdots, a_n$, $\alpha > 0$ *un réel et* $\varepsilon(x)$ *une fonction telles que*
$\forall x \in]-\alpha,0[\cup]0,\alpha[$, $f(x) = a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$,
avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
Le polynôme $P(x) = a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n$ *s'appelle la partie régulière (ou principale) du développement limité et la fonction* $x^n\varepsilon(x) = o(x^n)$ *le reste.*
Dans la suite on écrira dl_n *pour abréger "développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n".*
On dit aussi que f *admet* ***un développement limité à droite(resp. à gauche) au voisinage de*** 0 ***à l'ordre*** n *si l'égalité* $f(x) = a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$ *est vraie à droite (resp. à gauche) de* 0.

Remarque 7.1. *Si* f *admet un* dl_n *avec* $n \geq 1$ *alors* f *admet un* dl_{n-1}.
Car si on a $f(x) = a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$ *alors*
$$\begin{aligned} f(x) &= a_o + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^{n-1}(a_nx + x\varepsilon(x)) \\ &= a_o + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon_1(x), \end{aligned}$$
avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

Théorème 7.1. *Le* dl_n *de* f *s'il existe est unique.*

Remarque 7.2. :
La partie principale du dl_n *d'un polynôme est formée des monômes de degrés inférieurs ou égaux à* n *et le reste est formé des monômes de degrés supérieurs strictement*

à n.

Proposition 7.1. *Si f est une fonction dont la dérivée $f^{(n)}$ existe et est continue sur un voisinage de 0, alors f admet le dl_n*
$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$,
d'après la formule de Mac-Laurin.

Propriétés 12. *Soient f et g des fonctions admettant chacune un dl_n*
$f(x) = a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x)$, *avec* $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$,
$g(x) = b_o + b_1x + \cdots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x)$, *avec* $\lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$.
Alors on a :

— ***La somme :***
la fonction somme $f+g$ admet le dl_n
$(f+g)(x) = (a_o+b_o) + (a_1+b_1)x + \cdots + (a_n+b_n)x^n + x^n\varepsilon_3(x)$,
dont la partie régulière est la somme des parties régulières de f et g et $\varepsilon_3(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$.

— ***Le produit :***
la fonction produit fg admet le dl_n
$(fg)(x) = (a_ob_o) + (a_ob_1 + a_1b_o)x + \cdots + (a_ob_n + \cdots + a_nb_o)x^n + x^n\varepsilon_4(x)$,
dont la partie régulière est le polynôme produit des parties régulières de f et g et en gardant uniquement les monômes de puissances inférieures ou égales à n.

— ***Le quotient :***
si en plus $b_o \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ admet le dl_n dont la partie régulière est le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de la partie régulière de f par celle de g.

— ***La composition des fonctions :***
si en plus $b_o = 0$, la fonction $f\circ g$ admet le dl_n
$f(g(x)) = a_o + a_1(b_1x + \cdots + b_nx^n) + \cdots + a_n(b_1x + \cdots + b_nx^n)^n + x^n\varepsilon(x)$
qui s'écrit $f(g(x)) = c_o + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\varepsilon_5(x)$,
en gardant uniquement les monômes de puissances inférieures ou égales à n.

— ***La dérivation :***
la fonction dérivée f' admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n-1$ (avec $n\geq 1$) qui est donné par
$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon_6(x)$.

— ***L'intégration :***
si en plus f est continue sur un voisinage V de 0 et $a\in V$, la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ primitive de f admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n+1$ donné par
$F(x) = F(0) + a_ox + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_7(x)$.

Le tableau ci-dessous donne les développements limités -fréquemment utilisés- calculés à l'aide de la formule de Mac-Laurin :
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$,
$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^n\varepsilon(x)$ $(n = 2k+1$ ou $n = 2k+2)$.
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^n\varepsilon(x)$ $(n = 2k$ ou $n = 2k+1)$.

Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, on a :
$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\times\cdots\times(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$.
$sh\,(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^n\varepsilon(x)$ $(n = 2k+1$ ou $n = 2k+2)$.
$ch\,(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^n\varepsilon(x)$ $(n = 2k$ ou $n = 2k+1)$.

- **Développement limité au voisinage de x_o :**
Pour définir le développement limité d'ordre n, d'une fonction f au voisinage d'un x_o quelconque, on pose $X = x - x_o$ et $g(X) = f(X+x_o) = f(x)$.
Lorsque x est au voisinage de x_o, X est au voisinage de 0. Ainsi le développement de g à l'ordre n au voisinage de 0 donne
$g(X) = a_o + a_1X + \cdots + a_nX^n + X^n\varepsilon(X)$ avec $\lim_{X\to 0}\varepsilon(X) = 0$,
et donc $f(x) = a_o + a_1(x-x_o) + \cdots + a_n(x-x_o)^n + (x-x_o)^n\varepsilon_1(x)$, avec $\lim_{x\to x_o}\varepsilon_1(x) = \lim_{x\to x_o}\varepsilon(x-x_o) = 0$,
ainsi on obtient le développement limité de f au voisinage de x_o à l'ordre n.

- **Développement limité au voisinage de $+\infty$:**
Pour définir le développement limité d'ordre n, d'une fonction f au voisinage de $+\infty$, on pose $X = \frac{1}{x}$ et $g(X) = f(\frac{1}{X}) = f(x)$.
Lorsque x est au voisinage de $+\infty$, X est au voisinage de 0. Ainsi le développement de g à l'ordre n au voisinage de 0 donne
$g(X) = a_o + a_1X + \cdots + a_nX^n + X^n\varepsilon_1(X)$ avec $\lim_{X\to 0}\varepsilon_1(X) = 0$,
et donc $f(x) = a_o + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = \lim_{x\to+\infty}\varepsilon_1(\frac{1}{x}) = 0$,
ainsi on obtient le développement limité de f au voisinage de $+\infty$ à l'ordre n.
Remarque :
On fait de même au voisinage de $-\infty$.

- **Développement limité généralisé au voisinage de 0 :**
Pour une fonction f définie sur un voisinage de 0, étant donné $p\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en 0 lorsque la fonction $g(x) = x^pf(x)$ admet un dl_{n+p} en 0.
On peut écrire dans ce cas :
$x^pf(x) = a_o + a_1x + \cdots + a_nx^{n+p} + o(x^{n+p})$
et donc $f(x) = \frac{1}{x^p}(a_o + a_1x + \cdots + a_{n+p}x^{n+p} + o(x^{n+p}) = \frac{a_o}{x^p} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{x} + a_p + a_{p+1}x + \cdots + a_{n+p}x^n$.

7.2 Énoncés des exercices

Exercice 7.1. :
Donner le dl_n dans les cas suivants en précisant la fonction $\varepsilon(x)$ à chaque fois :
1) $f(x) = 1 - 3x^2 + \pi x^4 - 7x^8$ *avec* $n = 5$ *et ensuite* $n = 9$.
2) $g(x) = 7x^2 + x^4 - 7x^8$ *avec* $n = 0$, $n = 1$ *et* $n = 2$.

Exercice 7.2. :
Écrire les dl_n de e^x et e^{-x}, puis retrouver le dl_n de $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ *et* $sh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.
Vérifier que la somme des dl_n de $ch(x)$ et $sh(x)$ est égale au dl_n de e^x.

Exercice 7.3. :
Donner par deux méthodes différentes le dl_n à l'ordre $n = 5$ de $f(x) = sh(x) - \sin(x)$, (par la règle de la somme et par la formule de Mac-Laurin).

Exercice 7.4. :
Trouver les développements limités à l'ordre $n = 4$, au voisinage de 0, des fonctions suivantes :
1) $f(x) = (e^x - 3\sin(x))(\cos(x) - \frac{2}{1-x})$,
2) $g(x) = f(x) + 1 - x^2\cos(x)$,
3) $h(x) = g^2(x)$.

Exercice 7.5. :
Trouver les développements limités à l'ordre $n = 4$, au voisinage de 0, des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \frac{\cos(x)+2\log(1+x)}{1+\sin(x)}$,
2) $g(x) = \frac{x}{e^x-1}$,
3) $h(x) = \frac{x^2-4x^3}{\sin^2(x)}$.

Exercice 7.6. :
Posons $f(x) = arcsin(x)$, $g(x) = arccos(x)$ et $h(x) = arctan(x)$. Sachant que les dérivées de ces fonctions sont données par :
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ *et* $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$,
déterminer les dl_n de ces fonctions pour $n = 5$.

Exercice 7.7. :
Donner les développements limités à l'ordre $n = 4$, au voisinage de 0, des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \sqrt{1+\sin(x)}$,
2) $g(x) = e^{\sin(x)}$,
3) $h(x) = e^{\frac{x}{\cos x}}$,
4) $k(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 7.8. :
1) Reprendre les fonctions de l'exercice précédent et donner les dl_n pour $n = 3$ de leurs dérivées (en utilisant la règle de la dérivée).
2) Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ et donner leurs dl_n à $n = 3$. Comparer avec la question précédente.

Exercice 7.9. :
Donner les dl_n au voisinage de x_o dans les cas suivants :
1) $f(x) = \sqrt{x}$ *avec* $x_o = 1$ *et* $n = 3$.
2) $g(x) = \ln(\sin(x))$ *avec* $x_o \in]0, \pi[$ *et* $n = 3$.
Puis en déduire le dl_n de $g(x)$ à l'ordre $n = 3$ au voisinage de $x_o = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7.10. :
Vérifier les résultats suivants pour f non définie en 0 :
1) Si f a un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n = 0$, alors elle est prolongeable par continuité en 0.
2) Si f a un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n = 1$, alors elle est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement par continuité est une fonction dérivable en 0.

Exercice 7.11. :
On pose $f(x) = \sqrt{|x|}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ et $h(x) = \ln(|x|)$. Vérifier si ces fonctions admettent des développements limités au voisinage de 0 à l'ordre $n = 0$, $n = 1$ ou $n = 2$.

Exercice 7.12. :
Vérifier si les fonctions suivantes ont des dl_n, si oui à quel ordre n on peut y aller :
$f(x) = |3 - 4x^2 + \sin(x)|$ *et* $g(x) = |x + x^3 - x^4|$.

Exercice 7.13. :
Considérons les fonctions ayant les développements limités suivants :
$f(x) = x^2 - 6x^4 + o(x^5)$ *et* $g(x) = 2x^9 + 3x^{11} + o(x^{11})$.
Calculer le dl_n de $(fg)(x) = f(x)g(x)$ à l'ordre le plus élevé possible.

Exercice 7.14. :
Donner les dl_n au voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :
1) $f(x) = arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)$ *à l'ordre* $n = 3$.
2) $g(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ *à l'ordre* $n = 4$.

Exercice 7.15. :
Calculer les développements limités généralisés au voisinage de 0 des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \frac{x}{\tan(x^2)}$ *à l'ordre* $n = 5$.
2) $g(x) = \frac{e^x - \cos(x)}{x^2\sin(x)}$ *à l'ordre* $n = 2$.

Exercice 7.16. :
Sans utiliser la calculatrice, donner des valeurs approximatives des nombres suivants :

$a = \sqrt[3]{0,98}$, $b = \ln(1,07)$ *et* $c = \frac{1-\sin(0,05)}{\sqrt{25,5}}$.

Exercice 7.17. :
Déterminer les parties principales au voisinage de 0 des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \sqrt{\sin(x)} - \sqrt{sh(x)}$ *pour* $x > 0$.
2) $g(x) = \operatorname{argth}(\operatorname{argsh}(x)) - \operatorname{argsh}(\operatorname{argth}(x))$.

Exercice 7.18. :
Calculer les limites suivantes :
1) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$,
2) $\lim_{x\to +\infty} (x - x^2\ln(1+\frac{1}{x}))$,
3) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\arctan(2\sin(x)) - \frac{\pi}{4}}{\cos(3x)}$,
4) $\lim_{n\to +\infty} \left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}$.

Exercice 7.19. :
Étudier les fonctions suivantes au voisinage de x_o :
1) $f(x) = \frac{2x\ln(x)}{x-1}$ *avec* $x_o = 1$.
2) $g(x) = \ln(\tan(x))$ *avec* $x_o = \frac{\pi}{4}$.
(une étude brève : l'équation et la position de la tangente).

Exercice 7.20. :
Étudier les branches infinies de la courbe représentant la fonction $f(x) = \ln(x^2+1) - \frac{1}{x}$.

7.3 Solutions détaillées des exercices

Solution 7.1. :
D'après une remarque du rappel du cours :
1) $f(x) = 1 - 3x^2 + \pi x^4 - 7x^8 = (1 - 3x^2 + \pi x^4) + (-7x^8) = (1 - 3x^2 + \pi x^4) + x^5\varepsilon_1(x)$.
c'est le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de f,
avec $P_1(x) = 1 - 3x^2 + \pi x^4$ *la partie principale et* $\varepsilon_1(x) = -7x^3$.
Et l'on peut écrire aussi
$f(x) = 1 - 3x^2 + \pi x^4 - 7x^8 = (1 - 3x^2 + \pi x^4 - 7x^8) + x^9\varepsilon_2(x)$.
c'est le développement limité à l'ordre 9 au voisinage de 0 de f,
avec $P_2(x) = 1 - 3x^2 + \pi x^4 - 7x^8$ *la partie principale et* $\varepsilon_2(x) = 0$.

2) Pour g on a :
$g(x) = 7x^2 + x^4 - 7x^8 = 0 + x^0(7x^2 + x^4 - 7x^8) = Q_1(x) + x^0\varepsilon_3(x)$,
c'est le développement limité à l'ordre 0 au voisinage de 0 de g, avec $Q_1(x) = 0$ *la partie principale et* $\varepsilon_3(x) = 7x^2 + x^4 - 7x^8$.
Ensuite on a
$g(x) = 7x^2 + x^4 - 7x^8 = g(x) = 0 + x(7x + x^3 - 7x^7) = Q_2(x) + x\varepsilon_4(x)$,
c'est le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de g, avec $Q_2(x) = 0$ *la partie principale et* $\varepsilon_4(x) = 7x + x^3 - 7x^7$.
Et de même
$g(x) = 7x^2 + x^4 - 7x^8 = 7x^2 + x^2(x^2 - 7x^6) = Q_3(x) + x^2\varepsilon_5(x)$,
c'est le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de g, avec $Q_3(x) = 7x^2$ *la partie principale et* $\varepsilon_5(x) = x^2 - 7x^6$.
Attention :
Dans chaque cas la fonction $\varepsilon_i(x)$ *vérifie bien* $\lim_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0$.

Solution 7.2. :
En utilisant le résultat du résumé du cours on a :
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon_1(x)$
et donc $e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + (-x)^n\varepsilon_1(-x)$
$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon_2(x)$ *avec* $\varepsilon_2(x) = (-1)^n\varepsilon_1(-x)$
Par la règle de la somme on obtient le dl_n *de* $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^n\varepsilon_3(x)$ *au voisinage de 0 à l'ordre* $n = 2k$ *ou* $n = 2k+1$.
Et de même
$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^n\varepsilon_4(x)$ *au voisinage de 0 à l'ordre* $n = 2k+1$ *ou* $n = 2k+2$.
En faisant la somme des dl_n *obtenus ci dessus on retrouve :*
$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^n\varepsilon_3(x)\right) + \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^n\varepsilon_4(x)\right)$
$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon_1(x)$
ce qui est normal puisque $ch(x) + sh(x) = e^x$.
Et avec $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_3(x) + \varepsilon_4(x)$ *d'après l'unicité du développement limité.*

Solution 7.3. :
- D'après le tableau des dl

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ *au voisinage de* 0 *à l'ordre* 5
et d'après l'exercice précédent
$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ *au voisinage de* 0 *à l'ordre* 5
et par différence en utilisant la règle de la somme
$f(x) = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) = 2\frac{x^3}{3!} + o(x^5)$
D'où $f(x) = \frac{x^3}{3} + o(x^5)$ *au voisinage de* 0 *à l'ordre* 5.

- Deuxième méthode :
La fonction $f(x) = sh(x) - \sin(x)$ *est indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *car différence de deux fonctions indéfiniment dérivables sur* $\mathbb{R}$. *On lui applique la formule de Mac-Laurin au voisinage de* 0. *Et l'on a*

$$\begin{array}{ll|ll} f(x) = sh(x) - \sin(x) & \to f(0) = 0 & f'(x) = ch(x) - \cos(x) & \to f'(0) = 0 \\ f^{(2)}(x) = sh(x) + \sin(x) & \to f^{(2)}(0) = 0 & f^{(3)}(x) = ch(x) + \cos(x) & \to f^{(3)}(0) = 2 \\ f^{(4)}(x) = sh(x) - \sin(x) & \to f^{(4)}(0) = 0 & f^{(5)}(x) = ch(x) - \cos(x) & \to f^{(5)}(0) = 0 \end{array}$$

D'où
$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^5}{5!}f^{(5)}(0) + o(x^5) \\ &= 2\frac{x^3}{3!} + o(x^5) = \frac{x^3}{3} + o(x^5) \end{aligned}$$

Solution 7.4. :
1) En utilisant le tableau des dl_n *avec* $n = 4$ *des fonctions usuelles on a :*
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$
En utilisant la règle de la somme on a :
$e^x - 3\sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - 3\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)$
$= 1 - 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.
De même
$\cos(x) - \frac{2}{1-x} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - 2\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)\right)$
$= -1 - 2x - \frac{5x^2}{2} - 2x^3 - \frac{47x^4}{24} + o(x^4)$
D'où
$f(x) = \left(1 - 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(-1 - 2x - \frac{5x^2}{2} - 2x^3 - \frac{47x^4}{24} + o(x^4)\right)$
En utilisant la règle du produit en gardant uniquement les puissances inférieures ou égales à quatre, on obtient finalement :
$f(x) = -1 + x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$.

2) On a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
et $x^2 = x^2 + o(x^4)$ *(c'est un polynôme)*
Par la règle du produit on a : $x^2\cos(x) = x^2 - \frac{x^4}{2!} + o(x^4)$,
(on a fait le produit de x^2 *par* $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ *et on a gardé uniquement les puissances inférieures ou égales à quatre pour avoir la partie principale de* $x^2\cos(x)$ *le reste s'écrit* $o(x^4)$*).*
Et par la règle de la somme
$g(x) = f(x) + 1 - x^2\cos(x) = \left(-1 + x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)\right) + 1 - \left(x^2 - \frac{x^4}{2!} + o(x^4)\right)$

on obtient finalement
$g(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$.

3) D'après ce qui précède $g^2(x) = \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\right)^2$
Et par la règle du produit on obtient $g^2(x) = o(x^4)$.
Ceci car dans le produit toutes les puissances sont plus grandes que cinq.

Solution 7.5. :
1) f *est un quotient et l'on a pour le dénominateur* $\lim_{x\to 0}(1 + \sin(x)) = 1$.
On va utiliser la règle du quotient.
D'après le tableau des dl usuels :
$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$,
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ *et* $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$.
Et par la règle de la somme on a successivement :
$\cos(x) + 2\log(1+x) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) + 2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$
$= 1 + 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{24}x^4 + o(x^4)$
et l'on a aussi $1 + \sin(x) = 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.
On fait la division suivant les puissances croissantes de la partie principale du numérateur par la partie principale du dénominateur à l'ordre quatre.
Ce qui donne

$$\begin{array}{r|l} 1 + 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{24}x^4 & 1 + x - \frac{1}{6}x^3 \\ -1 - x + \frac{1}{6}x^3 & \\ \hline x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{11}{24}x^4 & 1 + x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{29}{8}x^4 \\ -x - x^2 + \frac{1}{6}x^4 & \\ \hline -\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{7}{24}x^4 & \\ \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \cdots & \\ \hline \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{24}x^4 + \cdots & \\ -\frac{10}{3}x^3 - \frac{10}{3}x^4 + \cdots & \\ \hline -\frac{29}{8}x^4 + \cdots & \end{array}$$

(Remarquer que dans cette division on écrit seulement les puissances inférieures ou égales à quatre puisque les autres puissances sont des $o(x^4)$*.)*
Finalement on obtient :

$$f(x) = 1 + x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{29}{8}x^4 + o(x^4)$$

2) Pour la fonction $g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ *on a* $\lim_{x\to 0}(e^x - 1) = 0$. *On ne peut appliquer la règle du quotient tout de suite.*
Essayons d'abord de voir le dl de $(e^x - 1)$ *qui est égal à :*

$e^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$

et donc $e^x - 1 = x\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + o(x^{n-1})\right)$

Ainsi pour tout $x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 \cdots + + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + o(x^{n-1})\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 \cdots + + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + o(x^{n-1})\right)}$$

Maintenant on a un quotient avec comme dénominateur une fonction dont la limite en zéro est non nulle. Pour avoir le dl du quotient à l'ordre quatre il nous faut $n - 1 = 4$ *et donc* $n = 5$ *c'est l'ordre auquel il fallait développer* $(e^x - 1)$.

Faisons ensuite la division suivant les puissances croissantes de 1 *par* $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4$ *à l'ordre quatre*

$$\begin{array}{r|l}
1 & 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 \\
-1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{120}x^4 & \\
\hline
-\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{120}x^4 & 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 \\
\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{48}x^4 + \cdots & \\
\hline
\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{80}x^4 + \cdots & \\
-\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{72}x^4 + \cdots & \\
\hline
-\frac{1}{720}x^4 + \cdots &
\end{array}$$

Finalement on a :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4)$$

3) Pour la fonction $h(x) = \dfrac{x^2 - 4x^3}{\sin^2(x)}$ *on a le dl du dénominateur*

$v(x) = \sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + o(x^n)\right)^2 = x^2 + \cdots + o(x^n)$

la plus petite puissance qui apparaît dans ce dl est $k = 2$. *Pour trouver le dl du quotient* $h(x)$ *à l'ordre* 4 *il faut développer* $v(x)$ *jusqu'à l'ordre* $n = 4 + k = 4 + 2 = 6$.

Donc $v(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^6)$.

Ce qui donne pour tout $x \neq 0$:

$$h(x) = \frac{x^2 - 4x^3}{\sin^2(x)} = \frac{x^2 - 4x^3}{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^6)} = \frac{1 - 4x}{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4)}.$$

Ceci après simplification par x^2 *et en remarquant que* $\dfrac{o(x^6)}{x^2}$ *est un* $o(x^4)$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{\frac{o(x^6)}{x^2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^6)}{x^6} = 0\right).$$

On fait ensuite la dspc à l'ordre quatre de $(1 - 4x)$ *par* $(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45})$

$$\begin{array}{r|l}
1 - 4x & 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} \\
-1 + \frac{x^2}{3} - \frac{2x^4}{45} & \\
\hline
-4x + \frac{x^2}{3} - \frac{2x^4}{45} & 1 - 4x + \frac{x^2}{3} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{15} \\
4x - \frac{4x^3}{3} + \cdots & \\
\hline
\frac{x^2}{3} - \frac{4x^3}{3} - \frac{2x^4}{45} + \cdots & \\
-\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{9} + \cdots & \\
\hline
-\frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{15} + \cdots & \\
\frac{4x^3}{3} + \cdots & \\
\hline
\frac{x^4}{15} + \cdots &
\end{array}$$

D'où

$$h(x) = 1 - 4x + \frac{x^2}{3} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{15} + o(x^4)$$

Remarque 7.3. :

Pour développer une fonction de la forme d'un quotient $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ *à l'ordre* n *au* $V(0)$, *il faut commencer par écrire les dl de* $u(x) = P(x) + o(x^m)$ *et* $v(x) = Q(x) + o(x^m)$.

Posons $val(P) = h$ *et* $val(Q) = k$ ($val(P)$ *c'est la plus petite puissance de* x *dans le polynôme* P *dont le coefficient n'est pas nul).*

- *Si* $h \geq k$:
  il faut développer les fonctions u *et* v *à l'ordre* $m = n + k$
  $f(x) = \dfrac{a_h x^h + \cdots + a_{n+k}x^{n+k} + o(x^{n+k})}{b_k x^k + \cdots + b_{n+k}x^{n+k} + o(x^{n+k})}$
  On simplifie d'abord par x^k *(pour* $x \neq 0$ *et* $x \in V(0)$*). Ce qui donne*
  $f(x) = \dfrac{a_h x^{h-k} + \cdots + a_{n+k}x^n + o(x^n)}{b_k + \cdots + b_{n+k}x^n + o(x^n)}$
  Et on fait ensuite la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n *de* $a_h x^{h-k} + \cdots + a_{n+k}x^n$ *par* $b_k + \cdots + b_{n+k}x^n$ *pour avoir un dl correct à l'ordre* n *de* f :
  $f(x) = c_{h-k}x^{h-k} + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$.

- *Si* $h < k$:
  f *n'aura pas de développement limité au voisinage de* 0, *mais un développement limité généralisé avec* $p = k - h$.
  Et pour avoir un développement limité généralisé à l'ordre n *au voisinage de* 0, *on doit développer au départ* $v(x)$ *à l'ordre* $m = p + n + k$ *et* $u(x)$ *à l'ordre* $m' = p + n + h$.

Solution 7.6. :

- *La fonction* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-v(x))^{-\frac{1}{2}}$ *est la composée de la fonction* $v(x) = x^2$ *et* $w(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$, *donc :*
$f'(x) = w(v(x))$
Pour développer f *à l'ordre* 5 *il faut développer* f' *à l'ordre* 4.
D'abord on a $\lim\limits_{x\to 0} v(x) = 0$, *ce qui nous permet d'utiliser la règle de la composée.*
D'après le tableau des dl usuels $(1-x)^{\alpha}$ *pour* $\alpha = -\frac{1}{2}$ *:*
$w(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$
$= 1 + \dfrac{-\frac{1}{2}}{1!}x + \dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3$
$+\dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)(-\frac{1}{2}-3)}{4!}x^4 + o(x^4)$
$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o(x^4)$.
Et l'on a $v(x)$ *est un polynôme dont le dl à l'ordre 4 est* $v(x) = x^2 + o(x^4)$.
Par la règle de la composée on remplace le x *de la partie principale du dl de* $w(x)$ *par la partie principale de* $v(x)$ *:*
on aura $w(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2) + \frac{3}{8}(x^2)^2 - \frac{5}{16}(x^2)^3 + \frac{35}{128}(x^2)^4 + o(x^4)$
et on garde uniquement les puissances inférieures ou égales à quatre (tout le reste on le met dans $o(x^4)$*).*
Ainsi
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$
On utilise ensuite la règle d'intégration pour écrire
$$f(x) = a_o + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5).$$
Comme $a_o = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \arcsin(x) = 0$, *on a finalement :*
$$f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

- *On a* $g'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -f'(x)$
et d'après ce qui précède on a
$g'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$
en utilisant ensuite la règle d'intégration on obtient
$$g(x) = b_o - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$
comme $b_o = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$, *on a finalement :*
$$g(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

- *On a* $h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
On peut faire comme avant en utilisant la règle de la composée ou on peut dire que h' *est le quotient de deux polynômes qui sont déjà développés.*
On fait la division suivant les puissances croissantes de 1 *par* $1 + x^2$ *à l'ordre quatre*

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1+x^2 \\ -1-x^2 & \\ \hline & 1 - x^2 + x^4 \\ -x^2 & \\ x^2 + x^4 & \\ \hline x^4 + \cdots & \end{array}$$

D'où
$$h'(x) = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$
et par la règle d'intégration $h(x) = c_o + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$
Comme $c_o = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} \arctan(x) = 0$, *on a finalement :*
$$h(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$$

Solution 7.7. :

1. *D'abord* $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$ *et au V(0) à l'ordre* 4 *on a* $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$
Et l'on a pour $u \in V(0)$ *à l'ordre* 4 *le dl*
$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + o(u^4)$
On utilise la règle de la composée en remplaçant u *par la partie principale de* $\sin(x)$. *Ce qui donne*
$f(x) = \sqrt{1+\sin(x)}$
$= 1 + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6}x^3) - \frac{1}{8}(x - \frac{1}{6}x^3)^2 + \frac{1}{16}(x - \frac{1}{6}x^3)^3 - \frac{5}{128}(x - \frac{1}{6}x^3)^4 + o(x^4)$
On effectue les calculs et on garde uniquement les puissances inférieures ou égales à 4. Tout le reste on l'écrit $o(x^4)$. *On obtient finalement*
$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{384}x^4 + o(x^4)$$

2. *On fait la même chose qu'avant :*
d'abord $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$ *et au V(0) à l'ordre* 4 *on a* $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$
Et l'on a pour $u \in V(0)$ *à l'ordre* 4 *le dl*
$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + o(u^4)$
On utilise la règle de la composée en remplaçant u *par la partie principale de* $\sin(x)$. *Ce qui donne*
$g(x) = 1 + (x - \frac{1}{6}x^3) + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6}x^3)^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{1}{6}x^3)^3 + \frac{1}{24}(x - \frac{1}{6}x^3)^4 + o(x^4)$
On effectue les calculs et on garde uniquement les puissances inférieures ou égales à 4. Tout le reste on l'écrit $o(x^4)$. *On obtient finalement*
$$g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

3. *On fait la même chose qu'avant :*
d'abord $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\cos(x)} = 0$ *et au V(0) à l'ordre* 4 *on a*
$\dfrac{x}{\cos(x)} = \dfrac{x}{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)} = x + \dfrac{1}{2}x^3 + o(x^4)$
(ceci en faisant la dspc de x *par* $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$ *à l'ordre quatre).*
Et l'on a pour $u \in V(0)$ *à l'ordre* 4 *le dl*
$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + o(u^4)$.
On utilise la règle de la composée en remplaçant u *par la partie principale de* $\dfrac{x}{\cos(x)}$. *Ce qui donne*
$h(x) = 1 + (x+\frac{1}{2}x^3) + \frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}x^3)^2 + \frac{1}{6}(x+\frac{1}{2}x^3)^3 + \frac{1}{24}(x+\frac{1}{2}x^3)^4 + o(x^4)$
On effectue les calculs et on garde uniquement les puissances inférieures ou égales à 4. *Tout le reste on l'écrit* $o(x^4)$. *On obtient finalement*

$$h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + o(x^4)$$

4. *On transforme* $k(x)$ *pour écrire* $k(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log(1+x)}{x}} = e^{u(x)}$.
C'est une composée de fonctions.
Comme $\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$
on pose d'abord $v(x) = u(x) - 1$ *pour avoir* $\lim_{x\to 0} v(x) = 0$.
Ainsi $k(x) = e^{u(x)} = e^{1+v(x)} = e \times e^{v(x)}$ *avec* $\lim_{x\to 0} v(x) = 0$.
Le dl de $v(x)$ *à l'ordre quatre est*
$v(x) = \dfrac{\log(1+x)}{x} - 1 = \dfrac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+o(x^5)}{x} - 1$
$= (1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4+o(x^4)) - 1$
$= -\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4+o(x^4)$.
Et donc
$k(x) = e \times e^{v(x)}$
$= e \times \left[1 + (-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4)^2\right.$
$\left.+\frac{1}{6}(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4)^3 + \frac{1}{24}(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4)^4 + o(x^4)\right]$.
On Effectue les calculs et on garde uniquement les puissances inférieures ou égales à 4 *:*

$$\begin{aligned}
v(x) &= -\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{1}{4}x^3+\tfrac{1}{5}x^4+o(x^4)\\
v^2(x) &= (-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{1}{4}x^3+\tfrac{1}{5}x^4+o(x^4))^2 = \tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{13}{36}x^4+o(x^4)\\
v^3(x) &= v^2(x)\times v(x) = -\tfrac{1}{8}x^3+\tfrac{1}{4}x^4+o(x^4)\\
v^4(x) &= v^3(x)\times v(x) = \tfrac{1}{16}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

D'où

$$k(x) = e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{2447}{5760}x^4 + o(x^4)\right)$$

Solution 7.8. *:*
1) On a déjà trouvé successivement :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2-\tfrac{1}{48}x^3+\tfrac{1}{384}x^4+o(x^4)\\
g(x) &= 1+x+\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{8}x^4+o(x^4)\\
h(x) &= 1+x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{13}{24}x^4+o(x^4)\\
k(x) &= e\left(1-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{11}{24}x^2-\tfrac{7}{16}x^3+\tfrac{2447}{5760}x^4+o(x^4)\right)
\end{aligned}$$

On utilise la règle de la dérivée en dérivant les parties principales de ces développements pour avoir les développements limités à l'ordre trois. D'où

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^2+\tfrac{1}{96}x^3+o(x^3)\\
g'(x) &= 1+x-\tfrac{1}{2}x^3+o(x^3)\\
h'(x) &= 1+x+2x^2+\tfrac{13}{6}x^3+o(x^3)\\
k'(x) &= e\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{11}{12}x-\tfrac{21}{16}x^2+\tfrac{2447}{1440}x^3+o(x^3)\right)
\end{aligned}$$

2) On a $f'(x) = (\sqrt{1+\sin(x)})' = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}}$
On sait que $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$
et on a trouvé le dl de $\sqrt{1+\sin(x)}$,
ce qui donne
$f'(x) = \dfrac{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}{2(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3+o(x^3))}$
La constante du dénominateur est bien non nulle. On fait la dspc de $(1-\frac{1}{2}x^2)$ *par* $2+x-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{24}x^3$ *à l'ordre trois. On trouve*

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{96}x^3 + o(x^3).$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \cos x e^{\sin x} = (1-\tfrac{x^2}{2}+o(x^3))e^{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}\\
&= (1-\tfrac{x^2}{2}+o(x^3))\left(1+(x-\tfrac{x^3}{6})+\tfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\\
&= (1-\tfrac{x^2}{2})(1+x+\tfrac{x^2}{2}+o(x^3)) = 1+x-\tfrac{x^2}{2}+o(x^3)
\end{aligned}$$

On voit bien qu'on trouve les mêmes résultats.

Solution 7.9. *:*
1) Posons $u = x - x_o = x - 1$ $(x = 1 + u)$, *lorsque* x *est au voisinage de* 1 *alors* u *est au voisinage de* 0.
Et l'on a $f(x) = \sqrt{x} = \sqrt{1+u}$.
u *étant au voisinage de* 0, *on fait le dl de* $\sqrt{1+u}$ *au voisinage de* 0 *à l'ordre demandé* $n = 3$.
D'après les calculs précédents $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)$.
On revient ensuite à la variable x *pour avoir le développement limité de* f *au voisinage de* $x_o = 1$ *à l'ordre* $n = 3$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

2) La fonction $g(x) = \ln(\sin(x))$ *est définie et est indéfiniment dérivable sur l'intervalle* $]0,\pi[$. *La formule de Mac-Laurin en* $x_o \in]0,\pi[$ *donne*
$g(x) = g(x_o) + g'(x_o)(x-x_o) + \frac{g''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 + \frac{g^{(3)}(x_o)}{3!}(x-x_o)^3 + o((x-x_o)^3)$
Comme on a :
$g'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $g''(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$ *et* $g^{(3)}(x) = \frac{2\cos(x)}{\sin^3(x)}$,
on obtient le dl de g *au voisinage de* x_o *à l'ordre* 3 *suivant :*

$$g(x) = \ln(\sin(x_o)) + \frac{\cos(x_o)}{\sin(x_o)}(x-x_o) + \frac{-1}{2\sin^2(x_o)}(x-x_o)^2 + \frac{\cos(x_o)}{3\sin^3(x_o)}(x-x_o)^3 + o((x-x_o)^3)$$

3) Pour $x_o = \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$g(x) = -\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 + o((x - \frac{\pi}{2})^3)$$

Solution 7.10. :

1) Si f a un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n = 0$ alors il existe un voisinage $V(0)$ de 0, une fonction $\varepsilon(x)$ vérifiant $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et $a_o \in \mathbb{R}$:

$\forall x \in V(0), \quad f(x) = a_o + x^0 \varepsilon(x)$.

On aura évidemment $\lim_{x\to 0} f(x) = a_o$

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 par la fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq 0 \\ a_o & si\ x = 0 \end{cases}$$

2) Si f a un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n = 1$ alors il existe un voisinage $V(0)$ de 0, une fonction $\varepsilon_1(x)$ vérifiant $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $(a_o, a_1) \in \mathbb{R}^2$:

$\forall x \in V(0), \quad f(x) = a_o + a_1 x + x\varepsilon_1(x)$.

On aura évidemment $\lim_{x\to 0} f(x) = a_o$

et d'après la question (1), f est prolongeable par continuité par la fonction $\widetilde{f}$ et l'on aura :

$\widetilde{f}(x) = f(x) = a_o + a_1 x + x\varepsilon_1(x) = \widetilde{f}(0) + a_1 x + x\varepsilon_1(x)$ *pour tout* $x \in V(0)$ *et* $x \neq 0$.

En plus $\dfrac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x) - a_o}{x} = a_1 + \varepsilon_1(x), \ \forall x \in V(0) \setminus \{0\}$,

ce qui donne $\lim_{x\to 0} \dfrac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0} = a_1$.

Par suite f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement $\widetilde{f}$ est une fonction dérivable en 0 avec $\widetilde{f}'(0) = a_1$.

Solution 7.11. :

1) Si la fonction $f(x) = \sqrt{|x|}$ a un développement limité dans un voisinage $V(0)$ à l'ordre $n = 0$, on aurait

$\sqrt{|x|} = a_o + \varepsilon(x)$, *ce qui donne* $a_o = \lim_{x\to 0}(\sqrt{|x|} - \varepsilon(x)) = 0$.

On aurait forcément $a_o = 0$ et $\varepsilon(x) = \sqrt{|x|}$

et l'on a bien $\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} = \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Ainsi f a bien un dl à l'ordre 0 au voisinage de 0 donné par : $\sqrt{|x|} = 0 + \varepsilon(x)$.

Ensuite si $f(x) = \sqrt{|x|}$ a un développement limité dans un voisinage $V(0)$ à l'ordre $n = 1$, on aurait

$\sqrt{|x|} = a_o + a_1 x + x\varepsilon_1(x)$, *ce qui donne* $a_o = \lim_{x\to 0}(\sqrt{|x|} - a_1 x - x\varepsilon(x)) = 0$.

Il nous reste $\sqrt{|x|} = a_1 x + x\varepsilon_1(x)$ *et donc*

$1 = \dfrac{x}{\sqrt{|x|}}(a_1 + \varepsilon_1(x)) = \alpha(x)\sqrt{|x|}(a_1 + \varepsilon_1(x))$ *pour tout $x \neq 0$ au voisinage de 0*

(où $\alpha(x) = \frac{x}{|x|} = 1$ (resp.(-1) si $x > 0$ resp.$(x < 0)$)).

En passant à la limite on trouve $1 = \lim_{x\to 0} \alpha(x)\sqrt{|x|}(a_1 + \varepsilon_1(x)) = 0$

ce qui est absurde !

Par suite f ne peut avoir de dl au voisinage de 0 à l'ordre $n = 1$ (non plus à l'ordre

$n = 2$).

2) Si $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ a un dl au $V(0)$ à l'ordre $n = 0$ on aurait

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} = a_o + \varepsilon(x)$ *au $V(0)$ avec* $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

En passant à la limite on trouve

$+\infty = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} = \lim_{x\to 0}(a_o + \varepsilon(x)) = a_o$

ce qui est absurde avec $a_o \in \mathbb{R}$!

Par suite g ne peut avoir de dl au voisinage de 0 à l'ordre $n = 0$ ni à un ordre supérieur.

3) En utilisant les questions précédentes la fonction $h(x) = \ln(|x|)$ n'admet pas de dl au $V(0)$ à l'ordre $n = 0$ car on ne peut la prolonger par continuité en 0 puisque $\lim_{x\to 0} \ln(|x|) = -\infty$.

Ainsi $h(x)$ n'admet pas de dl au $V(0)$ pour $n = 0$, ni pour n quelconque.

Solution 7.12. :

1) Pour x très petit au voisinage de 0 (par exemple $|x| < \frac{1}{10^2}$) on sait que $4x^2$ et $\sin(x)$ sont très petit et la quantité $(3 - 4x^2 + \sin(x))$ est du signe de 3, donc positive.

Par suite la fonction $f(x) = |3 - 4x^2 + \sin(x)| = 3 - 4x^2 + \sin(x)$ pour tout $x \in]-a, a[= V(0)$ (avec $a > 0$ très petit).

Comme les fonctions $\sin(x)$ et le polynôme $3 - 4x^2$ ont des dl à tout ordre au $V(0)$, $f(x)$ a aussi un dl au $V(0)$ à tout ordre n donné par :

$$f(x) = 3 + x - 4x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^n)$$

avec $n = 2k + 1$ *ou* $n = 2k + 2$.

2) On a $g(x) = |x + x^3 - x^4| = |x|(|1 + x^2 - x^3|)$ et pour x très petit au voisinage de 0, on peut écrire $|1 + x^2 - x^3| = 1 + x^2 - x^3$ (même raisonnement qu'avant).

Ainsi $g(x) = |x|(1 + x^2 - x^3)$. La fonction $(1 + x^2 - x^3)$ étant un polynôme elle admet un dl sans problème.

g étant continue elle a un dl au voisinage de 0 à l'ordre $n = 0$ avec $a_o = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Ensuite si g a un dl à l'ordre $n = 1$ on aurait $g(x) = 0 + a_1 x + x\varepsilon(x) = |x|(1 + x^2 - x^3)$.

Ce qui donnerait $a_1 + \varepsilon(x) = \dfrac{|x|(1 + x^2 - x^3)}{x} = \alpha(x)(1 + x^2 - x^3)$ *avec $\alpha(x) = 1$ si $x > 0$ et $\alpha(x) = -1$ si $x < 0$.*

Par passage à la limite à droite de 0 on obtient $a_1 = 1$ et par passage à la limite à gauche de 0 on obtient $a_1 = -1$ ce qui est absurde !

Ainsi $g(x)$ a un dl au voisinage de 0 à l'ordre $n = 0$ et ne peut avoir un dl pour un ordre $n \geq 1$.

Remarque 7.4. :

La fonction g au voisinage de 0 s'écrit $g(x) = \begin{cases} P_1(x) = x(1 + x^2 - x^3) & si\ x > 0 \\ P_2(x) = -x(1 + x^2 - x^3) & si\ x < 0 \end{cases}$

C'est donc un polynôme au voisinage de 0 à droite (resp. à gauche). Elle admet un dl à tout ordre à droite (resp. à gauche).

Solution 7.13. :

Pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\begin{aligned}
& (fg)(x) = f(x)g(x) \\
= \; & \left[x^2 - 6x^4 + o(x^5)\right]\left[2x^9 + 3x^{11} + o(x^{11})\right] \\
= \; & 2x^{11} - 9x^{13} - 18x^{15} + (x^2 - 6x^4)o(x^{11}) + (2x^9 + 3x^{11})o(x^5) + o(x^5)o(x^{11}) \\
= \; & 2x^{11} - 9x^{13} - 18x^{15} + (1 - 6x^2)x^2 o(x^{11}) + (2 + 3x^2)x^9 o(x^5) + o(x^5)o(x^{11}) \\
= \; & 2x^{11} - 9x^{13} + o(x^{13})
\end{aligned}$$

Ceci car

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0} \frac{-18x^{15} + (1-6x^2)x^2 o(x^{11}) + (2+3x^2)x^9 o(x^5) + o(x^5)o(x^{11})}{x^{13}} \\
= \; & \lim_{x\to 0}(-18x^2)\frac{x^{13}}{x^{13}} + \lim_{x\to 0}\frac{(1-6x^2)o(x^{11})}{x^{11}} + \lim_{x\to 0}\frac{(2+3x^2)xo(x^5)}{x^5} \\
& + \lim_{x\to 0}\frac{x^3 o(x^5)o(x^{11})}{x^5 \times x^{11}} \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

(sachant que par définition : $\lim_{x\to 0}\frac{o(x^k)}{x^k} = 0$*).*

Finalement

$$(fg)(x) = 2x^{11} - 9x^{13} + o(x^{13})$$

Mais à cause de $\lim_{x\to 0}\frac{(1-6x^2)x^2 o(x^{11})}{x^{14}} = \lim_{x\to 0}(1-6x^2) \times \lim_{x\to 0}\left[\frac{o(x^{11})}{x^{11}} \times \frac{1}{x}\right]$ *qui est indéterminée, on ne peut dépasser l'ordre* $n = 13$

Solution 7.14. :

1) Pour donner le dl au voisinage de $+\infty$ *de la fonction* $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)$ *à l'ordre* $n = 3$ *on fait d'abord le changement de variable* $u = \frac{1}{x}$ *(et donc* $x = \frac{1}{u}$*).*

Ce qui donne $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{u}+1}{\frac{1}{u}+2}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1+u}{1+2u}}\right)$.

On fait d'abord la dspc de $(1+u)$ *par* $(1+2u)$ *à l'ordre 4 pour avoir*

$\frac{1+u}{1+2u} = 1 - u + 2u^2 - 4u^3 + 8u^4 + o(u^4)$.

On écrit ensuite

$\sqrt{\frac{1+u}{1+2u}} = \sqrt{1 - u + 2u^2 - 4u^3 + 8u^4 + o(u^4)}$

$= \sqrt{1 + [-u + 2u^2 - 4u^3 + 8u^4 + o(u^4)]}$

et on pose $v(u) = [-u + 2u^2 - 4u^3 + 8u^4 + o(u^4)]$,

comme $\lim_{u\to 0} v(u) = 0$, *on utilise le dl au voisinage de 0 de* $\sqrt{1+v}$.

On obtient alors

$\sqrt{1+v} = 1 + \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 + \frac{1}{16}v^3 - \frac{5}{128}v^4 + o(v^4)$.

On remplace v en fonction de u et on ne garde que les puissances inférieures ou égales à quatre

$$\begin{aligned}
v &= -u + 2u^2 - 4u^3 + 8u^4 + o(u^4) \\
v^2 &= u^2 - 4u^3 + 12u^4 + o(u^4) \\
v^3 &= v \times v^2 = -u^3 + 6u^4 + o(u^4) \\
v^4 &= v \times v^3 = u^4 + o(u^4)
\end{aligned}$$

D'où

$\sqrt{\frac{1+u}{1+2u}} = \sqrt{1+v} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{7}{8}u^2 - \frac{25}{16}u^3 + \frac{363}{128}u^4 + o(u^4)$

Et on arrive à

$f(x) = f(\frac{1}{u}) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1+u}{1+2u}}\right) = \arctan\left(1 - \frac{1}{2}u + \frac{7}{8}u^2 - \frac{25}{16}u^3 + \frac{363}{128}u^4 + o(u^4)\right)$.

On pose $w(u) = -\frac{1}{2}u + \frac{7}{8}u^2 - \frac{25}{16}u^3 + \frac{363}{128}u^4 + o(u^4)$. *Comme* $\lim_{u\to 0} w(u) = 0$ *on va faire le dl de* $\arctan(1+w)$ *au voisinage de 0.*

Par la formule de Mac-Laurin

$$\begin{array}{lll}
h(w) & = \arctan(1+w) & \to h(0) = \frac{\pi}{4} \\
h'(w) & = \dfrac{1}{w^2+2w+2} & \to h'(0) = \frac{1}{2} \\
h''(w) & = \dfrac{-2w-2}{(w^2+2w+2)^2} & \to h''(0) = -\frac{1}{2} \\
h^{(3)}(w) & = \dfrac{6w^2+12w+4}{(w^2+2w+2)^3} & \to h^{(3)}(0) = \frac{1}{2} \\
h^{(4)}(w) & = \dfrac{-24w(w+1)(w+2)}{(w^2+2w+2)^4} & \to h^{(4)}(0) = 0
\end{array}$$

d'où

$h(w) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{2}w^3 + o(w^4)$

On remplace w en fonction de u

$h(w) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}u + \frac{7}{8}u^2 - \frac{25}{16}u^3 + \frac{363}{128}u^4\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}u + \frac{7}{8}u^2 - \frac{25}{16}u^3 + \frac{363}{128}u^4\right)^2$
$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}u + \frac{7}{8}u^2 - \frac{25}{16}u^3 + \frac{363}{128}u^4\right)^3 + o(u^4)$

Ainsi

$f(\frac{1}{u}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}u + \frac{5}{16}u^2 - \frac{13}{32}u^3 + \frac{745}{256}u^4 + o(u^4)$.

Ce qui donne en revenant à la variable x le dl de $f(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de $+\infty$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4x} + \frac{5}{16x^2} - \frac{13}{32x^3} + \frac{745}{256x^4} + o(\frac{1}{x^4})$$

2) On fait de même pour $g(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ *à l'ordre* $n = 4$.

Avec $x = \frac{1}{u}$ *on a* $g(\frac{1}{u}) = (1+u)^{\frac{1}{u}} = e^{\frac{\ln(1+u)}{u}}$.

On sait que

$\log(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 + o(u^5)$ *à l'ordre 5.*

On a développé à l'ordre cinq parce qu'il y aura simplification et on aura

$\frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 + o(u^5)}{u} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{3}u^2 - \frac{1}{4}u^3 + \frac{1}{5}u^4 + o(u^4)$.

qui est un développement limité à l'ordre quatre.

Ensuite on a

$g(\frac{1}{u}) = e^{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{3}u^2 - \frac{1}{4}u^3 + \frac{1}{5}u^4 + o(u^4)} = e \times e^{-\frac{1}{2}u + \frac{1}{3}u^2 - \frac{1}{4}u^3 + \frac{1}{5}u^4 + o(u^4)}$

On choisit de poser $v = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{3}u^2 - \frac{1}{4}u^3 + \frac{1}{5}u^4 + o(u^4)$

ceci car $\lim_{u\to 0} v = 0$, *pour utiliser ensuite le dl de* e^v *au* $V(0)$.

Comme $e^v = 1 + v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{24}v^4 + o(v^4)$,

on remplace et on fait les calculs en fonction de u et l'on a

$g(\frac{1}{u}) = e\left(1 - \frac{1}{2}u + \frac{11}{24}u^2 - \frac{21}{48}u^3 + \frac{1423}{5760}u^4 + o(u^4)\right)$

On revient finalement à la variable x pour avoir le dl de $g(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de l'infini.

$$g(x) = e\left(1 - \frac{1/2}{x} + \frac{11/24}{x^2} - \frac{21/48}{x^3} + \frac{1423/5760}{x^4} + o(\frac{1}{x^4})\right)$$

Solution 7.15. :

1) La fonction $f(x) = \frac{x}{\tan(x^2)}$ *est un quotient de la forme* $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ *avec* $u(x)$ *un polynôme déjà développé et sa plus petite puissance est* 1 *(sa valuation).*
Le développement de $\tan(x)$ *commence par le monôme* x *et donc le dl de* $\tan(x^2)$ *commence par* x^2.
Il faut donc multiplier $f(x)$ *par* x^p *avec* $p = 1$ *(pour pouvoir simplifier par* x^2*) :*
$xf(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + \cdots + o(x^k)} = \dfrac{1}{1 + \cdots + o(x^{k-2})}$.
Ensuite il faut développer $xf(x)$ *à l'ordre* $k = p + 5 = 1 + 5 = 6$.
Ce qui signifie qu'il faut développer $\tan(x^2)$ *à l'ordre* $k + 2 = 8$ *(à cause du* x^2 *simplifié).*
Et donc développer $\tan(x)$ *à l'ordre* 4.
D'après le tableau des dl usuels :
$\tan(y) = y + \frac{1}{3}y^3 + o(y^4)$
et par suite $\tan(x^2) = x^2 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^8)$
d'où $xf(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^8)} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^6)}$
Par la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 6 on obtient :
$xf(x) = 1 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^6)$.
Finalement on a le développement généralisé au voisinage de 0 *à l'ordre cinq suivant :*

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x^3 + o(x^5).$$

2) Pour $g(x) = \dfrac{e^x - \cos(x)}{x^2 \sin(x)} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$
On a :
$u(x) = e^x - \cos(x)$
$= (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + o(x^m)) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + o(x^m))$
$= x + x^2 + \cdots + o(x^m)$
et $v(x) = x^2 \sin(x) = x^2(x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots + o(x^h)) = x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots + o(x^{h+2})$
On voit que $u(x)$ *commence par* x *et* $v(x)$ *par* x^3, *il faut donc multiplier* $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ *par* x^2 *pour pouvoir ensuite simplifier par* x^3.
Ainsi $p = 2$.
Et on va développer $v(x)$ *à l'ordre* $p + n + 3 = 2 + 2 + 3 = 7$ *(on ajoute trois puisqu'on va simplifier par* x^3*)*
et $x^2u(x)$ *à l'ordre 7 aussi, donc* $u(x)$ *à l'ordre 5.*
$v(x) = x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{120}x^7 + o(x^7)$
et $u(x) = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$.
Ce qui donne
$x^2g(x) = \dfrac{x^2u(x)}{v(x)} = \dfrac{x^3 + x^4 + \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{120}x^7 + o(x^7)}{x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{120}x^7 + o(x^7)}$
$= \dfrac{1 + x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)}$
$= 1 + x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{18}x^4 + o(x^4)$.
Et finalement, on obtient le développement généralisé de $g(x)$ *au voisinage de* 0 *à l'ordre deux :*

$$g(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{18}x^2 + o(x^2)$$

Solution 7.16. *:*
On a

1) $a = \sqrt[3]{0,98} = (1 - 0,02)^{\frac{1}{3}}$
On utilise le dl au $V(0)$ *de* $(1 - x)^\alpha$ *avec* $\alpha = \frac{1}{3}$
$(1 + (-x))^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x + o(x)$
avec $x = 0,02$ *qui est une valeur au voisinage de* 0, *on a :*
$a \approx 1 - \frac{1}{3}(0,02)$ *et donc* $a \approx 0,993$.

2) $b = \ln(1,07) = \ln(1 + 0,07)$
sachant que $\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ *au* $V(0)$ *et avec* $x = 0,07$ *on a*
$b \approx 0,07 - \frac{1}{2}(0,07)^2$ *et donc* $b \approx 0,067$.

3) Posons $d = 1 - \sin(0,05) \approx 1 - 0,05 = 0,95$
et $e = \sqrt{25,5} = \sqrt{25 + 0,5} = 5\sqrt{1 + \frac{0,5}{25}} = 5\sqrt{1 + 0,02}$
donc $e \approx 5(1 + \frac{1}{2}(0,02)) = 5,05$
par suite $c = \frac{d}{e} \approx 0,188$.

Remarque 7.5. *Pour avoir plus de précision il faut augmenter l'ordre des développements limités.*

Solution 7.17. *:*
1) On a pour $x \in V(0)$ *les dl suivants :*
$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
$sh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
Pour $x \in V(0)$ *et* $x > 0$ *on écrit donc*
$\sqrt{\sin(x)} = \sqrt{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \sqrt{x}\sqrt{1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)}$
En posant $v(x) = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$ *et en passant par le dl de* $\sqrt{1 + v}$ *à l'ordre deux on trouve*
$\sqrt{\sin(x)} = \sqrt{x}(1 - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2))$.
Et de même
$\sqrt{sh(x)} = \sqrt{x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)}$
En posant $v(x) = \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$ *et en passant par le dl de* $\sqrt{1 + v}$ *à l'ordre deux on trouve*
$\sqrt{sh(x)} = \sqrt{x}(1 + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2))$.
D'où l'expression de f *au voisinage de* 0

$$f(x) = \sqrt{\sin(x)} - \sqrt{sh(x)} = \sqrt{x}(-\frac{1}{6}x^2 + o(x^2))$$

équivalente à $f(x) = -\frac{1}{6}x^{\frac{5}{2}} + o(x^{\frac{5}{2}})$.
La partie principale de $f(x)$ *au voisinage de* 0 *à droite est* $-\frac{1}{6}x^{\frac{5}{2}}$ *(c'est un équivalent à* $f(x)$*).*

Remarque 7.6. *Heureusement les développements limités à l'ordre trois ont été suffisants pour obtenir la partie principale.*
L'ordre du dl doit être assez grand pour faire l'affaire. L'ordre un ou deux pour $\sin(x)$ *ne suffisent pas.*

2) *Au voisinage de 0 on a les dl suivants :*

$$\begin{aligned}
(\operatorname{argsh}(u))' &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+u^2}}\\
&= \sqrt{1-u^2+u^4-u^6+o(u^6)}\\
&\quad (\text{ceci car } \tfrac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\cdots+o(t^k))\\
&= 1-\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{3}{8}u^4-\tfrac{5}{16}u^6+o(u^6)\\
&\quad (\text{en passant par le dl de } \sqrt{1+s})
\end{aligned}$$

On utilise ensuite la règle d'intégration (sachant que $\operatorname{argsh}(0)=0$*) pour obtenir*

$$\operatorname{argsh}(u) = u - \frac{1}{6}u^3 + \frac{3}{40}u^5 - \frac{5}{112}u^7 + o(u^7)$$

Et l'on a aussi

$$\begin{aligned}
(\operatorname{argth}(v))' &= \frac{1}{1-v^2}\\
&= 1+v^2+v^4+v^6+o(v^6)\\
&\quad (\text{ceci car } \tfrac{1}{1-t} = 1+t+t^2+t^3+\cdots+o(t^k))
\end{aligned}$$

On utilise ensuite la règle d'intégration (sachant que $\operatorname{argth}(0)=0$*) pour obtenir*

$$\operatorname{argth}(v) = v + \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + \frac{1}{7}v^7 + o(v^7)$$

Puisque $\lim\limits_{u\to 0}\operatorname{argsh}(u) = \lim\limits_{v\to 0}\operatorname{argth}(v) = 0$, *on utilise la règle de composition pour avoir les dl de* $\operatorname{argth}(\operatorname{argsh}(x))$ *et* $\operatorname{argsh}(\operatorname{argth}(x))$
$\operatorname{argth}(\operatorname{argsh}(x)) = \operatorname{argth}(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{112}x^7+o(x^7))$
On remplace ensuite le v *du dl de* $\operatorname{argth}(v)$ *par la partie principale de* $\operatorname{argsh}(x)$. *On on effectue les calculs des puissances et on ne garde que celles inférieures ou égales à 7.*
On obtient

$$\operatorname{argth}(\operatorname{argsh}(x)) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{120}x^5 + \frac{173}{5040}x^7 + o(x^7)$$

Et de la même façon on a

$$\operatorname{argsh}(\operatorname{argth}(x)) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{120}x^5 + \frac{341}{5040}x^7 + o(x^7)$$

d'où

$$g(x) = \operatorname{argth}(\operatorname{argsh}(x)) - \operatorname{argsh}(\operatorname{argth}(x)) = \frac{-1}{30}x^7 + o(x^7)$$

La partie principale de $g(x)$ *est donc* $-\frac{1}{30}x^7$.

Solution 7.18. :

1. *Posons* $f(x) = \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \dfrac{u(x)}{x}$.
   On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *est indéterminée. On va utiliser les dl pour essayer de la déterminer.*
   L'ordre du dl doit être assez grand pour enlever l'indétermination.
   On a
   $u(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} - e = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e$,
   d'après les exercices précédents on a déjà vu que

$k(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2)+o(x^2)$
et donc $u(x) = k(x) - e = e(-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2)+o(x^2)$
ce qui donne $f(x) = e(-\frac{1}{2}+\frac{11}{24}x)+o(x)$
après simplification par x *(ceci pour* $x\in V(0)$ *et* $x\neq 0$*).*
D'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} = \lim_{x\to 0} e(-\frac{1}{2}+\frac{11}{24}x)+o(x) = -\frac{1}{2}e$$

2. *Posons* $g(x) = x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})$.
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ *est indéterminée.*
   En utilisant les dl on a :
   faisons le changement de variable $x = \frac{1}{u}$. *Ce qui donne*
   $g(x) = \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\ln(1+u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}(u-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)) = \frac{1}{2}+o(1)$
   (avec $\lim\limits_{u\to 0} o(1) = 0$*).*
   D'où

$$\lim_{x\to+\infty} x - x^2\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{u\to 0^+}(\frac{1}{2}+o(1)) = \frac{1}{2}$$

3. *La limite* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\arctan(2\sin(x))-\frac{\pi}{4}}{\cos(3x)}$ *est indéterminée.*
   La fonction $h(x) = \arctan(2\sin(x))$ *est une composée de fonctions indéfiniment dérivables. On utilise la formule de Mac-Laurin pour calculer son développement limité au voisinage de* $\frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}
h(x) &= \arctan(2\sin(x)) && \to\quad h(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\pi}{4}\\
h'(x) &= \frac{2\cos(x)}{1+4\sin^2(x)} && \to\quad h'(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\\
h''(x) &= \frac{-18\sin(x)+8\sin^3(x)}{(1+4\sin^2(x))^2} && \to\quad h''(\tfrac{\pi}{6}) = -2
\end{aligned}$$

D'où
$h(x) = h(\frac{\pi}{6}) + h'(\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}h''(\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{6})^2 + o((x-\frac{\pi}{6})^2)$
c'est à dire

$$h(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6}) - (x-\frac{\pi}{6})^2 + o((x-\frac{\pi}{6})^2)$$

De même par la formule de Mac-Laurins on obtient
$\cos(3x) = -3(x-\frac{\pi}{6}) + o((x-\frac{\pi}{6})^2)$
Doù

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\arctan(2\sin(x))-\frac{\pi}{4}}{\cos(3x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})-(x-\frac{\pi}{6})^2+o((x-\frac{\pi}{6})^2)}{-3(x-\frac{\pi}{6})+o((x-\frac{\pi}{6})^2)}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-(x-\frac{\pi}{6})+o((x-\frac{\pi}{6}))}{-3+o((x-\frac{\pi}{6}))} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-3} = -\frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

4. *La limite* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[e-(1+\frac{1}{n})^n\right]^{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}$ *est indéterminée.*
   Posons $u_n = \left[e-(1+\frac{1}{n})^n\right]^{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}$
   et $v_n = \ln(u_n) = (\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})\ln\left[e-(1+\frac{1}{n})^n\right]$
   Faisons le changement de variable suivant $y = \frac{1}{n}$ *(donc* $n = \frac{1}{y}$*).*
   Lorsque $n\to+\infty$ *la variable* y *se trouve au voisinage de* 0^+. *On écrit donc*
   $(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}) = \left(\sqrt{\frac{1}{y^2}+2}-\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}\right)$

$= \frac{1}{y}\left(\sqrt{1+2y^2} - \sqrt{1+y^2}\right) = \frac{1}{y}\left((1+y^2+o(y^2)) - (1+\frac{1}{2}y^2+o(y^2))\right)$
$= \frac{1}{2}y + o(y).$

Et l'on a aussi

$$\begin{aligned}\ln\left[e - (1+\tfrac{1}{n})^n\right] &= \ln\left[e - e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}\right] = \ln\left[e - e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)}\right]\\ &= \ln\left[e - e^{1-\frac{1}{2}y+o(y)}\right] = \ln\left[e(1-e^{-\frac{1}{2}y+o(y)})\right]\\ &= \ln\left(e\left[1-(1-\tfrac{1}{2}y+o(y))\right]\right) = \ln\left(e\left[\tfrac{1}{2}y+o(y)\right]\right)\end{aligned}$$

Par suite on a

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\sqrt{\tfrac{1}{y^2}+2} - \sqrt{\tfrac{1}{y^2}+1}\right)\ln\left[e - e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)}\right]$$
$$= \lim_{y\to 0^+}\left(\tfrac{1}{2}y+o(y)\right)\ln\left(e\left[\tfrac{1}{2}y+o(y)\right]\right)$$
$$= \lim_{y\to 0^+}\left(\tfrac{1}{2}y\right)\ln\left(e\left[\tfrac{1}{2}y\right]\right) = 0,$$

ceci car $\lim_{y\to 0^+} y\ln(ay) = 0$ $(\frac{e}{2} = a > 0)$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

et que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^0 = 1$$

Solution 7.19. :

1) Pour étudier $f(x) = \dfrac{2x\ln(x)}{x-1}$ *au voisinage de* $x_o = 1$ *on utilise les développements limités.*

En posant $u = x-1$ *(et donc* $x = u+1$*), on écrit*

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2(1+u)\ln(1+u)}{u} = \frac{2(1+u)(u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+o(u^3))}{u}\\ &= 2(1+u)(1-\tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{3}u^2+o(u^2))\\ &= 2+u-\tfrac{1}{3}u^2+o(u^2)\\ &= 2+(x-1)-\tfrac{1}{3}(x-1)^2+o((x-1)^2)\end{aligned}$$

On a donc les résultats suivants :

- *f est prolongeable par continuité en* $x_o = 1$ *en posant* $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$,
- *son prolongement est dérivable en 1 et* $f'(1) = 1$ *(le coefficient de* $(x-1)$ *dans le dl),*
- *l'équation de la tangente en 1 est* $y = 2+(x-1) = x+1$.

En plus, $f(x) - y \approx -\frac{1}{3}(x-1)^2$, *qui est négatif au voisinage de* $x_o = 1$. *La tangente est donc au dessus de la courbe.*

2) Pour étudier $g(x) = \ln(\tan(x))$ *au voisinage de* $\frac{\pi}{4}$ *on utilise encore les développements limités.*

En posant $u = x - \frac{\pi}{4}$ *(et donc* $x = u + \frac{\pi}{4}$*), on écrit*

$$\begin{aligned}g(x) &= \ln(\tan(x)) = \ln(tan(u+\tfrac{\pi}{4})) = \ln(\frac{1+\tan(u)}{1-\tan(u)})\\ &= \ln(\frac{1+u+\frac{1}{3}u^3+o(u^3)}{1-u-\frac{1}{3}u^3+o(u^3)})\\ &= \ln(1+2u+2u^2+\tfrac{8}{3}u^3+o(u^3))\\ &= 2u+\tfrac{4}{3}u^3+o(u^3)\\ &= 2(x-\tfrac{\pi}{4})+\tfrac{4}{3}(x-\tfrac{\pi}{4})^3+o((x-\tfrac{\pi}{4})^3)\end{aligned}$$

On a donc les résultats suivants :

- *g est définie et continue en* $\frac{\pi}{4}$, $g(\frac{\pi}{4}) = \ln(1) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} g(x)$.
- *g est dérivable en* $\frac{\pi}{4}$ *et* $g'(\frac{\pi}{4}) = 2$ *(le coefficient de* $(x-\frac{\pi}{4})$ *dans le dl),*
- *l'équation de la tangente en* $\frac{\pi}{4}$ *est* $y = 2(x-\frac{\pi}{4})$.

En plus, $g(x) - y \approx \frac{4}{3}(x-\frac{\pi}{4})^3$, *qui est négatif à gauche de* $\frac{\pi}{4}$ *et positif à droite. La tangente est donc au dessus de la courbe à gauche de* $\frac{\pi}{4}$ *et au dessous à droite.*

Solution 7.20. :

$f(x) = \ln(x^2+1) - \frac{1}{x}$ *Pour étudier les branches infinies on a :*

1) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

Ce qui permet de dire que la droite $x = 0$ *est asymptote verticale à* C *la courbe de* f.

2) Au voisinage de $+\infty$ *ou* $-\infty$, *on pose* $x = \frac{1}{u}$. *On aura donc*

$$f(x) = f(\tfrac{1}{u}) = \ln(\frac{u^2+1}{u^2}) - u = \ln(u^2+1) - 2\ln|u| - u.$$

Pour x *au voisinage de l'infini on a* u *au voisinage de 0, on utilise les développements limités et l'on obtient :*

$$f(x) = u^2 + o(u^2) - 2\ln|u| - u = -u - 2\ln|u| + o(u) = -\frac{1}{x} + 2\ln|x| + o(\frac{1}{x}).$$

Ce qui montre qu'au voisinage de $+\infty$, *la courbe* C *est asymptote par dessous à* C' *représentant la fonction* $2\log|x|$.

Et qu'au voisinage de $-\infty$, *la courbe* C *est asymptote par dessus à* C'' *représentant la fonction* $2\log(-x)$.

7.4 Des exercices supplémentaires

Exercice 7.21. :
Former le développement limité de $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ *à droite puis à gauche de* 0 *à l'ordre* 5.

Exercice 7.22. :
Déterminer le nombre λ *pour que la fonction* $f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x-1} - \sqrt{x^2+\lambda x+1}$ *admette* 0 *pour limite lorsque* x *tend vers* $+\infty$.
Donner dans ce cas un équivalent à f *au voisinage de* $+\infty$.

Exercice 7.23. :
Calculer le développement limité au voisinage de 0, *à l'ordre* n *indiqué, des fonctions suivantes :*
1) $f_1(x) = \sqrt{x(\sin(x) + sh(x) - 2x)}$ *et* $n = 9$.
2) $f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x}{\tan(x)}}\right)$ *et* $n = 4$.
3) $f_3(x) = (1+x)^x$ *et* $n = 4$.
4) $f_4(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan(x)}}\right)$ *et* $n = 5$.

Exercice 7.24. :
Dans chacun des cas suivants, déterminer les nombres a *et* b *pour que le développement limité de la fonction donnée soit un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible et en donner sa partie principale.*
1) $f(x) = \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$.
2) $g(x) = \sin(x) - \frac{x+ax^3}{1+bx^2}$.
(la valuation de la partie principale doit être aussi élevée que possible).

Exercice 7.25. :
Trouver les réels a *et* b *pour que la partie principale au voisinage de* 0 *de la fonction* $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{\ln(1+x)} - \frac{b}{e^x-1}$ *soit de valuation maximale.*

Exercice 7.26. :
Calculer le développement limité au voisinage de x_o, *à l'ordre* n *indiqué, des fonctions suivantes :*
1) $f_1(x) = \ln(x)$ *avec* $x_o = 2$ *et* $n = 4$.
2) $f_2(x) = \cos(\sqrt{x})$ *avec* $x_o = \pi^2$ *et* $n = 3$.
3) $f_3(x) = x^x$ *avec* $x_o = \sqrt{2}$ *et* $n = 4$.
4) $f_4(x) = \exp\left(\frac{1}{1-\sin(x)}\right)$ *avec* $x_o = \frac{\pi}{4}$ *et* $n = 3$.
5) $f_5(x) = \text{sh}(x) - \ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|$ *avec* $x_o = 0$ *et* $n = 3$.

Exercice 7.27. :
Calculer le développement limité généralisé au voisinage de 0, *à l'ordre* n *indiqué, des fonctions suivantes :*
1) $f_1(x) = \frac{\sqrt{x(\sin(x) + \text{sh}(x))}}{\cos^2(x) - \text{ch}^2(x)}$ *et* $n = 4$.
2) $f_2(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^4}\sqrt{\frac{\text{sh}(x)}{x-\tan(x)}}$ *et* $n = 5$.
3) $f_3(x) = \frac{\arccos(x)}{\text{argsh}(x) - \arcsin(x)}$ *et* $n = 4$.
4) $f_4(x) = \frac{\cos(x)}{\ln(1+x)}$ *et* $n = 5$.

Exercice 7.28. :
On pose $f(x) = |x|^{\frac{9}{5}}\sin(\frac{1}{x})$, *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$. *Étudier la continuité, la dérivabilité et l'existence d'un développement limité de* f *au voisinage de* 0.

Exercice 7.29. :
Calculer les limites suivantes :
1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{(\sin x)^4}\left[\sin(\frac{x}{1-x}) - \frac{\sin x}{1-\sin x}\right]$.
2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x(1+\cos(x)) - 2\tan(x)}{2x - \sin(x) - \tan(x)}$.
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\text{ch}(x))^{\text{sh}(x)} - (\text{sh}(x))^{\text{ch}(x)}\right)$.
4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(\ln(x)) - \sqrt{|\ln(\sin(\frac{\pi}{2}x))|}}{x-1}$.

Exercice 7.30. :
Étudier les branches infinies des courbes représentant les fonctions suivantes :
1) $f(x) = x^2\ln|\frac{x+1}{x}|$.
2) $g(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x^2-3x+2}}$.
3) $h(x) = \frac{x}{\ln|\frac{1+x}{1-x}|}$.
4) $k(x) = \sqrt{x^4-x^2+x-1} - (x+1)\sqrt{x^2+1}$.

Exercice 7.31. :
Déterminer les parties principales au voisinage de 0 *des fonctions suivantes :*
1) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{\sin(x) - \tan^2(x)}}$ *pour* $x > 0$.
2) $g(x) = \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{\tan(x)}$ *pour* $x > 0$.

Exercice 7.32. :
Déterminer un équivalent au voisinage de $+\infty$ *des fonctions ci-dessous :*
1) $f(x) = x\left[\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right]$.
2) $g(x) = \frac{x^2\arctan(x) - \frac{\pi}{2}x^2}{2\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{4x^2-1}}$.

3) $h(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x}\sqrt{x^4+1}\right) \ln\left[e - (1+\frac{1}{x})^x\right]$.

Exercice 7.33. :
Calculer les limites des suites de termes généraux suivants :
1) $u_n = \left(\cos(\frac{n\pi}{3n+1}) + \sin(\frac{n\pi}{6n+1})\right)^n$.
2) $v_n = \left(3.2^{\frac{1}{n}} - 2.3^{\frac{1}{n}}\right)^n$.

7.5 Indications sur les exercices supplémentaires

Solution 7.21. :
Pour donner le dl de $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ *à droite puis à gauche de* 0 *à l'ordre* $n = 5$ *il suffit de prendre le dl de* $\sqrt{1-v}$ *au* $V(0)$ *à l'ordre deux et de remplacer* v *par* x^2 *(ça suffit).*
Étudier ensuite le cas $x > 0$ *et le cas* $x < 0$.

Solution 7.22. :
Faire le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ *et utiliser le dl de* $(1+v)^\alpha$ $(\alpha = \frac{1}{3}$ *et ensuite* $\alpha = \frac{1}{2})$.

Solution 7.23. :
1) Utiliser le tableau des dl usuels pour calculer le dl de $(\sin(x) + sh(x) - 2x)$ *à l'ordre* 8, *on aura donc le dl de* $x(\sin(x) + sh(x) - 2x)$ *à l'ordre* 9.
Factoriser et passer par le dl de $(1+v)^\alpha$.

2) La fonction $\dfrac{x}{\tan(x)}$ *est un quotient dans lequel on simplifie d'abord par* x *(les dl obtenus). Il faut donc développer* $\tan(x)$ *à l'ordre cinq.*
On simplifie et on calcule le dl à l'ordre quatre.
On utilise la règle de la composée en passant par le dl de $(1+v)^{\frac{1}{2}}$.
Puisque $\cos(\frac{\pi}{2}+u) = -\sin(u)$ *on passe par le dl de* $\sin(u)$ *et la règle de la composée.*

3) On écrit que $f_3(x) = (1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$ *et on utilise le dl de* $\ln(1+x)$ *à l'ordre trois, pour avoir le développement limité de* $x\ln(1+x)$ *à l'ordre quatre.*
On compose ensuite avec le dl de e^v.

4) On fait d'abord le dl de $\tan(x)$ *à l'ordre 6, puis on simplifie pour avoir le dl de* $\dfrac{x}{\tan(x)} = u$ *à l'ordre 5.*
On utilise le dl de $w = (1+v)^{\frac{1}{2}}$ *avec* $v = u - 1$.
Puis on utilise le dl de $\arccos(w)$ *au* $V(1)$ *(ou* $\arccos(1+w')$ *au* $V(0)$ *avec* $w' = w - 1$*).*

Solution 7.24. :
1) On calcule les dl de $\cos(x)$ *et* $\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$, *puis celui de* $f(x)$.
Et on essaie de trouver a *et* b *pour que les coefficients des premières puissances qui apparaissent dans le dl de* $f(x)$ *soient nuls.*
On donne ensuite la partie principale.

2) Même chose que précédemment.

Solution 7.25. :
Faire le dl de $xf(x) = x\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{\ln(1+x)} - \dfrac{b}{e^x-1}\right)$ *au* $V(0)$.
Donner ensuite le dl généralisé de $f(x)$.

Essayer de trouver a et b pour que ce dl soit un polynôme de valuation maximale.

Solution 7.26. :
1) Pour $f_1(x) = \ln(x)$ *avec* $x_o = 2$ *et* $n = 4$ *faire le changement de variable* $x = 2 + u$ $(u \in V(0))$ *pour avoir* $f_1(x) = \ln(2) + \ln(1 + \frac{u}{2})$ *et utiliser le dl de* $\ln(1+v)$.

2) Poser $x = u + \pi^2$ *et faire le dl de* $\sqrt{u+\pi^2} = \pi\sqrt{1+\frac{u}{\pi^2}}$.
Passer par le dl de $\sqrt{1+v}$ *en ensuite par celui du cosinus sachant que* $\cos(\pi + t) = -\cos t$.

3) Écrire que $x^x = e^{x\ln x}$. *Faire le changement de variable* $x = u + \sqrt{2}$. *Écrire que* $\ln(u+\sqrt{2}) = \ln\sqrt{2} + \ln(1+\frac{u}{\sqrt{2}})$. *Passer par le développement de* $\ln(1+t)$. *Utiliser ensuite le développement de* $e^{a+s} = e^a e^s$.

4) Faire le changement de variable $x = u + \frac{\pi}{4}$ *pour avoir* $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin u + cos u)$.
Utiliser ensuite les développements des fonctions usuelles.

5) Remarquer qu'au voisinage de $x_o = \frac{\pi}{4}$ *la fonction* $\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})$ *est strictement positive et l'on peut donc travailler sans valeur absolue.*
Utiliser la formule $\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}) = \frac{1+\tan\frac{\pi}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{2}}$.
Utiliser ensuite les développements limités des fonctions usuelles.

Solution 7.27. :
1) Remarquer que le dl de $u(x) = (\sin(x) + sh(x))$ *commence par la puissance* x, *donc* $x(\sin(x)+sh(x))$ *commence par* x^2 *et* $\sqrt{(\sin(x)+sh(x))}$ *commence par* x *(pour* $x > 0$*). Il faut donc multiplier le quotient* $\dfrac{x+\cdots}{x^2+\cdots}$ *par* x^p $(p = 1)$ *pour simplifier ensuite par* x^2.
Il faut commencer le dl de $v(x)$ *à l'ordre* $p + n + 2 = 7$ *et* $u(x)$ *à l'ordre* 6.

2) Remarquer que le rapport $\dfrac{1-\cos(x)}{x^4} = \dfrac{\frac{1}{2}x^2+\cdots}{x^4}$ *doit être multiplié par* x^2 $(p_1 = 2)$ *pour simplifier le* x^4.
Et le rapport $\dfrac{sh(x)}{x - tg(x)} = \dfrac{x+\cdots}{-\frac{1}{3}x^3+\cdots}$ *doit être multiplié par* x^2 *pour simplifier par* x^3 *et donc multiplier* $\sqrt{\dfrac{sh(x)}{x-tg(x)}}$ *par* x $(p_2 = 1)$ *à cause de la racine.*
Par suite $p = p_1 + p_2 = 3$.
Développer ensuite $x^3 f_2(x)$ *à l'ordre 4 demandé (après simplifications).*

3) Faire les dl de $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} + \cdots$ *(voir tableau ou passer par la dérivée) et* $\operatorname{argsh}(x) - \arcsin(x) = (x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots) - (x + \frac{1}{6}x^3 + \cdots) = -\frac{1}{3}x^3 + \cdots$ *(voir les solutions précédentes).*
Remarquer qu'il faut multiplier $f_3(x) = \dfrac{\frac{\pi}{2}+\cdots}{-\frac{1}{3}x^3+\cdots}$ *par* x^3 $(p = 3)$ *pour simplifier le* x^3.

Faire ensuite le dl de $x^3 f_3(x)$ *à l'ordre 4 après simplification.*

4) On a $f_4(x) = \dfrac{\cos(x)}{\ln(1+x)} = \dfrac{1-\frac{1}{2}x^2+\cdots}{x-\frac{1}{2}x^2+\cdots}$, *donc il faut multiplier* $f_4(x)$ *par* x.
Faire ensuite le dl de $xf_4(x)$ *(après simplification).*

Solution 7.28. :
Vérifier que $f(x) = 0 + 0x + x\varepsilon_1(x)$ *avec* $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$ *(sachant que* $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$*) et que l'on ne peut écrire* $f(x) = 0 + 0x + a_2x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$ *avec* $\lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$ *(sachant que* $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ *n'existe pas).*
Utiliser les exercices déjà solutionnés pour conclure.

Solution 7.29. :
Pour calculer les limites faire les dl à des ordres suffisants pour éliminer les indéterminations.
1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sin x)^4}\left[\sin(\frac{x}{1-x}) - \frac{\sin x}{1-\sin x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{\sin^4(x)} = -\frac{1}{6}$.
Il suffit de développer $\left[\sin(\frac{x}{1-x}) - \dfrac{\sin x}{1-\sin x}\right]$.
2) On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1+\cos(x)) - 2\tan(x)}{2x - \sin(x) - \tan(x)} = 7$.
Faire les dl de $\cos(x)$, $\tan(x)$ *et* $\sin(x)$ *à l'ordre trois.*

3) Écrire que $ch(x)^{sh(x)} = e^{sh(x)\ln(ch(x)}$ *et* $sh(x)^{ch(x)} = e^{ch(x)\ln(sh(x)}$.
Poser ensuite $u = e^{-x}$ $(x \in V(+\infty)$ *donc* $u \in V(0))$ *et utiliser les dl au voisinage de* 0.
Poser $v = u\ln(u)$ $(v \in V(0))$,
on aura $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left((ch(x))^{sh(x)} - (sh(x))^{ch(x)}\right) = -\infty$.

4) Poser $u = x - 1$ *et utiliser* $\ln(\sin(\frac{\pi}{2}x)) = \ln*(\cos(\frac{\pi}{2}u))$.
Vérifier que $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{\sin(\ln(1+u))}{u} = 1$
et que $\displaystyle\lim_{u\to 0^+}\frac{\sqrt{|\ln(\cos(\frac{\pi}{2}u))|}}{u} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
et $\displaystyle\lim_{u\to 0^-}\frac{\sqrt{|\ln(\cos(\frac{\pi}{2}u))|}}{u} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.
En déduire que
$\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(\ln(x)) - \sqrt{|\log(\sin(\frac{\pi}{2}x))|}}{x-1} = 1 + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{\sin(\ln(x)) - \sqrt{|\log(\sin(\frac{\pi}{2}x))|}}{x-1} = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Solution 7.30. :
Pour étudier les branches infinies utiliser les dl pour avoir un équivalent simple :
1) Avec $u = \frac{1}{x}$ *on a pour* x *au* $V(\pm\infty)$
$f(x) = x^2\ln|\dfrac{x+1}{x}| = x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})$ *puisque* $1 + \frac{1}{x} \geq 0$ $(\frac{1}{x} \in V(0))$.

Et donc $f(x) = \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + o(1)$.

2) Remarquer que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.
Étudier les limites en 1 et en 2 pour déterminer les asymptotes verticales.
Au $V(\infty)$ *poser* $u = \frac{1}{x}$ *pour avoir*
$g(x) = x - 1 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.

3) Vérifier que $\ln|\frac{1+x}{1-x}| = 2x + o(x)$ *et qu'on n'a pas de branches infinies en 0.*
Poser ensuite $u = \frac{1}{x}$ *et faire les dl pour* $u \in V(0)$ *pour avoir*
$h(x) = \frac{1}{2u^2} - \frac{1}{6} - \frac{2u^2}{45} + o(u^2)$.
En déduire que la courbe de h *est asymptote à la parabole d'équation* $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}$ *et préciser les positions relatives.*

4) Poser $u = \frac{1}{x}$ *pour avoir*
Si $x \in V(+\infty)$ *donc* $u \in V(0^+)$ *et*
$k(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + x - 1} - (x+1)\sqrt{x^2+1} = -\frac{1}{u} - 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$
$= -x - 1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$.
Donc la courbe de $k(x)$ *a pour asymptote au voisinage de* $+\infty$ *la droite d'équation* $y = -x - 1$,
puis étudier sa position relative.
Si $x \in V(-\infty)$ *donc* $u \in V(0^-)$ *et*
$k(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + x - 1} - (x+1)\sqrt{x^2+1} = \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u} + u + o(u)$
$= 2x^2 + x + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.
Donc la courbe de $k(x)$ *a pour asymptote au voisinage de* $-\infty$ *la parabole d'équation* $y = 2x^2 + x$,
puis étudier sa position relative.

Solution 7.31. :
1) Écrire que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin(x) - \tan^2(x)}} = x^{-1/3}\left(\frac{1}{\frac{\sin(x) - \tan^2(x)}{x}}\right)^{1/3}$$

Utiliser les dl pour avoir $\left(\frac{1}{\frac{\sin(x) - \tan^2(x)}{x}}\right)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$
et $f(x) = (x - x^{1/2})x^{-1/3}(1 + \frac{x}{3} + o(x)) = -x^{1/6} + o(x^{1/6})$.

2) Écrire que pour $x > 0$
$g(x) = \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{\tan(x)} = x^{1/4}(1 - (\frac{\tan(x)}{x})^{1/4})$.
Utiliser le dl de $(\frac{\tan(x)}{x})^{1/4}$

puis déduire que $g(x) = -\frac{x^{9/4}}{12} + o(\frac{x^{9/4}}{12})$.

Solution 7.32. :
1) Écrire que $f(x) = x^2 f_1(x)$,
faire le changement de variable $x = \frac{1}{u}$ $(u \in V(0))$ *dans* $f_1(x)$ *pour trouver que*
$f_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{8x^4} + o(\frac{1}{x^4})$.
Puis que $f_1(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{8x^4}$.

2) Sachant que $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{u^2}{1+u^2}$ *avec* $u = \frac{1}{x}$ *au voisinage de 0, déduire le dl de* $(\arctan(x))'$ *au voisinage de* $+\infty$ *et donc celui de*
$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3x^3} + o(\frac{1}{x^3})$.
Écrire que $2\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{4x^2-1} = 2x\left[(1 + \frac{1}{x^3})^{1/3} - (1 - \frac{1}{4x^2})^{1/2}\right]$.
Utiliser les dl pour voir que $g(x) \sim \frac{4}{3} - \frac{32}{9x}$.

3) Faire le changement de variable $x = \frac{1}{u}$ $(u \in V(0))$ *et vérifier que*
$h(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x}\sqrt{x^4+1}\right)\ln\left[e - (1 + \frac{1}{x})^x\right] \sim -\frac{1}{2x}\ln(2x)$.

Solution 7.33. :
Pour calculer les limites des suites de termes généraux suivants :
1) Poser $w_n = n\ln\left(\cos(\frac{n\pi}{3n+1}) + \sin(\frac{n\pi}{6n+1})\right) = n\ln\left(\cos(\frac{\pi}{3+\frac{1}{n}}) + \sin(\frac{\pi}{6+\frac{1}{n}})\right)$
et utiliser le dl de $\cos(\frac{\pi}{3+u}) + \sin(\frac{\pi}{6+u})$ *pour* $u \in V(0)$
en passant par $\cos(\frac{\pi}{3} + v)$ *et* $\sin(\frac{\pi}{6} + v)$.
Vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}$ *et donc*
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{24}}$.

2) Utiliser le dl de $(3.2^u - 2.3^u)^{\frac{1}{u}} = exp\left[\frac{1}{u}\ln(3.2^u - 2.3^u)\right]$,
sachant que $2^u = e^{u\ln 2}$ *et* $3^u = e^{u\ln 3}$,
vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = e^{3.\ln 2 - 2.\ln 3} = \frac{2^3}{3^2}$.

Chapitre 8

Courbes paramétrées

8.1 Rappels de cours

Dans ce chapitre I désigne un intervalle (ou réunion d'intervalles) non vide de $\mathbb{R}$ et E le plan $\mathbb{R}^2$ muni du repère cartésien $\mathcal{R}_o = (O, \vec{i}, \vec{j})$ canonique orienté.

Définitions Soit $F: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \to & F(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$ une application telle que $x(t)$ et $y(t)$ sont deux applications définies de I dans $\mathbb{R}$.

Définition 8.1. • *On appelle **courbe paramétrée** (ou arc paramétré) de E le couple (I, F).*
• *L'image $\Gamma = F(I) = \{F(t) = (x(t), y(t)) \ / \ t \in I\}$ est le **support** de la courbe paramétrée (I, F).*
• *Lorsque $x(t)$ et $y(t)$ sont de classe C^k (resp.C^∞), la courbe paramétrée est dite de classe C^k (resp.C^∞).*

Remarque 8.1. *En pratique, F est donnée dans le repère cartésien par*
$F(t) = O + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$
et lorsque F est de classe C^k, $F^{(k)}(t) = x^{(k)}(t)\vec{i} + y^{(k)}(t)\vec{j}$

Interprétation cinématique En considérant que le paramètre t désigne le temps, $F(t)$ est la position d'un mobile ponctuel M à l'instant t :
le support de la courbe s'appelle la trajectoire et les deux premiers vecteurs dérivés $F'(t) = \dfrac{dM}{dt}$ la vitesse, $F''(t) = \dfrac{d^2M}{dt^2}$ l'accélération.

Point simple-point multiple-Arc simple

Définition 8.2. — *Un point M de E pour lequel il existe un seul $t \in I$ tel que $M(x, y) = F(t)$ est dit un point simple.*
— *S'il existe $t_1 \neq t_2$ de I tels que $M = F(t_1) = F(t_2)$, M est dit un point multiple (point double, triple, etc).*

— *Si tous les points de la courbe Γ sont simples, on dit que Γ est une courbe simple.*

Entiers caractéristiques Soit $\Gamma = (I, F)$ une courbe paramétrée de classe C^k ($k \geq 1$, aussi grand que nécessaire).
Par la formule de Taylor-Young à l'ordre $n \leq k$, en $t_o \in I$, on écrit pour t au voisinage de t_o

$$F(t) = F(t_o) + (t-t_o)F'(t_o) + \frac{(t-t_o)^2}{2}F''(t_o) + \cdots + \frac{(t-t_o)^n}{n!}F^{(n)}(t_o) + o((t-t_o)^n)$$

Définition 8.3. — *On considère (s'il existe) le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $F^{(p)}(t_o) \neq (0,0)$ et l'on a alors*

$$F(t) = F(t_o) + \frac{(t-t_o)^p}{p!}F^{(p)}(t_o) + o((t-t_o)^p)$$

— *On considère ensuite (s'il existe) le plus petit entier q tel que $p < q \leq k$ et les deux vecteurs $F^{(p)}(t_o)$ et $F^{(q)}(t_o)$ sont linéairement indépendants ($det(F^{(p)}(t_o), F^{(q)}(t_o)) \neq 0$), et l'on aura*

$$F(t) = F(t_o) + \left(\sum_{i=p}^{i=q-1} \lambda_i \frac{(t-t_o)^i}{i!}\right) F^{(p)}(t_o) + \frac{(t-t_o)^q}{q!}F^{(q)}(t_o) + o((t-t_o)^q)$$

— *Les deux entiers p et q sont appelés les **entiers caractéristiques** du point $M_o = F(t_o)$ de la courbe Γ.*

Définition 8.4. *On appelle **tangente** à la courbe Γ au point $M_o = F(t_o)$, la droite passant par M_o et dirigée par le vecteur $F^{(p)}(t_o)$.*
Son équation est donnée par

$$\begin{vmatrix} x - x(t_o) & x^{(p)}(t_o) \\ y - y(t_o) & y^{(p)}(t_o) \end{vmatrix} = (x - x(t_o))\, y^{(p)}(t_o) - (y - y(t_o))\, x^{(p)}(t_o) = 0.$$

*Un point $M_o = F(t_o)$ de Γ est dit **régulier** si $F'(t_o) \neq 0$ (donc $p = 1$).*
Il est dit stationnaire si $F'(t_o) = 0$.
La courbe Γ est dite régulière si tous ses points sont réguliers.
*$M_o = F(t_o)$ est dit **birégulier** si $(F'(t_o), F''(t_o))$ est une famille libre (càd $p = 1$ et $q = 2$).*

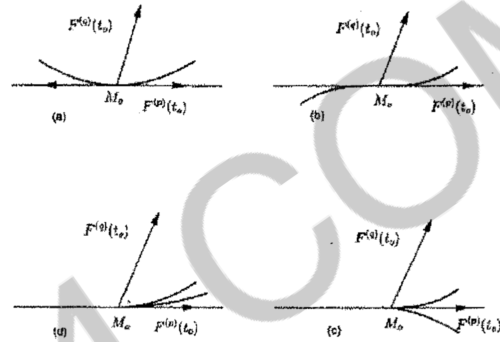
Etude locale-Concavité S'ils existent p et q les entiers caractéristiques, on note $\vec{v} = F^{(p)}(t_o)$ et $\vec{w} = F^{(q)}(t_o)$. Alors on a $\overrightarrow{MM_o} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ avec $\alpha \sim \frac{(t-t_o)^p}{p!}$ et $\beta \sim \frac{(t-t_o)^q}{q!}$ pour t au voisinage de t_o. On a les cas suivants :

1. **Point ordinaire (ou point de concavité) : p impair et q pair** (voir figure (a))

2. **Point d'inflexion : p impair et q impair** (voir figure (b))

3. **Point de rebroussement de première espèce : p pair et q impair** (voir figure (c))

4. **Point de rebroussement de deuxième espèce : p pair et q pair** (voir figure (d))



Branches infinies

Définition 8.5. :
On dit que la courbe paramétrée Γ admet une branche infinie lorsque t tend vers t_o si

$$\lim_{t \to t_o} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \lim_{t \to t_o} \|\overrightarrow{OM(t)}\| = +\infty$$

Remarque 8.2. *Si $\lim_{t\to t_o} |x(t)| = +\infty$ ou $\lim_{t \to t_o} |y(t)| = +\infty$ alors Γ admet une branche infinie.*
Γ peut avoir une branche infinie sans que les limites $\lim_{t\to t_o} |x(t)|$ et $\lim_{t \to t_o} |y(t)|$ existent.

Définition 8.6. :
Dans le cas où Γ a une branche infinie, si en plus ils existent $l_1 = \lim_{t\to t_o} \frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$ et $l_2 = \lim_{t \to t_o} \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$, le vecteur $\vec{K} = (l_1, l_2) = l_1\vec{i} + l_2\vec{j}$ est dit vecteur directeur de la direction asymptotique de la branche infinie.
Et si en plus il existe une droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\vec{K}$ et telle que la distance $d(M(t), \mathcal{D})$ tend vers 0 quand $t \to t_o$, alors la droite $\mathcal{D}$ est appelée asymptote de la courbe paramétrée Γ.

Remarque 8.3. *Étapes à suivre pour tracer une courbe paramétrée :*

- ***Intervalles de définition***
  D'abord $D_F = D_x \cap D_y$ (l'ensemble de définition de $F(t)$ est l'intersection de celui de $x(t)$ et celui de $y(t)$).

Étudier les périodes, la parité des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.
En déduire les éléments de symétrie de la courbe (points ou axes de symétrie).
Réduire l'étude de Γ sur $\Delta \subset D_F$.

- ***Branches infinies***
  Étudier les limites des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ quand t tend vers les bornes des intervalles d'étude.
- ***Variations***
  Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$, étudier leurs signes, puis dresser un tableau de variation de $x(t)$ et $y(t)$ en plaçant les valeurs remarquables du paramètre t dans l'ordre croissant.
- ***Point stationnaire***
  Si $x'(t_o) = y'(t_o) = 0$, faire une étude local de $x(t)$ et $y(t)$ (par des développements limités si possible).
- ***Tracé***
  Placer les axes et choisir les unités adaptées aux valeurs numériques.
  Tracer les asymptotes et repérer la position de la courbe.
  Le tracé se fait en allant d'un point remarquable au point suivant.
- ***Point double***
  Si le tracé indique leurs existences, calculer leurs coordonnées en résolvant $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$, puis les préciser sur la courbe.

Courbe paramétrée en polaires C'est un cas particulier de courbe paramétrée par $\theta \in I$ et telle que $F(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ où

$$\begin{cases} x(\theta) &= \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) &= \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

Définition 8.7. :
*L'équation $r = \rho(\theta)$ est appelée **l'équation polaire** de la courbe Γ.*

Propriétés 13. :

— *La fonction vectorielle définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par*

$$\theta \longrightarrow u(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

est indéfiniment dérivable et l'on a :
$u'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ *et* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u^{(n)}(\theta) = (\cos(\theta + n\frac{\pi}{2}), \sin(\theta + n\frac{\pi}{2}))$.

— *u et u' (et plus généralement $u^{(n)}$ et $u^{(n+1)}$) sont orthogonaux.*

— $\|u^{(n)}(\theta)\| = 1$.

— $F(\theta) = \rho(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = \rho(\theta)u(\theta)$
et $F'(\theta) = \rho'(\theta)u(\theta) + \rho(\theta)u'(\theta)$.

Domaine de définition, domaine d'étude

Définition 8.8. :
Le domaine de définition D_ρ d'une courbe polaire est l'ensemble des valeurs θ pour lesquelles $\rho(\theta)$ existe.

Remarque 8.4. *a) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $\theta \in D_\rho$*
$(\theta + \alpha) \in D_\rho$ et $\rho(\theta + \alpha) = \rho(\theta)$
ou $(\theta + \alpha + \pi) \in D_\rho$ et $\rho(\theta + \alpha + \pi) = -\rho(\theta)$
Alors la courbe est invariante par la rotation de centre O et d'angle α.
Par suite :

— *Si ρ est périodique de période T, la courbe est invariante par la rotation de centre O et d'angle T. Il suffit alors d'étudier la courbe sur un intervalle I de la forme $I = [\alpha, \alpha + T]$.*
— *Si $\alpha = \pi$ la courbe est symétrique par rapport à O.*

b) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $\theta \in D_\rho$
$(\alpha - \theta) \in D_\rho$ et $\rho(\alpha - \theta) = \rho(\theta)$ $(\star)$
ou $(\alpha + \pi - \theta) \in D_\rho$ et $\rho(\alpha + \pi - \theta) = -\rho(\theta)$ $(\star\star)$
Alors la courbe est symétrique par rapport à la droite Δ passant par O et telle que la mesure de l'angle $(\widehat{Ox, \Delta})$ est égale à $\frac{\alpha}{2}$ $(\mathrm{mod}\ \pi)$.
Par suite :

— *Si $\alpha = 0$ dans $(\star)$ la fonction ρ est paire et Γ est symétrique par rapport à Ox.*
— *Si $\alpha = \pi$ dans $(\star)$ Γ est symétrique par rapport à Oy.*
— *Si $\alpha = -\pi$ dans $(\star\star)$ la fonction ρ est impaire et Γ est symétrique par rapport à Oy.*

Tangente en un point Sachant que
$F'(\theta) = \rho'(\theta)u(\theta) + \rho(\theta)u'(\theta) = (\rho'(\theta)\cos(\theta) - \rho(\theta)\sin(\theta), \rho'(\theta)\sin(\theta) + \rho(\theta)\cos(\theta))$
on en déduit l'équivalence $F'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \rho'(\theta) = 0$ et $\rho(\theta) = 0$.
Donc le seul point qui peut être stationnaire est le pôle $O = (0, 0)$.
Par suite pour $M_o \in \Gamma$, on a :
- Si $M_o \neq O$ et $\theta_o \in D_\rho$ tel que $M_o = F(\theta_o)$, alors $F'(\theta_o) \neq (0, 0)$ et d'après l'étude faite sur les courbes paramétrées la tangente à la courbe en M_o est dirigée par le vecteur $F'(\theta_o)$.
- Si $M_o = O$:

Théorème 8.1. *Soit p le plus petit entier tel que $\rho^{(p)}(\theta_o) \neq 0$ où $F(\theta_o) = (0,0)$.*
Alors
i) Si p est pair, le pôle O est un point de rebroussement de première espèce.
ii) Si p est impair, le pôle O est un point de concavité.

8.2 Énoncés des exercices

Exercice 8.1. :
Tracer les points M_t de coordonnées $F(t)$ des courbes paramétrées dans les cas suivants :
1) $F(t) = (t^2, t)$ *où* $t \in \{-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.
2) $x(t) = \sin t$ *et* $y(t) = \cos t$ *où* $t \in \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}$.
3) $x = \frac{-2t}{t+2}$ *et* $y = t+1$ *où* $t \in \{-\frac{3}{2}, -\frac{10}{7}, -1, 0, 2\}$,
4) $x = \frac{t^3}{2}$ *et* $y = \frac{t^3-2}{4}$ *où* $t \in \{-\sqrt[3]{2}, 0, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{6}\}$.
5) $x = E(t)$ *et* $y = t$ *où* $t \in [-1, 0[\cup[0, 1[\cup[1, 2[$ *($E(s)$ est la partie entière de s).*

Exercice 8.2. :
Dans chaque cas montrer que l'ensemble Γ des points M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé et vérifiant l'équation donnée peut être paramétré et donner un exemple de paramétrage :

— $x^3 - 8y^2 = 0$ *(essayer de poser $y = t^k$ et choisir $k \in \mathbb{N}$ convenable pour avoir $x = at^h$ avec $h \in \mathbb{N}$).*
— $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ *(essayer de poser $y = tx$).*
— $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ *(penser à la relation $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$).*

Exercice 8.3. :
Déterminer l'ensemble de définition de chacune des courbes paramétrées suivantes :

$$F(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{1+t^2}{t-t^3} \end{cases}$$

$$G(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = t^2 - \frac{1}{t} \\ y(t) = \ln t \end{cases}$$

$$H(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cos t} \\ y(t) = \ln t \end{cases}$$

Exercice 8.4. :
Donner dans chacun des cas suivants l'ensemble de définition des courbes paramétrées suivantes et préciser la périodicité, les symétries, les translations possibles et préciser un ensemble d'étude de ces courbes :

$$F(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \sin 2t + 3\cos t \\ y(t) = \cos 2t \end{cases}$$

$$G(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

$$H(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = 2\cos^3 t \\ y(t) = 2\sin^3 t \end{cases}$$

$$K(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

Exercice 8.5. :
Déterminer les points doubles des courbes paramétrées suivantes :

$$F(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \\ y(t) = 2t + t^2 \end{cases}$$

$$G(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{1}{t^2-3t+2} \end{cases}$$

$$H(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \frac{t^2+2}{t^2+t+1} \\ y(t) = \frac{t^2+2}{t^2-t+3} \end{cases}$$

$$K(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = (t^2 - \pi^2) \end{cases}$$

Exercice 8.6. :
Faire une étude locale des courbes paramétrées au voisinage de t_o dans les cas suivants :

$$F(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \frac{\sin t - t}{t^2} \\ y(t) = \frac{\ln(t^2+1)}{t} \quad et\ t_o = 0 \end{cases}$$

$$G(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \dfrac{e^{\sqrt{1+t^3}-1} - 1}{t} \\ y(t) = \frac{\tan t}{t} \quad et\ t_o = 0 \end{cases}$$

$$H(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \frac{(t-\pi)t}{\sin t} \\ y(t) = \frac{\tan t}{t-\pi} \quad et\ t_o = \pi \end{cases}$$

Exercice 8.7. :
Déterminer la nature du point $M(t_o)$ dans les cas suivants :

— $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ *et* $t_o = 0$.
— $x(t) = t$, $y(t) = t^3 + 3t^2 + 3t$ *et* $t_o = -1$.
— $x(t) = t^2 + 2t$, $y(t) = \frac{1}{t^2} - 2t$ *et* $t_o = -1$.
— $x(t) = t^2 - t^5$, $y(t) = t^4$ *et* $t_o = 0$.
— $x(t) = \sin^2 t$, $y(t) = 1 - \cos t$ *et* $t_o = 0$.
— $x(t) = (t^2 - 2t + \ln t)^2$, $y(t) = t^4 - 4t^3 + 9t^2 - 10t$ *et* $t_o = 1$.

Exercice 8.8. :
Étudier les branches infinies des courbes paramétrées suivantes :

— $x(t) = \frac{t}{\ln t}$ *et* $y(t) = \frac{t^2}{t-1}$.
— $x(t) = \frac{t}{t^2-1}$ *et* $y(t) = \frac{1}{t^2-3t+2}$.
— $x(t) = \frac{(1+2t)^2}{(3-2t)(1-2t}$ *et* $y(t) = \frac{(1+2t)^2}{2(3-2t)}$.
— $x(t) = \ln|t^2 - 2t|$ *et* $y(t) = \ln t + \dfrac{\ln(1+t)}{t}$.

Exercice 8.9. :
Construire les courbes paramétrées suivantes :

1 − $x = \frac{6t}{t^4+1}$ *et* $y = \frac{6t^3}{t^4+1}$
2 − { $x = \frac{t}{t^2-1}$ *et* $y = \frac{1}{t^2-3t+2}$
3 − $x = 4\sin(\frac{t}{5})$ *et* $y = 3\sin(\frac{t}{3})$
4 − $x = \frac{(1+2t)^2}{2(3-2t)(1-2t)}$ *et* $y = \frac{(1+2t)^2}{4(3-2t)}$
5 − $x(t) = 4\cos 2t$ *et* $y(t) = 2\sin 2t - 2\sin t$
6 − $x(t) = 4e^{-\frac{1}{t}}$ *et* $y(t) = \frac{t}{2}e^{\frac{2}{t}}$

Exercice 8.10. :
Construire l'astroïde d'équations $x = \cos^3 t$ et $y = \sin^3 t$

Exercice 8.11. :
Construire la cycloïde d'équations $x = \frac{t-\sin t}{2}$ et $y = (1 - \cos t)$

Exercice 8.12. :
Transformer les équations cartésiennes suivantes en coordonnées polaires :

1. *La droite d'équation* $2x - 2y - \sqrt{2} = 0$.
2. *La droite d'équation* $3x + y - 1 = 0$.
3. *La parabole* $x = 3y^2$.
4. *L'hyperbole* $2xy = x - y$.
5. *La courbe* $x(x+y) - 3y = 0$

Exercice 8.13. :
Transformer les équations paramétrées suivantes en coordonnées polaires :

1. $\{\ x = t + 2 \quad y = 3 - 2t$
2. $\{\ x = 3t + 2 \quad y = t^2$
3. $\{\ x = 1 - t \quad y = t - \frac{1}{t}$

Exercice 8.14. :
Transformer les équations suivantes en coordonnées cartésiennes :

$$\rho = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\frac{\theta}{2}} \qquad \rho = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}\left(3\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2}}$$

$$\rho = \frac{\cos\theta - \sin\theta}{3\cos\theta\sin\theta} \qquad \rho = \frac{5\tan\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$

Exercice 8.15. :
Construire les courbes d'équations polaires suivantes :

1-$\rho = \frac{1}{5}\theta$ 2-$\rho = \frac{1}{10}\theta^2$

3- $\rho = \dfrac{\theta^2 + 10}{2\theta^2 + 1}$ 4-$\rho = \sin 3\theta$

5-$\rho = 1 + 2\cos\theta$ 6-$\rho = \dfrac{1}{\cos\theta + \cos 3\theta}$

7-$\rho = 3 - \cos 6\theta$ 8-$\rho = \dfrac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta + \cos 2\theta}$

9-$\rho = \dfrac{\sin\theta}{1 + \cos\theta\cos 2\theta}$ 10-$\rho = 2\cos\theta + \dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$

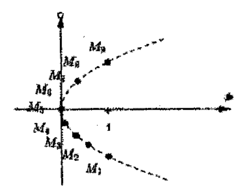
8.3 Solutions détaillées des exercices

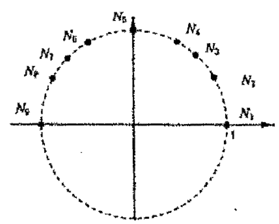
Solution 8.1. :
1) Pour $F(t) = (t^2, t)$ *où* $t \in \{-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ *on trouve les points*
$M_1(1,-1)$ $M_2(\frac{9}{16}, -\frac{3}{4})$ $M_3(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$
$M_4(\frac{1}{16}, -\frac{1}{4})$ $M_5(0,0)$ $M_6(\frac{1}{16}, \frac{1}{4})$
$M_7(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ $M_8(\frac{9}{16}, \frac{3}{4})$ $M_9(1,1)$
En reliant ces points par une ligne pointiée on découvre la courbe d'une parabole d'axe $\overrightarrow{Oy}$.
En fait on a : $x = t^2$ *et* $y = t$ *c'est équivalent à* $x = y^2$ *(voir (fig.(a))).*

2) Pour $x(t) = \sin t$ *et* $y(t) = \cos t$ *où* $t \in \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}$, *on trouve les points*
$M_1(0,1)$ $M_2(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ $M_3(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$M_4(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ $M_5(1,0)$ $M_6(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
$M_7(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ $M_8(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ $M_9(0,-1)$
En reliant ces points par une ligne pointiées on découvre un arc de cercle.
En fait on a $x^2(t) + y^2(t) = 1$ *et donc les points* M_i *appartiennent au cercle de centre* $O(0,0)$ *et de rayon* $R = 1$ *(voir (fig.(b))).*

3) Pour $x = \frac{-2t}{t+2)}$ *et* $y = t + 1$ *où* $t \in \{-\frac{3}{2}, -\frac{10}{7}, -1, 0, 2\}$,
on trouve les points
$P_1(6, -\frac{1}{2})$ $P_2(5, -\frac{3}{7})$ $P_3(2,0)$
$P_4(0,1)$ $P_5(-1,3)$

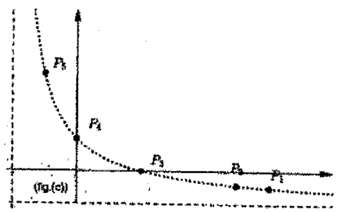
En reliant ces points, on trouve une partie de la courbe d'une hyperbole.
En fait : $(t+2)x = -2t$ *et donc* $t(x+2) = -2x$.
D'où la relation $t = \frac{-2x}{x+2}$ *qui donne* $y = t + 1 = \frac{2-x}{x+2}$ *(voir (fig.(c))).*
C'est bien l'équation d'une hyperbole.

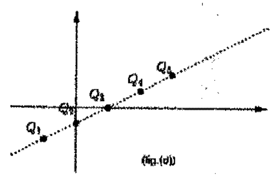

(fig.(a))


(fig.(b))

4) Pour $x = \frac{t^3}{2}$ *et* $y = \frac{t^3-2}{4}$ *où* $t \in \{-\sqrt[3]{2}, 0, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{6}\}$,
on trouve les points $\left\{ \begin{array}{lll} Q_1(-1,-1) & Q_2(0,-\frac{1}{2}) & Q_3(1,0) \\ Q_4(2,\frac{1}{2}) & Q_5(3,1) & \end{array} \right.$

En reliant ces points par une ligne pointiée on trouve un segment de droite.
En fait $t^3 = 2x$ *et donc* $y = \frac{2x-2}{4} = \frac{x-1}{2}$ *c'est l'équation d'une droite (voir (fig.(d))).*





Solution 8.2. :
1) En posant $y = t^k$ *et en remplaçant dans l'équation donnée on trouve*
$x^3 - 8y^2 = x^3 - 8t^{2k} = 0$ *et donc* $x^3 = 8t^{2k}$.
Et donc $x = \sqrt[3]{8}t^{\frac{2k}{3}} = 2t^{\frac{2k}{3}}$.
En choisissant par exemple $k = 3$ *(multiple de 3), on a le paramétrage suivant :*
$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t^3 \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2) En remplaçant $y = tx$ *dans l'équation* $x^3 + y^3 - 3xy = 0$,
on trouve $x^3 + (tx)^3 - 3xtx = 0$
et ensuite $x^2\left(x(1+t^3) - 3t\right) = 0$.
D'où $x = 0$ *ou* $x(1+t^3) - 3t = 0$.
Ou encore : $x = 0$ *ou* $x = \frac{3t}{1+t}$.
Et finalement, on arrive au paramétrage
$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = tx = \frac{3t^2}{1+t^3} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$
(le cas $x = 0$ *(donc* $t = 0$ *ou* $y = 0$*) obtenu pour* $t = 0$ *est contenu dans ce paramétrage).*

3) L'équation $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ *s'écrit* $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 1$.
Donc il existe $t \in \mathbb{R}$ *tel que* $x^{\frac{1}{3}} = \cos t$ *et* $y^{\frac{1}{3}} = \sin t$.
D'où le paramétrage
$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solution 8.3. :
On a :
$t \in D_x \Leftrightarrow \dfrac{t}{t^2-1}$ *est définie* $\Leftrightarrow t^2 - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow t \neq -1$ *et* $t \neq 1$
$t \in D_y \Leftrightarrow \dfrac{1+t^2}{t-t^2}$ *est définie* $\Leftrightarrow t - t^2 = t(1-t) \neq 0$
$\Leftrightarrow t \neq 0$ *et* $t \neq 1$
D'où $t \in D_F \Leftrightarrow t \neq -1,\ t \neq 0$ *et* $t \neq 1 \Leftrightarrow t \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$
Et donc
$$D_F =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

De même :
$t \in D_x \Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{t}$ *est définie* $\Leftrightarrow t \neq 0$
$t \in D_y \Leftrightarrow t > 0$
D'où $t \in D_G \Leftrightarrow t > 0$
Et donc
$$D_G =]0, +\infty[$$

Et de même : $t \in D_x \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t}$ *est définie* $\Leftrightarrow \cos t \neq 0$
$\Leftrightarrow t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
$t \in D_y \Leftrightarrow \ln t$ *est définie* $\Leftrightarrow t > 0$
D'où $t \in D_H \Leftrightarrow t > 0$ *et* $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
Et donc
$$D_H = \mathbb{R}_+ - \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\} =]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[\cup]\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}[\cdots$$

Solution 8.4. :
1) Pour $F(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $x(t) = \sin 2t + 3\cos t \quad y(t) = \cos 2t$ *, on a :*
$D_x = \mathbb{R}$, $D_y = \mathbb{R}$ *et donc* $D_F = D_x \cap D_y = \mathbb{R}$.
- $x(t)$ *et* $y(t)$ *sont périodiques de période* 2π*, un intervalle de la forme* $[a, a+2\pi]$ *de longueur* 2π *suffit pour l'étude.*
- en plus on remarque que :
$$\begin{cases} x(\pi - t) = \sin 2(\pi - t) + 3\cos(\pi - t) = \sin(-2t) - 3\cos t = -(\sin 2t + 3\cos t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = \cos 2(\pi - t) = \cos(-2t) = \cos 2t = y(t) \end{cases}$$
$F(\pi - t) = (-x(t), y(t))$ *est le symétrique de* $F(t) = (x(t), y(t))$ *par rapport à l'axe* $\overrightarrow{Oy}$.
Par suite la courbe est symétrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{Oy}$*. Et l'étude sur l'intervalle* $[a, a+\pi]$ *suffit à condition de choisir* $a \in \mathbb{R}$ *tel que :*
$a \leq t \leq a + \pi \Leftrightarrow a + \pi \leq (\pi - t) \leq a + 2\pi$
c.à.d $a \leq t \leq a + \pi \Leftrightarrow a \leq -t \leq a + \pi \Leftrightarrow -(a+\pi) \leq t \leq -a$
Il nous suffit que : $a = -(a + \pi)$ *et donc* $a = -\frac{\pi}{2}$.
On prend alors, comme ensemble d'étude $E_F = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Une fois la courbe est tracée pour $t \in E_F$*, on trace son symétrique par rapport à* $\overrightarrow{Oy}$ *pour avoir toute la courbe de* $F(t)$.

2) Pour $G(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $x(t) = t - \sin t \quad y(t) = 1 - \cos t$ *, on a :*
$D_x = \mathbb{R}$, $D_y = \mathbb{R}$ *et donc* $D_G = D_x \cap D_y = \mathbb{R}$.
- $x(t + 2\pi) = (t + 2\pi) - \sin(t + 2\pi) = (t + 2\pi) - \sin t = (t - \sin t) + 2\pi = x(t) + 2\pi$
et $y(t + 2\pi) = 1 - \cos(t + 2\pi) = 1 - \cos t = y(t)$.
Ce qui donne $G(t + 2\pi) = (x(t + 2\pi), y(t + 2\pi)) = (x(t) + 2\pi, y(t)) = G(t) + (2\pi, 0)$.
Ce qui signifie que si on a le point M_t*, le point* $M_{t+2\pi}$ *est obtenu en translatant* M_t *d'une translation de vecteur* $\overrightarrow{u} = (2\pi, 0)$.
Par suite on prend comme ensemble d'étude un ensemble de longueur 2π.
- En plus on a

$G(-t) = (x(-t), y(-t)) = (-t - \sin(-t), 1 - \cos(-t)) = (-(t - \sin t), 1 - \cos t)$
$\quad = (-x(t), y(t))$

ainsi $G(-t)$ est le symétrique de $(x(t), y(t))$ par rapport à $\overrightarrow{Oy}$.
Donc la courbe est symétrique par rapport à $\overrightarrow{Oy}$.
On choisit donc comme ensemble d'étude l'intervalle $E_G = [0, \pi]$. On trace la courbe pour $t \in [0, \pi]$. On rajoute le symétrique de la partie de la courbe tracée. Puis on translate ce qu'on a obtenu à gauche et à droite pour avoir la courbe paramétrée.

3)Pour $K(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3}$ $\quad y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$, on a :
$t \in D_x \cap D_y \Leftrightarrow 1 + t^3 \neq 0 \Leftrightarrow t^3 \neq -1 \Leftrightarrow t \neq -1.$
Par suite l'ensemble de définition de $K(t)$ est $D_K = \mathbb{R} - \{-1\}$.
- On remarque ensuite que $F(\frac{1}{t}) = (x(\frac{1}{t}), y(\frac{1}{t})) = (\frac{3t^2}{1+t^3}, \frac{3t}{1+t^3}) = (y(t), x(t))$.
Comme (y, x) est le symétrique de (x, y) par rapport à la première bissectrice, on en déduit que la courbe est symétrique par rapport à cette droite.
On prend comme ensemble d'étude $E_K =]-1, 1]$.
Une fois qu'on a tracé la courbe pour $t \in]-1, 1]$, on rajoute le symétrique par rapport à la première bissectrice de cette courbe pour avoir la courbe paramétrée toute entière.
(Remarquer que $t < -1$ ou $1 \leq t \Rightarrow -1 < \frac{1}{t} < 0$ ou $0 < \frac{1}{t} \leq 1$).

<u>Solution</u> 8.5. :

1) Pour $F(t) = (x(t), y(t))$ avec $\begin{cases} x(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \\ y(t) = 2t + t^2 \end{cases}$ on a $D_F = \mathbb{R}^*$.
Cherchons s'il existe $(s, t) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $s \neq t$ et $F(t) = F(s)$. Si oui, on aurait par des équivalences

$$F(s) = F(t) \Leftrightarrow \begin{cases} 2s - \frac{1}{s^2} & = 2t - \frac{1}{t^2} \\ 2s + s^2 & = 2t + t^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (s-t)(2 + \frac{s+t}{s^2t^2}) & = 0 \\ (s-t)(2+s+t) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \frac{s+t}{s^2t^2} & = 0 \\ 2 + s + t & = 0 \end{cases} \quad (\text{car } s \neq t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \frac{-2}{s^2t^2} & = 0 \\ s + t & = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (st)^2 & = 1 \\ s + t & = -2 \end{cases}$$

1^{er} *cas* $st = 1$
s et t seraient racines de l'équation $X^2 - (s+t)X + st = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2 = 0$ dont les racines sont $s = t = -1$. C'est inacceptable, car $s \neq t$.
2^{eme} *cas* $st = -1$
s et t seraient racines de l'équation $X^2 - (s+t)X + st = X^2 + 2X - 1 = 0$ dont les racines sont $t_1 = -1 + \sqrt{2}$ et $t_2 = -1 - \sqrt{2}$.
Calculons ensuite $F(-1+\sqrt{2}) = (-5, 1)$ qui sont les coordonnées du seul point double M_o.

2) Pour $G(t) = (x(t), y(t))$ avec $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)} \\ y(t) = \frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{1}{(t-1)(t-2)} \end{cases}$

on a $D_G = \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$
Par des équivalences, et pour $s \neq t$ dans D_G, on écrit :

$$G(t) = G(s) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{t^2-1} = \frac{s}{s^2-1} \\ \frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{1}{s^2-3s+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(s^2-1) = s(t^2-1) \\ t^2 - 3t + 2 = s^2 - 3s + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ts(s-t) + (s-t) = 0 \\ (s-t)(3-s-t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ts = -1 \\ t + s = 3 \end{cases}$$

s et t sont donc les racines de l'équation $X^2 - 3X - 1 = 0$: $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.
On en déduit le point double dont les coordonnées sont données par $F(\frac{3+\sqrt{13}}{2}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

3) Pour $H(t) = (x(t), y(t))$ avec $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2+2}{t^2+t+1} \\ y(t) = \frac{t^2+2}{t^2-t+3} \end{cases}$ on a $D_H = \mathbb{R}$ (les dénominateurs de $x(t)$ et $y(t)$ sont à discriminants négatifs).
Remarque très utile :
Si $M(a, b)$ est un point double alors il existe $s \neq t$ tel que

$$H(t) = H(s) = (a, b) \text{ et donc } \begin{cases} \frac{s^2+2}{s^2+s+1} = \frac{t^2+2}{t^2+t+1} = a \\ \frac{s^2+2}{s^2-s+3} = \frac{t^2+2}{t^2-t+3} = b \end{cases}$$

$$\text{ce qui donne } \begin{cases} (s^2+2) - a(s^2+s+1) = (t^2+2) - a(t^2+t+1) = 0 \\ (s^2+2) - b(s^2-s+3) = (t^2+2) - b(t^2-t+3) = 0 \end{cases}$$

En posant $P(X) = (X^2+2) - a(X^2+X+1) = (1-a)X^2 - aX + (2-a)$
et $Q(X) = (X^2+2) - b(X^2 - X + 3) = (1-b)X^2 + bX + (2-3b)$,
on voit que t et s sont les deux racines communes de $P(X)$ et $Q(X)$.
Ce qui signifie que les coefficients de ces deux polynômes sont proportionnels :
$\frac{1-a}{1-b} = \frac{-a}{b} = \frac{2-a}{2-3b}$

$$\text{ce qui donne } \begin{cases} b(1-a) & = -a(1-b) \\ -a(2-3b) & = b(2-a) \end{cases}$$

Ce système est équivalent à l'équation $2ab - a - b = 0$, elle même équivalente à $b = \dfrac{a}{2a-1}$.
Par suite les points doubles ont pour coordonnées $M(a, \dfrac{a}{2a-1})$
et tel qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ $\quad a = x(t) = \frac{t^2+2}{t^2+t+1}$.
Une étude plus détaillée montre que tous les points de la courbe paramétrée sont doubles sauf le point $M_o(1, 1)$.

4) Pour $K(t) = (x(t), y(t))$ avec $\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = (t^2 - \pi^2) \end{cases}$
Par des équivalences, et pour $s \neq t$ dans D_K, on écrit :

$$K(s) = K(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2s = \cos 2t \\ s^2 - \pi^2 = t^2 - \pi^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2s = \cos 2t \\ s^2 - t^2 = (s-t)(s+t) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow s = t$ *ou* $s = -t$.
Par suite tous les points de la courbe atteints pour $t \neq 0$ sont doubles. Ils sont atteints par t et $-t$.

<u>Solution</u> 8.6. :

On a $F(t) = (x(t), y(t))$ avec $\begin{cases} x(t) = \frac{\sin t - t}{t^2} \\ y(t) = \frac{\ln(t^2+1)}{t} \end{cases}$ et $t_o = 0$
Pour t au voisinage de 0 on a les développements limités :
$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + o(t^5)$, $\ln(1+t^2) = t^2 - \frac{1}{2}t^4 + o(t^4)$ *et donc*

$$x(t) = \frac{-\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + o(t)}{t^2} = -\frac{1}{6}t + \frac{1}{120}t^3 + o(t^3),$$

$$y(t) = \frac{t^2 - \frac{1}{2}t^4 + o(t^4)}{t} = t - \frac{1}{2}t^3 + o(t^3).$$

On en déduit que $x(t) \sim -\frac{1}{6}t$ et $y(t) \sim t$ et que $y(t) \sim -6x(t)$.
Au voisinage du point $F(0) = (x(0), y(0)) = (0, 0)$ la courbe a la forme d'un morceau

de la droite $y = -6x$.
On a aussi comme information
$F(t) = (0,0) + t(-\frac{1}{6}, 1) + \frac{1}{2!}t^2(0,0) + \frac{1}{3!}t^3(\frac{1}{20}, -3) + (o(t^3), o(t^3))$
par suite $p = 1$, $q = 3$ *et le point* $(0,0)$ *est un point d'inflexion.*

On a $G(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \dfrac{e^{\sqrt{1+t^3}-1} - 1}{t} \\ y(t) = \frac{\tan t}{t} \quad \text{et } t_o = 0 \end{cases}$
Pour t *au voisinage de* 0 *on a les développements suivants*
$\sqrt{1+t^3} = 1 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{8}t^6 + o(t^6)$, $e^{\sqrt{1+t^3}-1} = 1 + \frac{1}{2}t^3 + o(t^6)$ *et* $\tan t = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + o(t^6)$
Et donc $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + o(t^5)$ *et* $y(t) = 1 + \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{5}t^4 + o(t^5)$,
on en déduit que $F(t) = (0,1) + t(0,0) + \frac{1}{2!}t^2(1, \frac{2}{3}) + \frac{1}{3!}t^3(0,0) + \frac{1}{4!}t^4(0, \frac{48}{5}) + (o(t^4), o(t^4))$
par suite $p = 2$, $q = 4$ *et le point* $(0,0)$ *est un point de rebroussement de deuxième espèce.*

On a $H(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \frac{(t-\pi)t}{\sin t} \\ y(t) = \frac{\tan t}{t-\pi} \quad \text{et } t_o = \pi \end{cases}$
Pour t *au voisinage de* π *en faisant le changement de variable* $u = t - \pi$ *et en passant par des développements limités on écrit :*

$$x(t) = \frac{u(u+\pi)}{\sin(u+\pi)} = -\frac{u(u+\pi)}{\sin u} = -\frac{u(u+\pi)}{u - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{120}u^5 + o(u^5)}$$
$$= -\frac{u+\pi}{1 - \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{120}u^4 + o(u^4)} = -\pi - u - \frac{\pi}{6}u^2 - \frac{1}{6}u^3 - \frac{7\pi}{360}u^4 + o(u^4)$$
$$= -\pi - (t-\pi) - \frac{\pi}{6}(t-\pi)^2 - \frac{1}{6}(t-\pi)^3 - \frac{7\pi}{360}(t-\pi)^4 + o((t-\pi)^4)$$
$$y(t) = \frac{\tan u}{u} = \frac{u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{15}u^5 + o(u^5)}{u}$$
$$= 1 + \frac{1}{3}u^2 + \frac{2}{15}u^4 + o(u^4) = 1 + \frac{1}{3}(t-\pi)^2 + \frac{2}{15}(t-\pi)^4 + o((t-\pi)^4).$$

On en déduit que $F(t)$ *peut être prolongé par continuité en* $t = \pi$ *par* $F(\pi) = (-\pi, 1)$
et qu'en ce point $F'(\pi) = (-1, 0)$ *donc* $p = 1$
et que $F''(\pi) = (-\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3})$ *donc* $q = 2$ *(ceci car* $\det(F'(\pi), F''(\pi)) \neq 0$*).*
Ainsi $(-\pi, 1)$ *est un point ordinaire (de concavité).*

Solution 8.7. :
1) Pour $F(t) = (x(t), y(t))$ *où* $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ *et* $t_o = 0$ *on a :*
$F^{(1)}(t) = (1, 2t)$, $F^{(2)}(t) = (0, 2)$,
et donc $F^{(1)}(0) = (1,0)$ *et* $F^{(2)}(0) = (0,2)$.
Comme $\det(F^{(1)}(0), F^{(1)}(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$, *les vecteurs* $F^{(1)}(0)$ *et* $F^{(2)}(0)$ *forment une famille libre.*
Ainsi les entiers caractéristiques de $t_o = 0$ *sont* $p = 1$ *(impair) et* $q = 2$ *(pair).*
Par suite $F(0) = (0,0)$ *est un point ordinaire (point de concavité).*

2) Pour $F(t) = (x(t), y(t))$ *où* $x(t) = t$, $y(t) = t^3 + 3t^2 + 3t$ *et* $t_o = -1$, *on a :*
$F^{(1)}(t) = (1, 3t^2 + 6t + 3)$, $F^{(2)}(t) = (0, 6t + 6)$, $F^{(3)}(t) = (0, 6), \cdots$
et donc $F(-1) = (x(-1), y(-1)) = (-1, -1) = M_{t_o}$, $F^{(1)}(t_o) = F^{(1)}(-1) = (1, 0)$,
$F^{(2)}(t_o) = F^{(2)}(-1) = (0,0)$ *et* $F^{(3)}(t_o) = F^{(3)}(-1) = (0, 6)$.
Ensuite on a :
$p = 1$ *(impair) car* $F^{(1)}(-1) \neq (0,0)$,
et $\det(F^{(1)}(-1), F^{(2)}(-1)) = 0$, $\det(F^{(1)}(-1), F^{(3)}(-1)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$
par suite la famille $(F^{(1)}(-1), F^{(3)}(-1))$ *est libre et* $q = 3$ *(impair).*

Ainsi le point $F(-1) = (-1, -1) = M_{t_o}$ *est un point d'inflexion.*

3) Pour $F(t) = (x(t), y(t))$ *où* $x(t) = t^2 + 2t$, $y(t) = \frac{1}{t^2} - 2t$ *et* $t_o = -1$, *on a :*
$F^{(1)}(t) = (2t + 2, -\frac{2}{t^3} - 2)$, $F^{(2)}(t) = (2, \frac{6}{t^4})$, $F^{(3)}(t) = (0, -\frac{24}{t^5})$, $F^{(4)}(t) = (0, \frac{120}{t^6})$, $\cdots$
Comme $F^{(1)}(t_o) = F^{(1)}(-1) = (0,0)$ *et* $F^{(2)}(t_o) = F^{(2)}(-1) = (2, 6) \neq (0,0)$ *on a* $p = 2$ *(pair).*
Ensuite $F^{(3)}(t_o) = F^{(3)}(-1) = (0, 24)$
et $\det(F^{(2)}(-1), F^{(3)}(-1)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 24 \end{vmatrix} = 48 \neq 0.$
Par suite la famille $(F^{(2)}(-1), F^{(3)}(-1))$ *est libre et* $q = 3$ *(impair).*
Ainsi le point $F(-1) = (-1, 3) = M_{t_o}$ *est un point de rebroussement de première espèce.*

4) Pour $F(t) = (x(t), y(t))$ *où* $x(t) = t^2 - t^5$, $y(t) = t^4$ *et* $t_o = 0$, *on a :*
$F^{(1)}(t) = (2t - 5t^4, 4t^3)$, $F^{(2)}(t) = (2 - 20t^3, 12t^2)$, $F^{(3)}(t) = (-60t^2, 24t)$,
$F^{(4)}(t) = (-120t, 24), \cdots$
et donc $F(0) = (x(0), y(0)) = (0,0) = M_{t_o}$, $F^{(1)}(t_o) = F^{(1)}(0) = (0,0)$,
$F^{(2)}(t_o) = F^{(2)}(0) = (2, 0) \neq (0,0)$ *donc* $p = 2$ *(pair),*
Ensuite $F^{(3)}(t_o) = F^{(3)}(0) = (0,0)$, $F^{(4)}(t_o) = F^{(4)}(0) = (0, 24)$
comme $\det(F^{(2)}(0), F^{(4)}(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24 \end{vmatrix} = 48 \neq 0$
par suite la famille $(F^{(2)}(-1), F^{(4)}(-1))$ *est libre et* $q = 4$ *(pair).*
Ainsi le point $F(0) = (0,0) = M_{t_o}$ *est un point de rebroussement de second espèce.*

5) Pour $F(t) = (x(t), y(t))$ *où* $x(t) = \sin^2 t$, $y(t) = 1 - \cos t$ *et* $t_o = 0$, *on utilise les dérivées comme avant, ou on passe par les développements limités au voisinage de* $t_o = 0$ *:*
$\begin{cases} x(t) &= \sin^2 t = t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^5) \\ y(t) &= 1 - \cos t = \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{24} + o(t^5) \end{cases}$
On en déduit que $F'(0) = (0,0)$, $F^{(2)}(0) = (2, 1)$,
$F^{(3)}(0) = (0,0)$, $F^{(4)}(0) = (-8, -1), \cdots$
On a $F''(0) \neq (0,0)$ *donc* $p = 2$ *(pair),*
ensuite $\det(F^{(2)}(0), F^{(4)}(0)) = \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$, *les vecteurs* $F^{(2)}(0)$ *et* $F^{(4)}(0)$ *forment une famille libre et donc* $q = 4$ *(pair).*
Ainsi les entiers caractéristiques de $t_o = 0$ *sont* $p = 2$ *(pair) et* $q = 4$ *(pair).*
Par suite $F(0) = (0,0)$ *est un point de rebroussement de deuxième espèce.*

6) Pour $F(t) = (x(t), y(t))$ *où* $x(t) = (t^2 - 2t + \ln t)^2$, $y(t) = t^4 - 4t^3 + 9t^2 - 10t$ *et* $t_o = 1$, *on utilise les dérivées comme précédemment, ou on passe par les développements limités au voisinage de* $t_o = 1$ *:*
Posons $s = t - t_o = t - 1$ *(et donc* $t = s + 1$ *et si* $t \in V(t_o)$ *alors* $s \in V(0)$*). D'où*
$\begin{cases} x(t) = (t^2 - 2t + \ln t)^2 = \left((s+1)^2 - 2(s+1) + \ln(s+1)\right)^2 \\ y(t) = (s+1)^4 - 4(s+1)^3 + 9(s+1)^2 - 10(s+1) \end{cases}$
$\begin{cases} x(t) = 1 - 2s + \frac{1}{3}s^3 + \frac{17}{12}s^4 + o(s^4) = 1 - 2(t-1) + \frac{1}{3}(t-1)^3 + \frac{17}{12}(t-1)^4 + o((t-1)^4) \\ y(t) = -4 + 3s^2 + s^4 + o(s^4) = -4 + 3(t-1)^2 + (t-1)^4 + o((t-1)^4) \end{cases}$
Sachant que

$$F(t)=F(1)+(t-1)F^{(1)}(1)+\frac{(t-1)^2}{2!}F^{(2)}(1)+\frac{(t-1)^3}{3!}F^{(3)}(1)+\frac{(t-1)^4}{4!}F^{(4)}(1)$$
$$+\left(o((t-1)^4),o((t-1)^4)\right)$$

On en déduit que
$F(1)=(1,-4)$, $F^{(1)}(1)=(-2,0)$, $F^{(2)}(1)=(0,6)$, $F^{(3)}(1)=(2,0)$,
$F^{(4)}(1)=(34,24)$.
On a $F^{(1)}(1)\neq(0,0)$ *donc* $p=1$ *(impair).*
Ensuite on a $det(F^{(1)}(1),F^{(2)}(1))=-12\neq 0$, *donc* $q=2$ *(pair).*
Par suite $F(1)=(1,-4)$ *est un point ordinaire (ou de concavité).*

Solution 8.8. :
1) Pour la courbe paramétrée définie par $F(t)=(x(t),y(t))$
où $x(t)=\frac{t}{\ln t}$ *et* $y(t)=\frac{t^2}{t-1}$ *on a :*
$D_x=]0,1[\cup]1,+\infty[$ *et* $D_y=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ *donc* $D_F=D_x\cap D_y=]0,1[\cup]1,+\infty[$.
Les limites aux bornes sont données par :

Quand $t\longrightarrow 0$
$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0^+}x(t) &= \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t}{\ln t}=0\\ \lim\limits_{t\to 0^+}y(t) &=0\end{cases}$$
Par suite on n'a pas de branche infinie, le point $(0,0)$ *est un point de convergence de la courbe.*

Quand $t\longrightarrow 1$
$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to 1^-}x(t) &=-\infty\\ \lim\limits_{t\to 1^-}y(t) &=-\infty\end{cases}$$
On est amené à chercher $\lim\limits_{t\to 1^-}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim\limits_{t\to 1^-}t\frac{\ln t}{t-1}=\lim\limits_{s\to 0^-}(1+s)\frac{\ln(1+s)}{s}=1=a$
et l'on a ensuite par des développements limités
$$\lim_{t\to 1^-}(y(t)-ax(t))=\lim_{t\to 1^-}\left(\frac{t^2}{t-1}-\frac{t}{\ln t}\right)=\lim_{s\to 0^-}\left(\frac{(s+1)^2}{s}-\frac{s+1}{\ln(1+s)}\right)$$
$$=\lim_{s\to 0^-}\left(\frac{(s+1)^2}{s}-\frac{s+1}{s-\frac{s^2}{2}+o(s^2)}\right)=\lim_{s\to 0^-}\frac{1}{s}\left(s^2+2s+1-1-\frac{3}{2}s-\frac{3}{4}s^2+o(s^2)\right)$$
$$=\lim_{s\to 0^-}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}s+o(s)\right)=\tfrac{1}{2}.$$
On en déduit alors que la droite d'équation $D_2\ :\ y=ax+\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2}$ *est une asymptote oblique à la courbe.*
Et de même $\begin{cases}\lim\limits_{t\to 1^+}x(t) &=+\infty\\ \lim\limits_{t\to 1^+}y(t) &=+\infty\end{cases}$
On est amené à chercher $\lim\limits_{t\to 1^+}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim\limits_{t\to 1^+}t\frac{\ln t}{t-1}=\lim\limits_{s\to 0^+}(1+s)\frac{\ln(1+s)}{s}=1=a'$
et l'on a ensuite par des développements limités
$$\lim_{t\to 1^+}(y(t)-ax(t))=\lim_{t\to 1^+}\left(\frac{t^2}{t-1}-\frac{t}{\ln t}\right)=\lim_{s\to 0^+}\left(\frac{(s+1)^2}{s}-\frac{s+1}{\ln(1+s)}\right)$$
$$=\lim_{s\to 0^+}\left(\frac{(s+1)^2}{s}-\frac{s+1}{s-\frac{s^2}{2}+o(s^2)}\right)=\lim_{s\to 0^+}\frac{1}{s}\left(s^2+2s+1-1-\frac{3}{2}s-\frac{3}{4}s^2+o(s^2)\right)$$
$$=\lim_{s\to 0^+}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}s+o(s)\right)=\tfrac{1}{2}.$$
On en déduit alors que la droite d'équation $D_2\ :\ y=ax+\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2}$ *est une asymptote oblique à la courbe.*

Quand $t\longrightarrow+\infty$
$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty}x(t) &=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{\ln t}=+\infty\\ \lim\limits_{t\to+\infty}y(t) &=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^2}{t-1}=+\infty\end{cases}$$
ensuite $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{t-1}\ln t=+\infty.$
On en déduit que la courbe a une branche parabolique dans la direction $\overrightarrow{Oy}$.

2) Pour la courbe paramétrée définie par $F(t)=(x(t),y(t))$
où $x(t)=\frac{t}{t^2-1}=\frac{t}{(t-1)(t+1)}$ *et* $y(t)=\frac{1}{t^2-3t+2}=\frac{1}{(t-1)(t-2)}$ *on a :*
$D_x=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ *et* $D_y=]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$
donc $D_F=D_x\cap D_y=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$.
Les limites aux bornes sont données par :

Quand $t\longrightarrow-\infty$
$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to-\infty}x(t) &=0\\ \lim\limits_{t\to-\infty}y(t) &=0\end{cases}$$
Donc pas de branche infinie puisque ces limites sont finies. Le point $(0,0)$ *est un point limite vers lequel converge la courbe.*

Quand $t\longrightarrow-1$
$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to-1^-}x(t) &=-\infty\\ \lim\limits_{t\to-1^-}y(t) &=\dfrac{1}{6}\end{cases}$$
On a donc la droite $D_1\ :\ y=\dfrac{1}{6}$ *est une asymptote horizontale à la courbe du coté des x négatifs.*
Et de même
$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to-1^+}x(t) &=+\infty\\ \lim\limits_{t\to-1^+}y(t) &=\dfrac{1}{6}\end{cases}$$
On a donc la droite $D_1\ :\ y=\dfrac{1}{6}$ *est une asymptote horizontale à la courbe du coté des x positifs.*

Quand $t\longrightarrow 1$
$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to 1^-}x(t) &=-\infty\\ \lim\limits_{t\to 1^-}y(t) &=+\infty\end{cases}$$
et $\lim\limits_{t\to 1^-}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim\limits_{t\to 1^-}\frac{t+1}{t(t-2)}=-2$
et $\lim\limits_{t\to 1^-}(y(t)+2x(t))=\lim\limits_{t\to 1^-}-\dfrac{3}{(t-2)(t+1)}=-\dfrac{3}{2}.$
Par suite la droite $D_1\ :\ y=-2x-\frac{3}{2}$ *est une asymptote oblique à la courbe du coté des x négatifs et y positifs.*
On obtient de même que la droite $D_1\ :\ y=-2x-\frac{3}{2}$ *est une asymptote oblique à la courbe du coté des x positifs et y négatifs pour* $t\longrightarrow 1^+$.

Quand $t \longrightarrow 2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 2^-} x(t) &= \dfrac{2}{3} \\ \lim\limits_{t\to 2^-} y(t) &= -\infty \end{cases}$$

On a donc la droite $D_2\ :\ x = \dfrac{2}{3}$ *est une asymptote verticale à la courbe du coté des* y *négatifs.*
Et de même

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 2^+} x(t) &= \dfrac{2}{3} \\ \lim\limits_{t\to 2^+} y(t) &= +\infty \end{cases}$$

On a donc la droite $D_2\ :\ x = \dfrac{2}{3}$ *est une asymptote verticale à la courbe du coté des* y *positifs.*

Quand $t \longrightarrow +\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to +\infty} x(t) &= 0 \\ \lim\limits_{t\to +\infty} y(t) &= 0 \end{cases}$$

Donc pas de branche infinie puisque ces limites sont finies. Le point $(0,0)$ *est un point limite vers lequel converge la courbe.*

3) Pour la courbe paramétrée définie par $F(t) = (x(t), y(t))$ *où* $x(t) = \frac{(1+2t)^2}{(3-2t)(1-2t)}$ *et* $y(t) = \frac{(1+2t)^2}{2(3-2t)}$ *on a :*
$D_x =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$ *et* $D_y =]-\infty, \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$
donc $D_F = D_x \cap D_y =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$.
Les limites aux bornes sont données par :

Quand $t \longrightarrow -\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to -\infty} x(t) &= 1 \\ \lim\limits_{t\to -\infty} y(t) &= +\infty \end{cases}$$

Donc la droite $D_1\ :\ x = 1$ *est une asymptote verticale à la courbe, du coté des* y *positifs.*

Quand $t \longrightarrow \frac{1}{2}^-$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to \frac{1}{2}^-} x(t) &= +\infty \\ \lim\limits_{t\to \frac{1}{2}^-} y(t) &= 1 \end{cases}$$

Donc la droite $D_2\ :\ y = 1$ *est une asymptote horizontale à la courbe, du coté des* x *positifs.*

Quand $t \longrightarrow \frac{1}{2}^+$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to \frac{1}{2}^+} x(t) &= -\infty \\ \lim\limits_{t\to \frac{1}{2}^+} y(t) &= 1 \end{cases}$$

Donc la droite $D_2\ :\ y = 1$ *est une asymptote horizontale à la courbe, du coté des* x *négatifs.*

Quand $t \longrightarrow \frac{3}{2}^-$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to \frac{3}{2}^-} x(t) &= -\infty \\ \lim\limits_{t\to \frac{3}{2}^-} y(t) &= +\infty \end{cases}$$

et $\lim\limits_{t\to \frac{3}{2}^-} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to \frac{3}{2}^-} \dfrac{1-2t}{2} = -1$

$$\lim_{t\to \frac{3}{2}^-} (y(t) + x(t)) = \lim_{t\to \frac{3}{2}^-} \frac{(1+2t)^2}{2(1-2t)} = -4.$$

Donc la droite $D_3\ :\ y = -x - 4$ *est une asymptote oblique à la courbe (du coté des* x *négatifs et des* y *positifs).*

Quand $t \longrightarrow \frac{3}{2}^+$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to \frac{3}{2}^+} x(t) &= +\infty \\ \lim\limits_{t\to \frac{3}{2}^+} y(t) &= -\infty \end{cases}$$

et $\lim\limits_{t\to \frac{3}{2}^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to \frac{3}{2}^+} \dfrac{1-2t}{2} = -1$

$$\lim_{t\to \frac{3}{2}^+} (y(t) + x(t)) = \lim_{t\to \frac{3}{2}^+} \frac{(1+2t)^2}{2(1-2t)} = -4.$$

Donc la droite $D_3\ :\ y = -x - 4$ *est une asymptote oblique à la courbe (du coté des* x *positifs et des* y *négatifs).*

Quand $t \longrightarrow +\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to +\infty} x(t) &= 1 \\ \lim\limits_{t\to +\infty} y(t) &= -\infty \end{cases}$$

Donc la droite $D_1\ :\ x = 1$ *est une asymptote verticale à la courbe, du coté des* y *négatifs.*
Ainsi on a une idée sur les branches infinies de la courbe. Pour avoir les détails sur leurs positions par rapport aux asymptotes il faut étudier les signes de certaines différences (telle que $x(t) - 1$ *pour le dernier cas).*

4) Pour la courbe paramétrée définie par $F(t) = (x(t), y(t))$ *où*
$x(t) = \ln|t^2 - 2t| = \ln|t| + \ln|t-2|$ *et* $y(t) = \ln t + \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ *on a :*
$D_x =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$, *puisqu'on doit avoir* $|t^2 - 2t| \neq 0$,
et $D_y =]0, +\infty[$ *puisqu'on doit avoir* $t > 0$ *et* $t + 1 > 0$.
D'où $D_F = D_x \cap D_y =]0, 2[\cup]2, +\infty[$.
Les limites aux bornes sont données par :

Quand $t \longrightarrow 0^+$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} x(t) &= -\infty \\ \lim\limits_{t\to 0^+} y(t) &= -\infty \quad (\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1) \end{cases}$$

et $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\ln t + \frac{\ln(1+t)}{t}}{\ln t + \ln|t-2|} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1 + \ln t}{\ln t + \ln 2} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\ln t}{\ln t} = 1.$

et ensuite $\lim\limits_{t\to 0^+}(y(t)-x(t)) = \lim\limits_{t\to 0^+}(\frac{\ln(1+t)}{t} - \ln|t-2|) = 1-\ln 2$.
Par suite la droite $D_1 \;:\; y = x + (1-\ln 2)$ *est une asymptote oblique à la courbe du coté des* x *négatifs et* y *négatifs.*

Quand $t \longrightarrow 2^-$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 2^-} x(t) & = -\infty \\ \lim\limits_{t\to 2^-} y(t) & = \ln 2 + \dfrac{\ln 3}{2} \end{cases}$$

Donc la droite $D_2 \;:\; y = \ln 2 + \dfrac{\ln 3}{2}$ *est une asymptote horizontale à la courbe, du coté des* x *négatifs.*

Quand $t \longrightarrow 2^+$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 2^+} x(t) & = -\infty \\ \lim\limits_{t\to 2^+} y(t) & = \ln 2 + \dfrac{\ln 3}{2} \end{cases}$$

Donc la droite $D_2 \;:\; y = \ln 2 + \dfrac{\ln 3}{2}$ *est une asymptote horizontale à la courbe, du coté des* x *négatifs.*

Quand $t \longrightarrow +\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to +\infty} x(t) & = +\infty \\ \lim\limits_{t\to +\infty} y(t) & = +\infty \end{cases}$$

$$\text{et } \lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t + \frac{\ln(1+t)}{t}}{\ln t + \ln|t-2|} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{2\ln t} = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } \lim_{t\to+\infty}(y(t) - \tfrac{1}{2}x(t)) = \lim_{t\to+\infty}(\ln t + \frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{2}\ln|t-2|)$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\ln\sqrt{\frac{t}{t-2}} = 0.$$

Par suite la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ *est une asymptote oblique à la courbe.*

Solution 8.9. :

1-Etude de la courbe $F(t) = (x(t), y(t))$ *où* $\begin{cases} x & = \frac{6t}{t^4+1} \\ y & = \frac{6t^3}{t^4+1} \end{cases}$

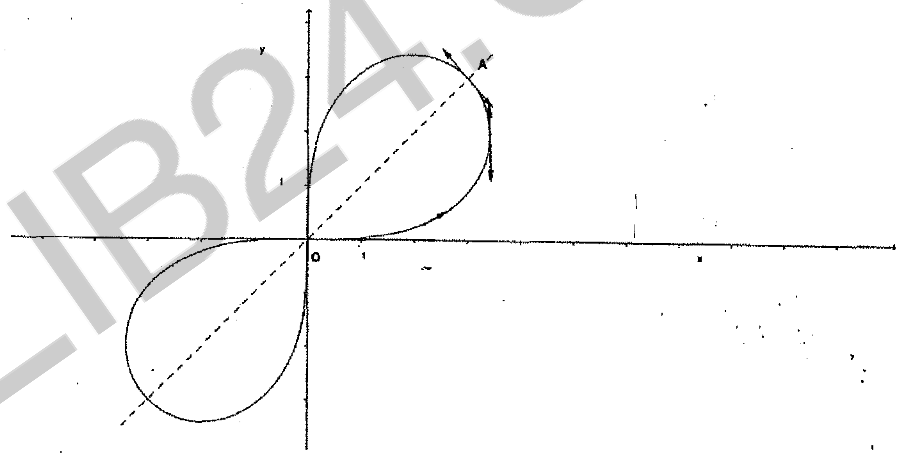
(a) D'abord $D_f = \mathbb{R}$.
On a $F(-t) = (x(-t), y(-t)) = (-x(t), -y(t)) = -F(t)$. *Donc la courbe est symétrique par rapport au centre* $O = (0,0)$.
Il suffit de l'étudier sur $[0,+\infty[$.
En plus on remarque que $F(\frac{1}{t}) = (x(\frac{1}{t}), y(\frac{1}{t})) = (y(t), x(t))$.
Ce qui signifie que la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice.
En faisant varier $t \in]0,1]$ *on aura* $\frac{1}{t} \in [1,+\infty[$.
Par suite On choisit comme ensemble d'étude l'ensemble $E_F = [0,1]$.
On trace la partie de la courbe pour $t \in [0,1]$. *On trace ensuite le symétrique de cette partie par rapport à la première bissectrice. Et on complète la courbe en traçant le symétrique de ce qu'on a obtenu par rapport au centre O.*
(b) $x(t)$ *et* $y(t)$ *sont indéfiniment dérivables sur* $\mathbb{R}$, *donc* $F(t)$ *est de classe* C^∞.

Et l'on a $\begin{cases} x'(t) & = \dfrac{6(1-3t^4)}{(1+t^4)^2} \\ y'(t) & = \dfrac{6t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2} \end{cases}$

Ce qui donne $(x'(t) = 0$ *et* $t \in [0,1] \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}})$, $y'(t) \neq 0$ *sur* $[0,1]$.
(c) D'où le tableau de variation :

t	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
x'		$+$	0	$-$	
y'		$+$		$+$	
x	0	$\nearrow$		$\searrow$	
y	0	$\nearrow$		$\nearrow$	

D'où le tracé de la courbe paramétrée :

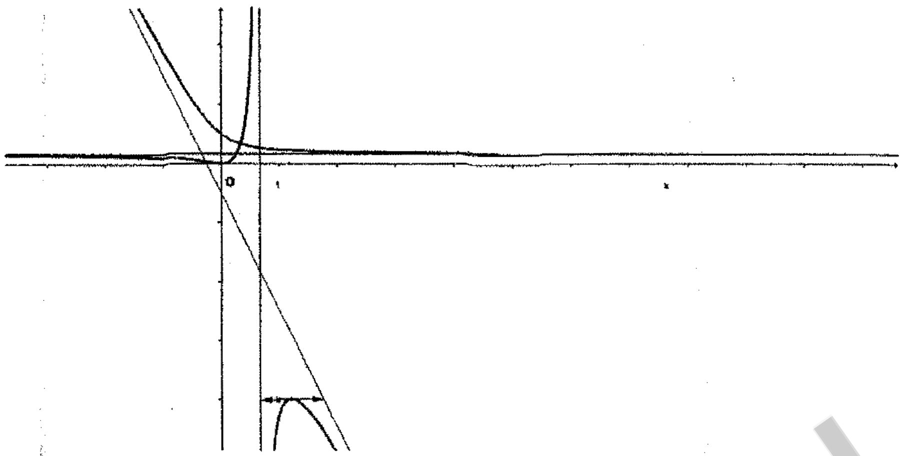


En montant de O à A (suivant la flèche) on obtient la partie de la courbe pour $t \in [0,1]$.
On trace le symétrique de cette partie par rapport à la première bissectrice pour avoir le tracé pour $t \in [0,1]$ *et* $t \in [1,+\infty[$.
Et on termine en traçant le symétrique par rapport à O pour avoir toute la courbe pour $t \in \mathbb{R}$.

2- Etude de la courbe $F(t) = (x(t), y(t))$ *où* $\begin{cases} x & = \frac{t}{t^2-1} \\ y & = \frac{1}{t^2-3t+2} \end{cases}$
(a) D'abord $D_F =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$.
On ne remarque ni symétrie, ni périodicité. On étudie, donc, F *sur* D_F.
(b) Les limites aux bornes et les branches infinies ont été étudiés dans les exercices précédents.
(c) $x(t)$ *et* $y(t)$ *sont des fractions rationnelles en* t, *donc indéfiniment dérivables sur* D_F. *Donc* $F(t)$ *de classe* C^∞ *sur* D_F.
Et l'on a $x'(t) = \dfrac{-(1+t^2}{(t^2-1)^2}$ *et* $y'(t) = \frac{-2t+3}{(t^2-3t+2)^2}$.
D'où le tableau de variation :

t	$-\infty$		-1		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
x'		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$		$-$		$-$	
y'		$+$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
x	0	$\searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow$	$\frac{6}{5}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$	$\nearrow +\infty$	$\|$	$-\infty \nearrow$	-4	$\searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow$	0

(d) Pour tracer la courbe, on trace d'abord les asymptotes qu'on a déjà étudiées dans les exercices sur l'étude des branches infinies (voir précédemment).
La courbe paramétrée aura l'allure suivante :



La partie de la courbe qui commence de $(0,0)$ et se dirige vers la gauche c'est pour $t \in]-\infty,-1[$.
La partie de la courbe qui commence de $(0,0)$ et vers le haut c'est pour $t \in]2,+\infty[$.
La partie de la courbe qui est au dessus c'est pour $t \in]-1,1[$.
Et la partie de la courbe qui est au dessous (en bas) c'est pour $t \in]1,2[$.

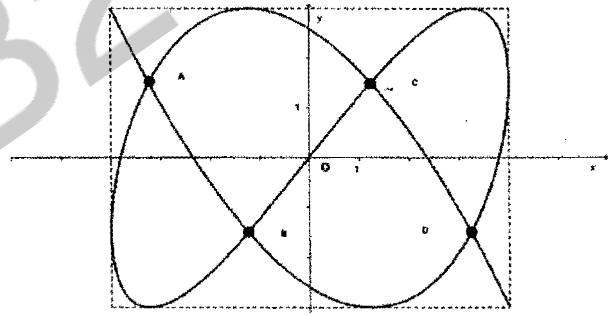
3- Etude de la courbe $F(t) = (x(t), y(t))$ où $\begin{cases} x &= 4\sin(\frac{t}{5}) \\ y &= 3\sin(\frac{t}{3}) \end{cases}$

(a) D'abord $x(t)$ et $y(t)$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, donc $D_F = \mathbb{R}$.
En plus en prenant $T = 5\times3\times2\pi = 30\pi$, on a $\begin{cases} x(t+T) &= 4\sin(\frac{t+30\pi}{5}) = 4\sin(\frac{t}{5}) = x(t) \\ y(t+T) &= 3\sin(\frac{t+30\pi}{3}) = 3\sin(\frac{t}{3}) = y(t) \end{cases}$
$F(t)$ est donc, périodique de période $T = 30\pi$.
Il suffit donc d'étudier $F(t)$ un intervalle de longueur 30π.
Remarque (*) :
Sachant que $\sin(\pi - x) = -\sin(x)$ et en écrivant que
$x(a-t) = 4\sin(\frac{a-t}{5}) = 4\sin(\frac{a}{5} - \frac{t}{5}) = -4\sin(\frac{t}{5})$ si $\frac{a}{5}$ est un multiple impair de π.
De même pour $y(t)$ si $\frac{a}{3}$ est un multiple impair de π.
Par suite avec $a = 15\pi$ ça marche : $F(15\pi - t) = -F(t)$.
Il suffit donc d'étudier $F(t)$ sur un intervalle de longueur 15π.
Comme $F(-t) = -F(t)$, la courbe est symétrique par rapport à l'origine $O = (0,0)$.
Par suite on choisit comme intervalle d'étude $E_F = [0, \frac{15\pi}{2}]$.
On complète ensuite la courbe par symétrie par rapport à $O = (0,0)$.

(b) $x(t)$ et $y(t)$ sont indéfiniment dérivables et $\begin{cases} x'(t) &= \frac{4}{5}\cos(\frac{t}{5}) \\ y'(t) &= \cos(\frac{t}{3}) \end{cases}$
Et l'on a pour $t \in [0, 15\pi]$:
$x'(t) = 0 \iff \frac{t}{5} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \iff t = \frac{5\pi}{2},\ t = \frac{15\pi}{2}$ *ou* $t = \frac{25\pi}{2}$
Et pour $t \in [0, 15\pi]$:
$y'(t) = 0 \iff \frac{t}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \iff t = \frac{3\pi}{2},\ t = \frac{9\pi}{2},\ t = \frac{15\pi}{2},\ t = \frac{21\pi}{2}$ *ou* $t = \frac{27\pi}{2}$
D'où le tableau de variation suivant fait en utilisant la périodicité et l'imparité. Si on utilise la remarque (1) on prend seulement sa moitié :

t	0		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$		$\frac{9\pi}{2}$		$\frac{15\pi}{2}$		$\frac{21\pi}{2}$		$\frac{25\pi}{2}$		$\frac{27\pi}{2}$		$\frac{30\pi}{2}$
x'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	α	$\nearrow$	4	$\searrow$	β	$\searrow$	-4	$\nearrow$	β	$\nearrow$	4	$\searrow$	α	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	γ	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	γ	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

Où $\alpha = 4\sin 3\pi/10$, $\beta = 4\sin\pi/10$ et $\gamma = 3\sin\pi/6$.
On trace la partie de la courbe correspondant à ce tableau sachant que lorsque $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$ on a une tangente horizontale et que lorsque $y'(t) \neq 0$ et $x'(t) = 0$ on a une tangente verticale.
On trace ensuite le symétrique par rapport à O.
D'où le tracé de la courbe paramétrée donnée.



4- Etude de la courbe $F(t) = (x(t), y(t))$ où $\begin{cases} x &= \frac{(1+2t)^2}{2(3-2t)(1-2t)} \\ y &= \frac{(1+2t)^2}{4(3-2t)} \end{cases}$

(a) D'abord $D_F =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\cap]\frac{3}{2}, +\infty[$.
(b) Les limites aux bornes (voir exercices précédents) :
$\lim_{t\to-\infty} F(t) = (\frac{1}{2}, +\infty)$ *donc $x = \frac{1}{2}$ asymptote verticale.*
$\lim_{t\to\frac{1}{2}^-} F(t) = (+\infty, \frac{1}{2})$ *donc $y = \frac{1}{2}$ asymptote horizontale.*
$\lim_{t\to\frac{1}{2}^+} F(t) = (-\infty, \frac{1}{2})$ *donc $y = \frac{1}{2}$ asymptote horizontale.*
$\lim_{t\to\frac{3}{2}^-} F(t) = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{t\to\frac{3}{2}^-} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$ *et* $\lim_{t\to\frac{3}{2}^-} (y(t) - (-x(t))) = -2$
donc $y = -x - 2$ est une asymptote oblique.
$\lim_{t\to\frac{3}{2}^-} F(t) = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{t\to\frac{3}{2}^+} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$ *et* $\lim_{t\to\frac{3}{2}^+} (y(t) - (-x(t))) = -2$
donc $y = -x - 2$ est une asymptote oblique.

$\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = (\frac{1}{2}, -\infty)$ *donc* $x = \frac{1}{2}$ *asymptote verticale.*

(c) $x(t)$ *et* $y(t)$ *sont des fractions rationnelles donc indéfiniment dérivables sur leurs ensembles de définitions. Et l'on a :*

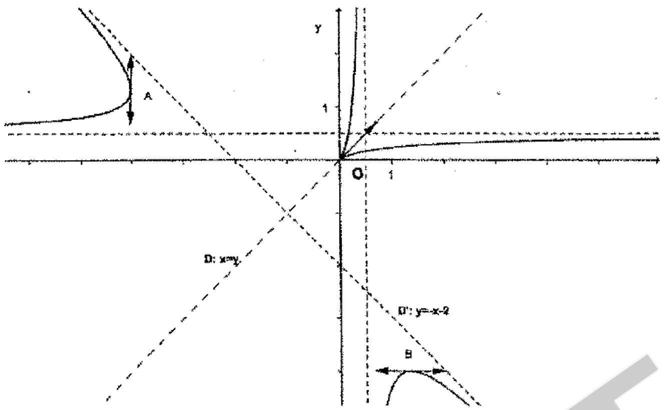
$x'(t) = \dfrac{8(1+2t)(-6t+5)}{4(3-2t)^2(1-2t)^2}$ *et* $\left(x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = \frac{5}{6}\right)$.

$y'(t) = \dfrac{8(1+2t)(-2t+7)}{16(3-2t)^2}$ *et* $\left(y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{2} \text{ ou } t = -\frac{1}{2}\right)$.

D'où le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{6}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		$-$	
y'		$-$	0	$+$		$+$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
x	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$

Ce qui nous donne le tracé suivant :



5- *Etude de la courbe* $F(t) = (x(t), y(t))$ *où* $\begin{cases} x(t) &= 4\cos 2t \\ y(t) &= 2\sin 2t - 2\sin t \end{cases}$

(a) $x(t)$ *et* $y(t)$ *sont définies sur* $\mathbb{R}$, *donc l'ensemble de définition de* $F(t)$ *est* $D_F = \mathbb{R}$.
$x(t)$ *et* $y(t)$ *sont périodiques de périodes* 2π, *l'étude de* $F(t)$ *sur l'intervalle* $[-\pi, \pi]$ *de longueur* 2π *suffit.*

Comme $F(-t) = (x(-t), y(-t)) = (4\cos(-2t), 2\sin(-2t) - 2\sin(-t))$
$= (4\cos 2t, 2\sin 2t - 2\sin t) = (x(t), -y(t))$

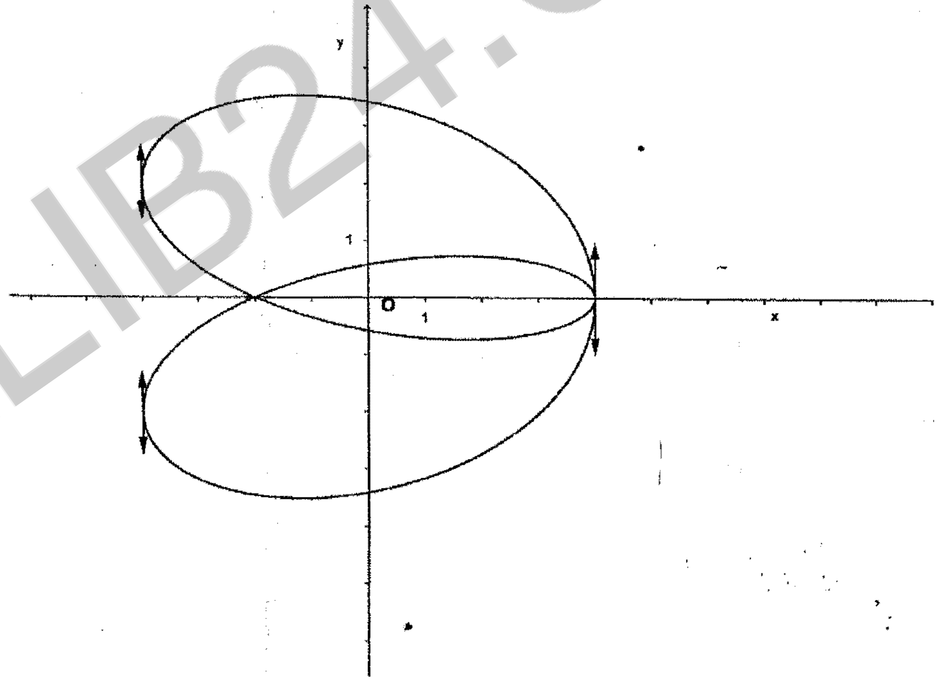
La courbe est symétrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox}$.
Par suite l'étude de $F(t)$ *sur l'intervalle* $E_F = [0, \pi]$ *suffit.*

(b) On a $x(t)$ *et* $y(t)$ *sont indéfiniment dérivables et l'on a sur* $[0, \pi]$:
$x'(t) = -8\sin 2t$ *et* $\left(x'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0,\ t = \frac{\pi}{2} \text{ ou } t = \pi\right)$.
$y'(t) = 4\cos 2t - 2\cos t = 8\cos^2 t - 2\cos t - 4$ *et* $\left(y'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \text{ ou } \cos t = \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$

(c) D'où le tableau de variation de $F(t)$ *pour* $t \in [0, \pi]$:

t	0		α_1		$\frac{\pi}{2}$		α_2		π
x'	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
y'	2	$+$	0	$-$	-4	$-$	0	$+$	6
x	4	$\searrow$	x_1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	x_2	$\nearrow$	4
y	0	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	-2	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	0

On trace la partie de la courbe pour $t \in [0, \pi]$ *en suivant les indications de ce tableau, en faisant des calculs approchés, sachant qu'aux points* $(4, 0)$ *(pour* $t = 0$*),* $(-4-2)$ *(pour* $t = \frac{\pi}{2}$*) et* $(4, 0)$ *(pour* $t = \pi$*) on a des tangentes verticales (*$x' = 0$ *et* $y' \neq 0$*) et sachant qu'aux points* (x_1, y_1) *et* (x_2, y_2) *on a des tangentes horizontales (*$y' = 0$ *et* $x' \neq 0$*). On trace ensuite le symétrique de cette partie de la courbe par rapport à* $\overrightarrow{Ox}$ *de la boucle tracée, pour avoir enfin le tracé suivant :*



Remarque :
Lorsque t *décrit* $[0, \pi]$ *on a un seul point double c'est* $(4, 0) = F(0) = F(\pi)$.
Lorsque t *décrit* $[-\pi, \pi]$ *on a un point triple c'est* $(4, 0) = F(0) = F(\pi) = F(-\pi)$ *et un point double* $(-2, 0) = F(\frac{\pi}{3}) = F(-\frac{\pi}{3})$.
Et lorsque t *décrit* $]-\infty, +\infty[$ *tous les points de la courbe paramétrée étudiée sont multiples (Ils sont atteints par une infinité de* t*).*

6- Etude de la courbe $F(t)=(x(t),y(t))$ où $\begin{cases} x(t) &= 4e^{-\frac{1}{t}}\\ y(t) &= \frac{t}{2}e^{\frac{2}{t}}\end{cases}$

(a) D'abord $D_x = D_y = \mathbb{R}^*$ et donc $D_F = \mathbb{R}^*$.

(b) Limites aux bornes :

$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 4$ et $\lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{u\to0^-} \frac{1}{u}e^u = -\infty$.

Donc la droite D_1 : $x=4$ est une asymptote verticale (du coté $y\to-\infty$).

$\lim_{t\to0^-} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to0^-} y(t) = \lim_{u\to-\infty} \frac{e^u}{u} = 0$.

Donc la droite D_2 : $y=0$ est une asymptote horizontale.

$\lim_{t\to0^+} x(t) = 0$ et $\lim_{t\to0^+} y(t) = \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$.

Donc la droite D_3 : $x=0$ est une asymptote verticale.

$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 4$ et $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{u\to0^+} \frac{e^u}{u} = +\infty$.

Donc la droite D_4 : $x=4$ est une asymptote verticale (du coté $y\to+\infty$).

(c) $x(t)$ et $y(t)$ sont continues et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Et l'on a :

$x'(t) = \frac{4}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}$ et $x'(t)\neq 0\ \forall t\in\mathbb{R}^*$.

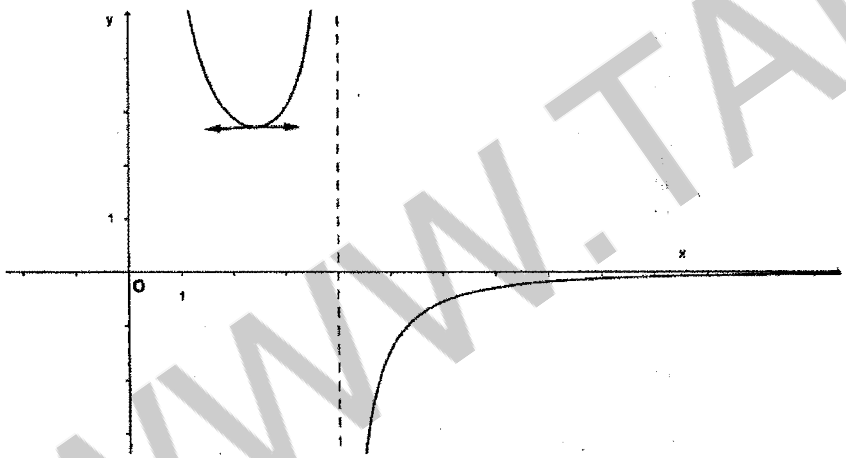
$y'(t) = (\frac{1}{2}-\frac{1}{t})e^{\frac{2}{t}}$ et $(y'(t)=0 \Leftrightarrow t=2)$.

On en déduit qu'au point $F(2) = (\frac{4}{\sqrt{e}}, e)$ on a une tangente horizontale ($y'(2)=0$ et $x'(2)\neq0$).

D'où le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		0			2		$+\infty$
x'		$+$	‖	‖	$+$		$+$	
y'		$+$	‖	‖	$-$	0	$+$	
x	4	↗	$+\infty$ ‖	‖ 0	↗	$\frac{4}{\sqrt{e}}$	↗	4
y	$-\infty$	↗	0 ‖	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Et par suite on obtient le tracé de la courbe étudiée suivant :



Solution 8.10. :

(a) L'ensemble de définition de l'astroïde d'équations $x=\cos^3 t$ et $y=\sin^3 t$ est évidemment $D_F=\mathbb{R}$.

Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques de période 2π. Il suffit de faire l'étude sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

Comme $x(-t)=x(t)$ et $y(-t)=-y(t)$ la courbe est symétrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox}$ et on réduit l'étude sur $[0,\pi]$.

En plus on a $x(\pi-t) = (\cos(\pi-t))^3 = (-\cos t)^3 = -\cos^3 t = -x(t)$ et $y(\pi-t) = (\sin(\pi-t))^3 = (\sin t)^3 = y(t)$

la courbe est symétrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{Oy}$ et on réduit l'étude sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Ceci car : $t\in[\frac{\pi}{2},\pi] \Longleftrightarrow (\pi-t)\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

(b) $x(t)$ et $y(t)$ sont indéfiniment dérivables sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et l'on a pour $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$:

$x'(t) = -3\sin t\cos^2 t$ et $(x'(t)=0 \Longleftrightarrow t=0$ ou $t=\frac{\pi}{2})$.

$y'(t) = 3\cos t\sin^2 t$ et $(y'(t)=0 \Longleftrightarrow t=0$ ou $t=\frac{\pi}{2})$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
x'	0	$-$	0
y'	0	$+$	0
x	1	↘	0
y	0	↗	1

On calcule ensuite :

$$\lim_{t\to0^+}\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \lim_{t\to0^+}\frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t\to0^+}\frac{3\cos t\sin^2 t}{-3\sin t\cos^2 t} = \lim_{t\to0^+}\frac{-\sin t}{\cos t} = 0,$$

par suite on a une tangente horizontale au point $(1,0)$.

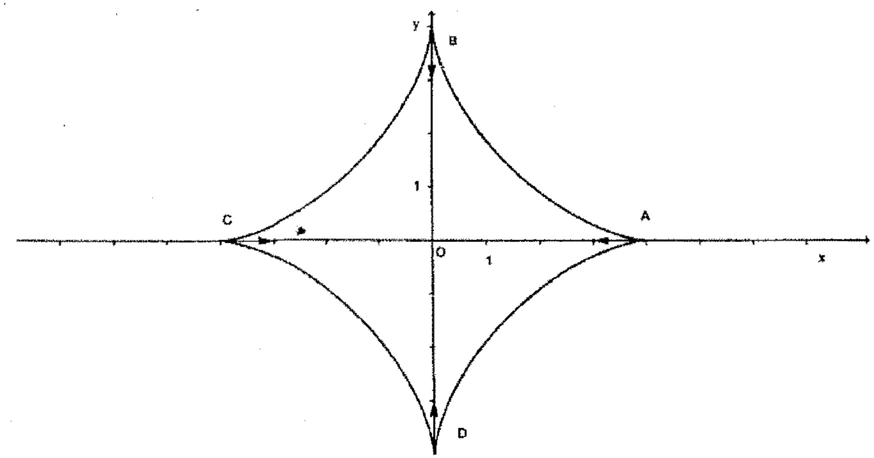
Et l'on a

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{3\cos t\sin^2 t}{-3\sin t\cos^2 t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-\sin t}{\cos t} = -\infty,$$

par suite on a une tangente verticale au point $(0,1)$.

On trace donc le premier quart, on rajoute son symétrique par rapport à l'axe des x, son symétrique par rapport à l'axe des y et son symétrique par rapport au centre O.

Ce qui donne le tracé suivant :



A partir de ce tracé on remarque que les quatre sommets de cette courbe sont des points de rebroussement de première espèce.

Solution 8.11. :

Etude de la courbe paramétrée $F(t)$ définie par $x = \frac{t-\sin t}{2}$ et $y = 1-\cos t$:

(a) $D_F = \mathbb{R}$.

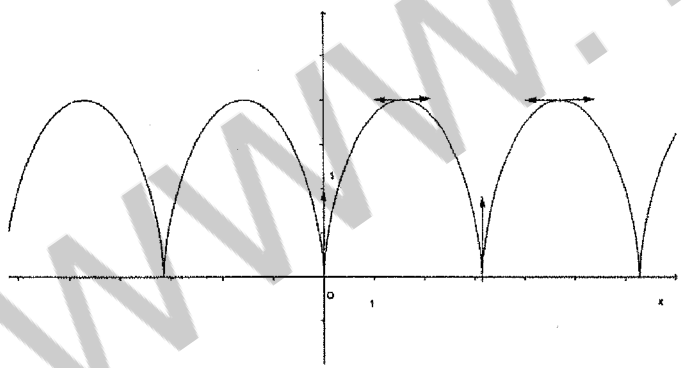
(b) On remarque que
$y(t+2\pi) = y(t)$ *et* $x(t+2\pi) = \frac{(t+2\pi)-\sin(t+2\pi)}{2} = \frac{(t-\sin t)}{2} + \pi = x(t)+\pi$.
Ce qui signifie que le point $F(t+2\pi)$ est obtenu en translatant le point $F(t)$ d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u} = (\pi, 0)$ (translation horizontale).
Il suffit donc d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi,\pi]$.
En plus on a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. Donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{Oy}$.
On choisit donc comme intervalle d'étude $E_F = [0,\pi]$.

(c) $x(t)$ et $y(t)$ sont continues et indéfiniment dérivables et l'on a pour $t \in [0,\pi]$:
$x'(t) = \frac{1-\cos t}{2}$ *et* $(x'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 1 \Leftrightarrow t = 0)$.
$y'(t) = \sin t$ *et* $(y'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ *ou* $t = \pi)$.
D'où le tableau de variation suivant :

t	0		π
x'	0	$+$	1
y'	0	$+$	0
x	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	$\nearrow$	2

D'après ce tableau on a une tangente horizontale au point $(\frac{\pi}{2}, 2)$ obtenu pour $t = \pi$, ceci car $y'(\pi) = 0$ et $x'(\pi) \neq 0$.

Et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{y''(t)}{x''(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\cos t}{\frac{\sin t}{2}} = +\infty$,
donc on a une tangente verticale au point $(0,0)$ atteint pour $t = 0$.
On trace la partie de la courbe pour $t \in [0,\pi]$ suivant le tableau ci-dessus. On rajoute le symétrique de cette partie de la courbe par rapport à l'axe $\overrightarrow{Oy}$. On trace ensuite, de part et d'autre, le translaté de ce qu'on a obtenu.
D'où Le tracé suivant :



Solution 8.12. :

Transformation de certaines équations cartésiennes en coordonnées polaires :

1. *L'équation $2x - 2y - \sqrt{2} = 0$, devient*
   $2\rho\cos\theta - 2\rho\sin\theta - \sqrt{2} = 0$
   Ce qui nous permet d'exprimer ρ en fonction de θ. D'où l'équation polaire
   $$\rho = \frac{\sqrt{2}}{2(\cos\theta - \sin\theta)} = \frac{1}{2\cos(\theta + \frac{\pi}{4})}$$
2. *L'équation $3x + y - 1 = 0$, devient*
   $3\rho\cos\theta + \rho\sin\theta = 1$
   D'où l'équation polaire
   $$\rho = \frac{1}{3\cos\theta + \sin\theta}$$
3. *L'équation $x = 3y^2$, donne $\rho\cos\theta = 3\rho^2\sin^2\theta$.*
   En simplifiant par ρ (si rho $\neq 0$) on obtient $\cos\theta = 3\rho\sin^2\theta$.
   D'où l'équation polaire
   $$\rho = \frac{\cos\theta}{3\sin^2\theta}$$
   (le cas $\rho = 0$ on le retrouve pour $\theta = \frac{\pi}{2}$).
4. *L'équation $2xy = x - y$ devient $2\rho^2\sin\theta\cos\theta = \rho(\cos\theta - \sin\theta)$.*
   En simplifiant par ρ (si rho $\neq 0$) on obtient $2\rho\sin\theta\cos\theta = \cos\theta - \sin\theta$.
   D'où l'équation polaire
   $$\rho = \frac{\cos\theta - \sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$
   (le cas $\rho = 0$ on le retrouve pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ avec $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$).
5. *L'équation $x(x+y) - 3y = 0$ devient*
   $\rho\cos\theta(\rho\cos\theta + \rho\sin\theta) - 3\rho\sin\theta = 0$
   En simplifiant par ρ (si $\rho \neq 0$) on obtient
   $$\rho = \frac{3\sin\theta}{\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta)} = \frac{3\tan\theta}{\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}$$
   (le cas $\rho = 0$ on le retrouve pour $\theta = 0$).

Solution 8.13. :

1. *En éliminant t dans les deux équations $x = t + 2$ et $y = 3 - 2t$, on obtient $2x + y = 7$ et donc $2\rho\cos\theta + \rho\sin\theta = 7$.*
   D'où l'équation polaire
   $$\rho = \frac{7}{2\cos\theta + \sin\theta}$$
2. *En éliminant t dans les équations $x = 3t$ et $y = t^2$, on trouve*
   $y = \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{9}$.

On remplace ensuite pour avoir $9\rho\sin\theta = \rho^2\cos^2\theta$.
Et après simplification par $\rho \neq 0$, *on obtient*

$$\rho = \frac{9\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

(le cas $\rho = 0$ *on le retrouve pour* $\theta = 0$*).*

3. *En éliminant t dans les équations* $x = 1 - t$ *et* $y = t - \frac{1}{t}$,
on trouve $t = 1 - x$ *et donc* $y = (1-x) - \frac{1}{1-x} = \dfrac{x^2 - 2x}{1-x}$
Ensuite $y(1-x) = x^2 - 2x$, *puis* $x^2 + xy = 2x + y$.
Ce qui donne $\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\cos\theta\sin\theta = 2\rho\cos\theta + \rho\sin\theta$
D'où $\rho = \dfrac{2\cos\theta + \sin\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta}$.

Solution 8.14. *:*

1. *L'équation* $\rho = \dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\frac{\theta}{2}}$, *s'écrit*
$\rho = \dfrac{1}{\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1}{\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta}$
Et donc $\rho\cos\theta + \frac{1}{2}\rho\sin\theta = 1$.
D'où l'équation cartésienne qui est celle d'une droite

$$x + \frac{1}{2}y = 1$$

2. *L'équation* $\rho = \dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}\left(3\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\left(3\cos^2\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2}}$
donne
$\rho = \dfrac{1}{\frac{3}{2}(\cos\theta + 1) - \sin\theta - \frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3\cos\theta - 2\sin\theta}$
et donc $3\rho\cos\theta - 2\rho\sin\theta = 2$.
D'où l'équation cartésienne

$$3x - 2y = 2$$

3. *L'équation* $\rho = \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{3\cos\theta\sin\theta}$ *s'écrit*
$3\rho^2\cos\theta\sin\theta = \rho(\cos\theta - \sin\theta)$.
D'où l'équation cartésienne

$$3xy = x - y$$

4. *L'équation* $\rho = \dfrac{5\tan\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$ *s'écrit*
$\rho(\cos\theta + \sin\theta) = \rho\cos\theta + \rho\sin\theta = 5\tan\theta$
D'où l'équation cartésienne

$$x + y = 5\frac{y}{x}$$

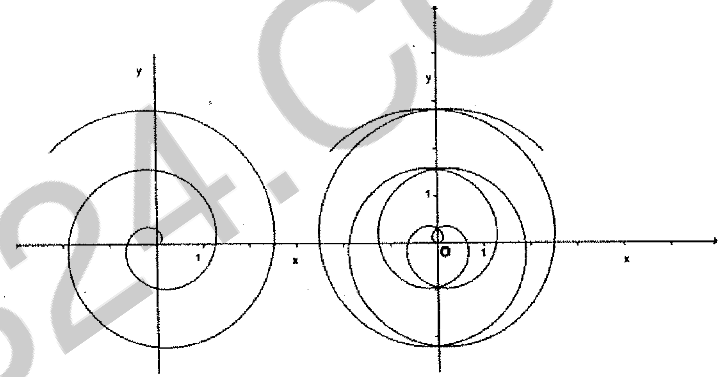
Solution 8.15. *:*

1) Etude de la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{1}{5}\theta$ *:*
a) L'ensemble de définition est $D_\rho = \mathbb{R}$.
b) $\rho(-\theta) = \frac{1}{5}(-\theta) = -\rho(\theta)$, $\rho(\theta)$ *est impaire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe* $\overrightarrow{Oy}$.

Il suffit d'étudier $\rho(\theta)$ *sur* $D_E = \mathbb{R}_+$ *et de tracer la partie de la courbe pour* $\mathbb{R}^+$ *et de rajouter le symétrique de cette partie par rapport à* $\overrightarrow{Oy}$.
c) $\rho(\theta)$ *est continue, indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\rho' = \frac{1}{5}$.
D'où le tableau de variation

θ	0	$+\infty$
ρ'	$+$	
ρ	0 $\nearrow$	$+\infty$

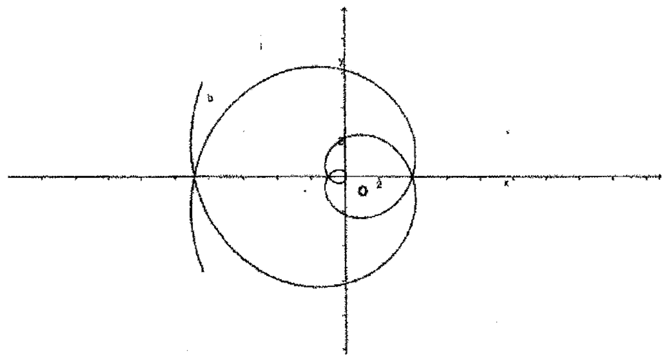
Ce qui donne le tracé suivant : à gauche la partie de la courbe pour $\theta \in [0, +\infty[$ *et à droite toute la courbe pour* $\theta \in \mathbb{R}$ *:*



En général, on obtient la même allure pour les courbes définies par $\rho = a\theta$ *(où a est une constante dans* $\mathbb{R}$*).*
2) Etude de la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{1}{10}\theta^2$ *:*
a) L'ensemble de définition est $D_\rho = \mathbb{R}$.
b) On a $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, $\rho(\theta)$ *est paire,*
Donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox}$.
Il suffit donc d'étudier $\rho(\theta)$ *sur* $D_E = \mathbb{R}_+$ *et de tracer la partie de la courbe pour* $\mathbb{R}^+$ *et de rajouter le symétrique de cette partie par rapport à* $\overrightarrow{Ox}$.
c) $\rho(\theta)$ *est continue, indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\rho' = \frac{1}{5}\theta$.
D'où le tableau de variation

θ	0	$+\infty$
ρ'	$+$	
ρ	0 $\nearrow$	$+\infty$

Ce qui donne le tracé suivant :



3) *Etude de la courbe d'équation polaire* $\rho = \dfrac{\theta^2+10}{2\theta^2+1}$:

a) *L'ensemble de définition est* $D_\rho = \mathbb{R}$.

b) *On a* $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, $\rho(\theta)$ *est paire.*

Donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox}$.

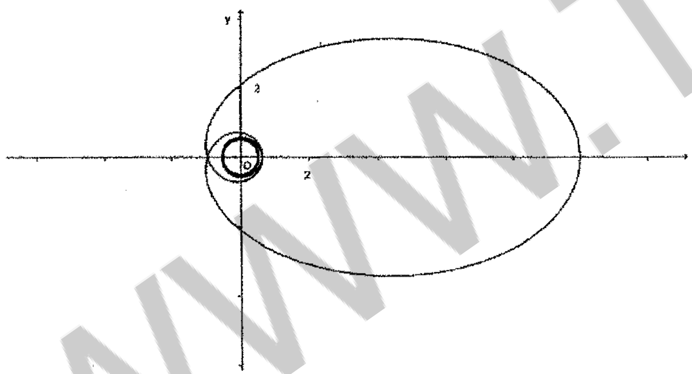
Il suffit donc d'étudier $\rho(\theta)$ *sur* $D_E = \mathbb{R}_+$ *et de tracer la partie de la courbe pour* $\mathbb{R}_+$ *et de rajouter le symétrique de cette partie par rapport à* $\overrightarrow{Ox}$.

c) $\rho(\theta)$ *est continue, indéfiniment dérivable sur* D_E *et* $\rho' = -\dfrac{38\theta}{(2\theta^2+1)^2}$.

D'où le tableau de variation

θ	0		$+\infty$
ρ'		$-$	
ρ	10	$\searrow$	$1/2$

Ce qui donne le tracé suivant :



4) *Etude de la courbe d'équation polaire* $\rho = \sin 3\theta$:

a) *L'ensemble de définition est* $D_\rho = \mathbb{R}$.

b) *On a* $\rho(\theta + \frac{2\pi}{3}) = \sin(3\theta + 2\pi) = \sin 3\theta = \rho(\theta)$. *La période est* $T = \frac{2\pi}{3}$.

Il suffit d'étudier $\rho(\theta)$ *sur un intervalle de longueur* $\frac{2\pi}{3}$.

En plus, on a $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, $\rho(\theta)$ *est impaire. Donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe* $\overrightarrow{Oy}$.

Il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur $\frac{\pi}{3}$.

Et en plus $\rho(\frac{\pi}{3} - \theta) = \sin(3(\frac{\pi}{3} - \theta)) = \sin(\pi - 3\theta) = \sin 3\theta = \rho(\theta)$.

Ce qui signifie que la courbe est symétrique par rapport à la droite Δ *d'équation* $\theta_o = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$.

Il suffit donc de faire l'étude sur un intervalle de longueur $\frac{\pi}{6}$ *et de tracer la partie de la courbe pour* $D_E = [0, \frac{\pi}{6}]$ *et de rajouter le symétrique de cette partie par rapport à la droite* Δ, *ensuite rajouter le symétrique de ce qu'on a obtenu par rapport à* $\overrightarrow{Oy}$ *et par rapport à la droite* Δ.

c) $\rho(\theta)$ *est continue, indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\rho' = 3\cos 3\theta$.

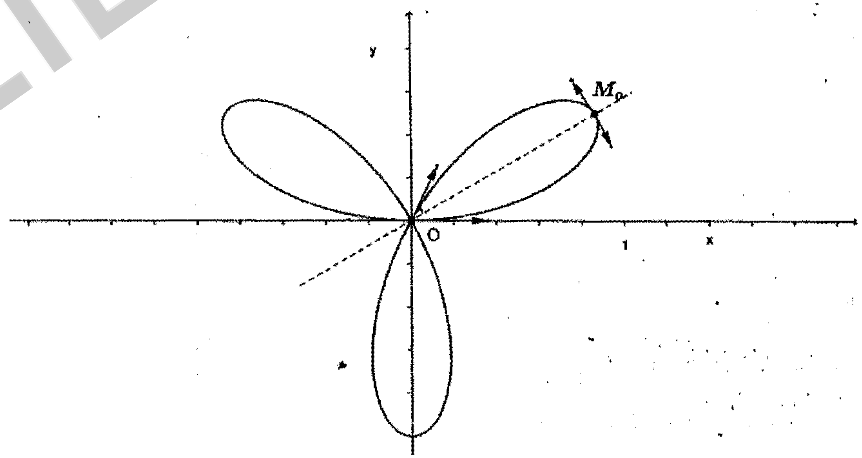
Comme $\rho'(\theta) = 0$ *sur* $[0, \frac{\pi}{6}]$ *équivaut à* $3\theta = \frac{\pi}{2}$ *et donc à* $\theta = \frac{\pi}{6}$, *le vecteur tangent au point* M_o *déterminé par* $\theta = \frac{\pi}{6}$ *et* $\rho(\frac{\pi}{6}) = 1$ *est orthogonal au vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *(voir dessin).*

Comme $\rho'(0) = 3$, $\rho(0) = 0$ *et* $\frac{\rho(0)}{\rho'(0)} = 0$ *la tangente est horizontale au point* $O(0,0)$ *(déterminé par* $\rho = 0$ *et* $\theta = 0$*).*

D'où le tableau de variation

θ	0		$\frac{\pi}{6}$
ρ'	3	$+$	0
ρ	0	$\nearrow$	1

Ce qui donne le tracé suivant :



5) *Etude de la courbe d'équation polaire* $\rho = 1 + 2\cos\theta$:

a) *L'ensemble de définition est* $D_\rho = \mathbb{R}$.

b) *On a* $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$. *La période est* $T = 2\pi$.

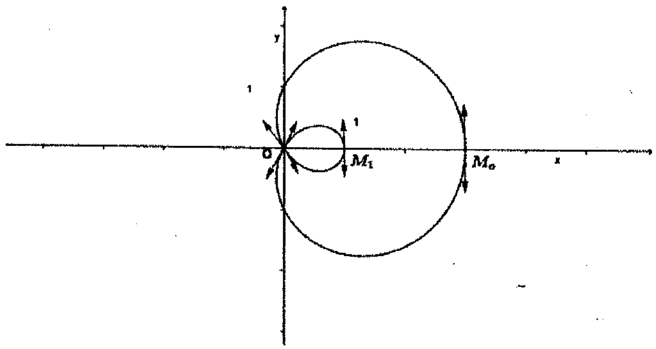
Il suffit d'étudier $\rho(\theta)$ *sur un intervalle de longueur* 2π.

En plus, on a $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, $\rho(\theta)$ *est paire. Donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe* $\overrightarrow{Ox}$.

Il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0,\pi]$ de longueur π et de tracer la partie de la courbe pour $D_E = [0,\pi]$ et de rajouter le symétrique de cette partie par rapport à $\overrightarrow{Ox}$.
c) $\rho(\theta)$ est continue, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\rho' = -2\sin\theta$.
Comme $\rho'(\theta) = 0$ sur $[0,\pi]$ équivaut à $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, le vecteur tangent au point M_o déterminé par $\theta = 0$ et $\rho(0) = 3$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OM_o}$ et le vecteur tangent au point M_1 déterminé par $\theta = \pi$ et $\rho(0) = -1$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ (voir dessin).
D'où le tableau de variation

θ	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
ρ'	0	$-$		$-$	0
ρ	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Ce qui donne le tracé suivant :

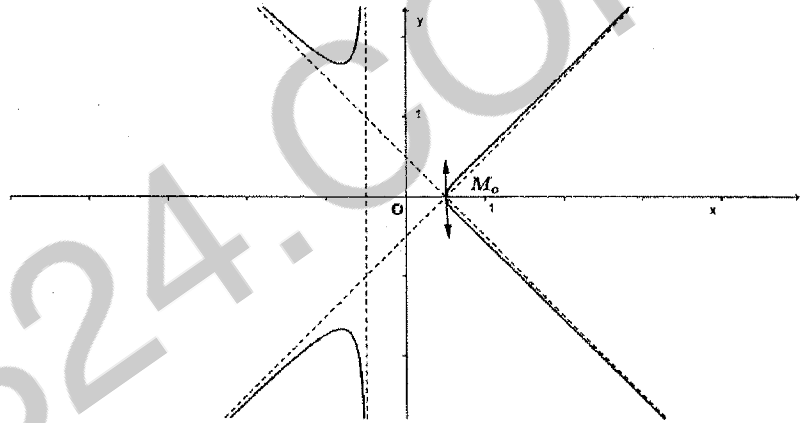


6) Etude de la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta + \cos 3\theta}$:
a) On sait que
$\cos 3\theta = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta$
et donc $\cos\theta + \cos 3\theta = 2\cos^2\theta\cos\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta = 2\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$
$= 2\cos\theta\cos 2\theta$
Par suite $\rho(\theta) = \dfrac{1}{2\cos\theta\cos 2\theta}$.
Ainsi $\rho(\theta+2\pi) = \rho(\theta)$, $\rho(\theta)$ est périodique de période 2π. On réduit l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur 2π
En plus $\rho(\theta+\pi) = \dfrac{1}{2\cos(\theta+\pi)\cos(2\theta+2\pi)} = -\dfrac{1}{2\cos\theta\cos 2\theta} = -\rho(\theta)$. *On réduit donc l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur π par exemple $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.*
En plus, on a $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, $\rho(\theta)$ est paire. Donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox}$.
Il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
b) Sur l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$, $\rho(\theta)$ est définie si et seulement si $\cos\theta\cos 2\theta \neq 0$. Ce qui équivaut à $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ et $\theta \neq \frac{\pi}{4}$.
L'ensemble d'étude est $D_E = [0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.
c) $\rho(\theta)$ est continue, indéfiniment dérivable sur D_E et $\rho' = \frac{2\sin\theta(6\cos^2\theta - 1)}{4\cos^2\theta\cos^2 2\theta}$.
Comme $\rho'(\theta) = 0$ sur $[0,\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ équivaut à $\theta = 0$ ou $\theta = \theta_1$ (avec $\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}$), le vecteur tangent au point M_o déterminé par $\theta = 0$ et $\rho(0) = \frac{1}{2}$ est orthogonal au

vecteur $\overrightarrow{OM_o}$ et le vecteur tangent au point M_1 déterminé par $\theta = \theta_1$ et $\rho(\theta_1) \approx -1.8$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ (voir dessin).
D'où le tableau de variation

θ	0			$\frac{\pi}{4}$			θ_1			$\frac{\pi}{2}$
ρ'	0	$+$		$\|$		$+$	0	$-$		$\|$
ρ	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|$	$-\infty$	$\nearrow$	-1.8	$\searrow$	$-\infty$	$\|$

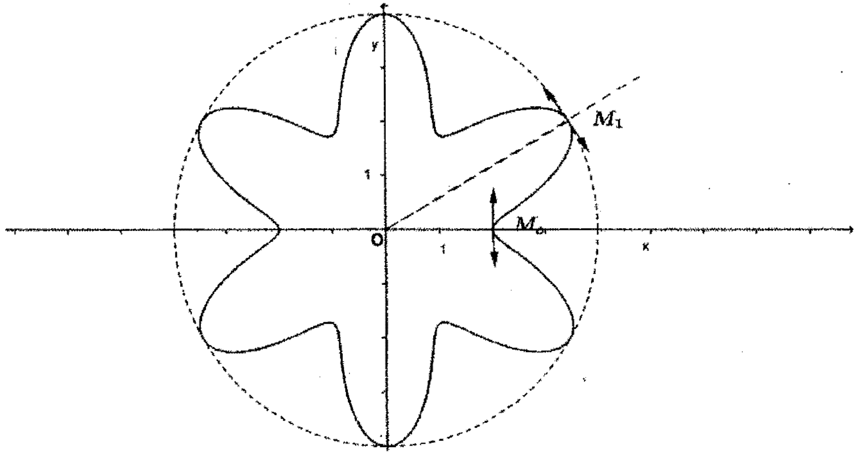
Ce qui donne le tracé suivant qu'on a complété par symétrie :



7) Etude de la courbe d'équation polaire $\rho = 3 - \cos 6\theta$:
a) L'ensemble de définition est $D_\rho = \mathbb{R}$.
b) On a $\rho(\theta + \frac{\pi}{3}) = 3 - \cos(6\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$. La période est $T = \frac{\pi}{3}$.
Il suffit d'étudier $\rho(\theta)$ sur un intervalle de longueur $\frac{\pi}{3}$, par exemple $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.
En plus, on a $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, $\rho(\theta)$ est paire. Donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox}$ et il suffit de prendre comme ensemble d'étude $D_E = [0, \frac{\pi}{6}]$.
c) $\rho(\theta)$ est continue, indéfiniment dérivable sur D_E et $\rho' = 6\sin 6\theta$.
Comme $\rho'(\theta) = 0$ sur $[0, \frac{\pi}{6}]$ équivaut à $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = 0$ et donc le vecteur tangent au point M_1 déterminé par $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $\rho(\frac{\pi}{6}) = 4$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ et le vecteur tangent au point M_o déterminé par $\theta = 0$ et $\rho(0) = 2$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OM_o}$ (voir dessin).
D'où le tableau de variation

θ	0		$\frac{\pi}{6}$
ρ'	0	$+$	0
ρ	2	$\nearrow$	4

Ce qui donne le tracé suivant, inscrit dans un cercle de rayon $R = 4$:



8) *Etude de la courbe d'équation polaire* $\rho = \dfrac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\cos 2\theta}$:

D'abord on sait que $\cos a + \cos b = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$. *Ce qui nous permet d'écrire que*

$$\rho = \frac{2\cos\theta\sin\theta}{2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}.$$

a) *On a* $\rho(\theta+2\pi)=\rho(\theta)$, *il suffit donc de faire l'étude sur un intervalle de longueur* 2π.
En plus on a $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, $\rho(\theta)$ *est impaire. Donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe* $\overrightarrow{Oy}$.
Il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur π, *par exemple* $[0,\pi]$.
Le dénominateur $\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ *est nul sur cet intervalle lorsque* $\theta=\pi$ *ou* $\theta=\frac{\pi}{3}$.
L'intervalle d'étude sera donc $D_E = [0,\frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3},\pi[$.

c) $\rho(\theta)$ *est continue, indéfiniment dérivable sur* D_E *et* $\rho' = \dfrac{2(1+\cos^3\theta)}{(\cos\theta+\cos 2\theta)^2}$ *toujours positif sur* D_E.
d) *D'où le tableau de variation*

θ	0			$\frac{\pi}{3}$			$\frac{\pi}{2}$			π
ρ'		$+$		$\Vert$		$+$		$+$		$\Vert$
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert$

e) *On a* $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-}\rho(\theta)=+\infty$, *donc une branche infinie.*

Comme $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-}\frac{y}{x} = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-}\tan\theta = \sqrt{3}$

et $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-}(y-\sqrt{3}x) = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-}\dfrac{\sin 2\theta(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)}{\cos 2\theta+\cos\theta}$

$$= \sin 2\tfrac{\pi}{3}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-}\frac{(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)}{\cos 2\theta+\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-}\frac{(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)}{-2\sin 2\theta-\sin\theta}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1/2+\sqrt{3}.\sqrt{3}/2}{2.\sqrt{3}/2+\sqrt{3}/2} = -\frac{2}{3}.$$

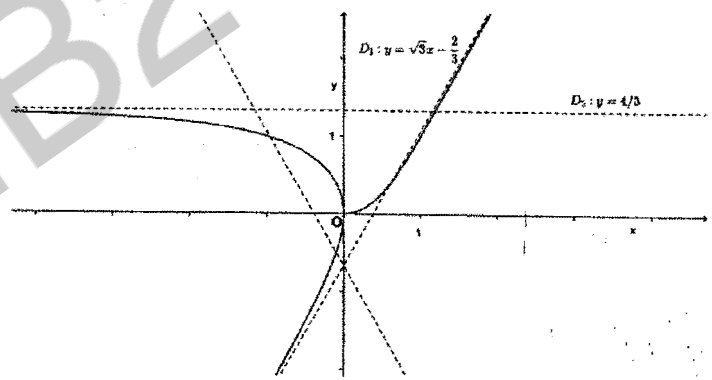
Ce calcul est fait en passant par la règle de l'Hôpital.
Ainsi la droite D_1 : $y=\sqrt{3}x-\frac{2}{3}$ *est une asymptote oblique à la courbe lorsque* $\theta\to\frac{\pi}{3}^-$ *(avec* $\rho\to+\infty$, x *et* y *tendent tous les deux vers* $+\infty$*).*
De même, D_1 *est asymptote à la courbe lorsque* $\theta\to\frac{\pi}{3}^+$ *(avec* $\rho\to-\infty$, x *et* y *tendent tous les deux vers* $-\infty$*).*

Et l'on a $\lim\limits_{\theta\to\pi^-}\rho(\theta) = \lim\limits_{\theta\to\pi^-}\dfrac{2\cos 2\theta}{-2\sin 2\theta-\sin\theta} = \lim\limits_{\theta\to\pi^-}\dfrac{2\cos 2\theta}{-\sin\theta(4\cos\theta+1)} = +\infty$,
donc une branche infinie.
Comme $\lim\limits_{\theta\to\pi^-}x = \lim\limits_{\theta\to\pi^-}\rho(\theta)\cos\theta = \cos\pi\lim\limits_{\theta\to\pi^-}\rho(\theta) = -(+\infty) = -\infty$,

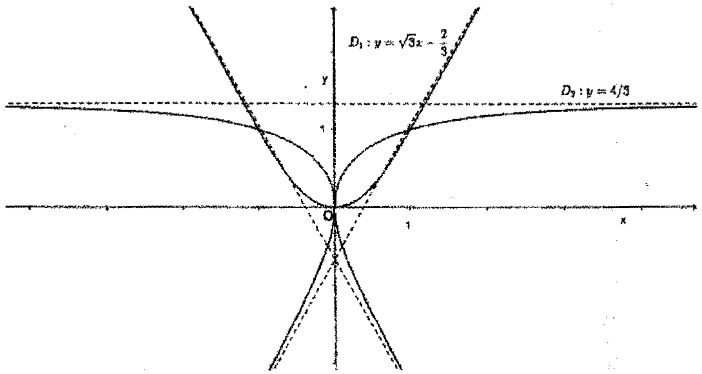
et $\lim\limits_{\theta\to\pi^-}y = \lim\limits_{\theta\to\pi^-}\rho(\theta)\sin\theta = \lim\limits_{\theta\to\pi^-}\dfrac{\sin 2\theta\sin\theta}{2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \lim\limits_{\theta\to\pi^-}\dfrac{\sin 2\theta 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$$= \lim_{\theta\to\pi^-}\frac{\sin 2\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{3\theta}{2}} = \lim_{\theta\to\pi^-}\frac{2\cos 2\theta\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin 2\theta}{-\frac{3}{2}\sin\frac{3\theta}{2}} = \frac{4}{3}$$

Ainsi la droite D_2 : $y=\frac{4}{3}$ *est une asymptote horizontale à la courbe lorsque* $\theta\to\pi^-$.
Ce qui donne les deux tracés suivants, le premier pour $\theta\in[0,\frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3},\pi[$:



et le deuxième c'est la courbe entière (en ajoutant le symétrique du premier morceau) :



A remarquer que :
La branche à droite du premier dessin correspond à la partie de la courbe quand θ décrit $[0, \frac{\pi}{3}[$, la partie de la courbe à gauche correspond à la partie de la courbe quand θ décrit $]\frac{\pi}{3}, \pi[$.

9) Etude de la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta\cos 2\theta}$:

a) On a $\rho(\theta+2\pi) = \rho(\theta)$, il suffit donc de faire l'étude sur un intervalle de longueur 2π.
En plus on a $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, $\rho(\theta)$ est impaire. Donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{Oy}$.
Il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur π, par exemple $[0,\pi]$.
Le dénominateur $1+\cos\theta\cos 2\theta$ est nul sur cet intervalle lorsque $\theta = \pi$.
L'intervalle d'étude sera donc $D_E = [0, \pi[$.
b) $\rho(\theta)$ est continue, indéfiniment dérivable sur D_E
et $\rho' = \dfrac{-4\cos^4\theta + 6\cos^2\theta + \cos\theta - 1}{(1+\cos\theta\cos 2\theta)^2} = \dfrac{P(\cos\theta)}{(1+\cos\theta\cos 2\theta)^2}$.
Où $P(X)$ est le polynôme $P(X) = -4x^4 + 6X^2 + X - 1$.
Remarquons que :
$P(\cos 0) = P(1) = 2 > 0$, $P(\cos\frac{\pi}{2}) = P(0) = -1 < 0$,
donc il existe $\theta_1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\rho'(\theta_1) = 0$.
$P(\cos\frac{\pi}{2}) = P(0) = -1 < 0$ *et* $P(\cos\frac{3\pi}{4}) = P(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} > 0$,
donc il existe $\theta_2 \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}[$ tel que $\rho'(\theta_2) = 0$.
En plus on a $P(\cos\pi) = P(-1) = 0$.
Ainsi $P(X)$ a trois racines différentes dans $]-1, 1[$.
Comme $P(1) = 2$ et $P(2) = -39$ la quatrième racine de $P(X)$ appartient à $]1, 2[$.
c) D'où le tableau de variation

θ	0		θ_1		$\frac{\pi}{2}$		θ_2		$\frac{3\pi}{4}$		π
ρ'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$			$\Vert$
ρ	0	$\nearrow$		$\searrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$		$+\infty$	$\Vert$

d) On a

$$\lim_{\theta\to\pi^-} \rho(\theta) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sin(\pi+h)}{1+\cos(\pi+h)\cos(2\pi+2h)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\sin(h)}{1-\cos(h)\cos(2h)}$$

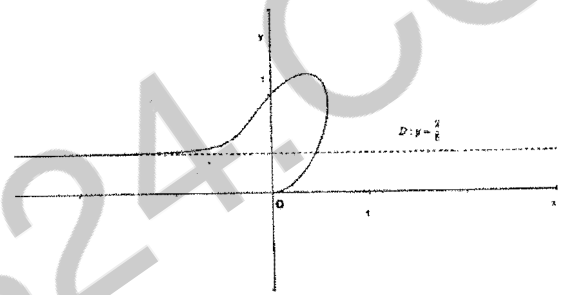
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h+o(h^2)}{1-(1-\frac{h^2}{2})(1-\frac{4h^2}{2})+o(h^2)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1+o(h)}{\frac{5h}{2}+o(h)} = +\infty,$$

ce qui signifie qu'on a une branche infinie.
Comme $\lim_{\theta\to\pi^-} x = \lim_{\theta\to\pi^-} \rho(\theta)\cos\theta = -\infty$ *(car $\rho \to +\infty$ et $\cos(\pi) = -1$),*

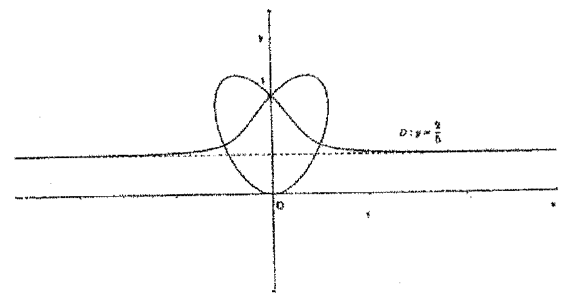
et $\lim_{\theta\to\pi^-} y = \lim_{\theta\to\pi^-} \rho(\theta)\sin\theta = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{-1+o(h)}{\frac{5h}{2}+o(h)} \sin(\pi+h)$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-1+o(h)}{\frac{5h}{2}+o(h)}(-h+o(h)) = \frac{2}{5}$$

la droite D : $y = \frac{2}{5}$ est une asymptote horizontale à la courbe lorsque $\theta \to \pi^-$.
Ce qui donne les deux tracés suivants, le premier pour $\theta \in [0, \pi[$:



et le deuxième c'est la courbe entière (en ajoutant le symétrique du premier morceau) :



10) Etude de la courbe d'équation polaire $\rho = 2\cos\theta + \dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$:

a) On a : $\rho(\theta+4\pi) = 2\cos(\theta+4\pi) + \dfrac{1}{\sin\frac{(\theta+4\pi)}{2}} = 2\cos(\theta+4\pi) + \dfrac{1}{\sin(\frac{\theta}{2}+2\pi)}$

$= 2\cos\theta + \dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} = \rho(\theta)$.

Ainsi $T = 4\pi$ est une période de la courbe.
En plus $\rho(2\pi-\theta) = 2\cos(2\pi-\theta) + \dfrac{1}{\sin\frac{(2\pi-\theta)}{2}} = 2\cos(-\theta) + \dfrac{1}{\sin(\pi-\frac{\theta}{2})}$

$= 2\cos\theta + \dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} = \rho(\theta)$.

Par suite la courbe est symétrique par rapport à la droite qui passe par O et qui fait un angle $\frac{(2\pi)}{2}$ avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$. Ce qui signifie que la courbe est symétrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox}$.

Il suffit donc de prendre comme ensemble d'étude un intervalle de longueur 2π.

Comme ρ n'est pas défini en 0, on choisit comme ensemble d'étude $D_E = [-\pi, 0[\cup]0, \pi]$.

b) ρ est continue et indéfiniment dérivable sur D_E et

$$\rho'(\theta) = -2\sin\theta - \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = -4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(8\sin^3\frac{\theta}{2} + 1\right).$$

Par suite $\rho'(\theta)$ est nul lorsque $\theta = \pi$, $\theta = -\pi$ ou $\theta = -\frac{\pi}{3}$ c) D'où le tableau de variation suivant :

θ	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		π
ρ'	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0
ρ	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow$	-1

Comme on a :

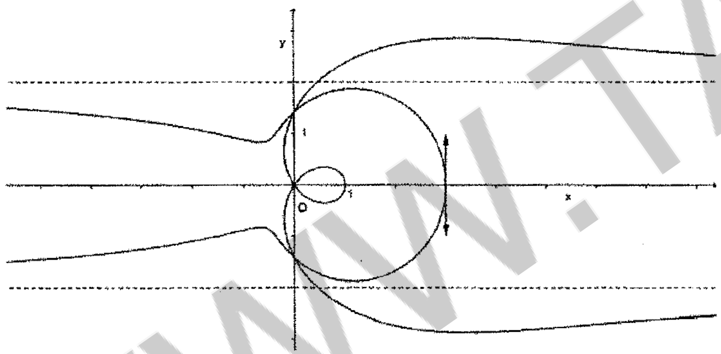
$$\lim_{\theta\to 0^-} x = \lim_{\theta\to 0^-} \rho(\theta)\cos\theta = \lim_{\theta\to 0^-}\left(2\cos\theta + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\cos\theta = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{\theta\to 0^-} y = \lim_{\theta\to 0^-} \rho(\theta)\sin\theta = \lim_{\theta\to 0^-}\left(2\cos\theta + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= \lim_{\theta\to 0^-}\left(4\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\right) = 2.$$

Par suite la droite d'équation $D:\ y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe.

e) Le tracé de la courbe en suivant les indications du tableau est le suivant :



8.4 Exercices supplémentaires

Exercice 8.16. :

Tracer point par point les courbes paramétrées dans les cas suivants :

1) $F(t) = (\frac{t^5}{4}, \frac{t^3}{2})$ *où* $t \in [-2, 2]$.

2) $x(t) = \text{ch } t$ *et* $y(t) = \text{sh } t$ *où* $t \in [-2, 2]$.

3) $x = t + 1$ *et* $y = \frac{t}{t+1}$ *où* $t \in [-6, -1.25[\cup] - 0.75, 5]$.

4) $x = t^4 - t^2 - 5$ *et* $y = t^2$ *où* $t \in [0, 2]$.

Exercice 8.17. :

Dans chaque cas montrer que l'ensemble Γ des points M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé et vérifiant l'équation donnée peut être paramétré et donner un exemple de paramétrage :

— $y^3 - x^5 = 0$.

— $x^3 - 2y^3 + x^2y + 4xy = 0$.

— $x^{\frac{2}{3}} - 4y^{\frac{2}{3}} = 1$.

Exercice 8.18. :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des courbes paramétrées suivantes :

$$F(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \ln\left(\frac{t}{t-1}\right) \\ y(t) = \arcsin t \end{cases}$$

$$G(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \frac{\sin t}{t} \\ y(t) = \arctan t \end{cases}$$

$$H(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \text{argch}t \\ y(t) = \text{argsh}t \end{cases}$$

Exercice 8.19. :

Donner dans chacun des cas suivants l'ensemble de définition des courbes paramétrées suivantes et préciser la périodicité, les symétries, les translations possibles et préciser un ensemble d'étude de ces courbes :

$$F(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \sin^5 2t \\ y(t) = \cos^5 2t \end{cases}$$

$$G(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = t - \cos t \end{cases}$$

$$H(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \arcsin t \\ y(t) = \arccos t \end{cases}$$

$$K(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = t - \pi E(\frac{t}{2\pi}) \\ y(t) = \tan t \end{cases} \qquad E(s) \text{ est la partie entière de } s.$$

Exercice 8.20. :

Déterminer les points doubles des courbes paramétrées suivantes :

$$F(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

$$G(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \frac{t+2}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t-5}{t^2-4t+3} \end{cases}$$

$$H(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

$$K(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin 2t - \sin t \end{cases}$$

Exercice 8.21. *:*
Faire une étude locale des courbes paramétrées au voisinage de t_o dans les cas suivants :

$$F(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \frac{e^t - 1}{t} \\ y(t) = \frac{t^2 - \sin^2 t}{t^4} \quad et\ t_o = 0 \end{cases}$$

$$G(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t - \sin t}{t^3} \\ y(t) = \frac{\tan^2 t}{\sqrt{1+t^2} - 1} \quad et\ t_o = 0 \end{cases}$$

$$H(t) = (x(t), y(t)) \quad avec \quad \begin{cases} x(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1} \\ y(t) = \frac{t^2 - t}{\tan \pi t} \quad et\ t_o = 1 \end{cases}$$

Exercice 8.22. *:*
Déterminer la nature du point $M(t_o)$ dans les cas suivants :
- $x(t) = t^2 - 2t$, $y(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t$ et $t_o = 1$.
- $x(t) = 1 + \sin t$, $y(t) = t - \frac{\pi}{2}$ et $t_o = \frac{\pi}{2}$.
- $x(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}$, $y(t) = \frac{(t-2)^2}{t-1}$ et $t_o = 0$.
- $x(t) = t^2 - t + \sin^2 t$, $y(t) = 1 - \cos t - \frac{1}{2}t^2 + t^3$ et $t_o = 0$.

Exercice 8.23. *:*
Étudier les branches infinies des courbes paramétrées suivantes :
- $x(t) = e^{t-1} - t$ et $y(t) = t^3 - 3t$.
- $x(t) = \dfrac{t}{\ln t}$ et $y(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$.
- $x(t) = \dfrac{t^3}{(t-1)(t+2)}$ et $y(t) = \dfrac{t^2 - 2t}{t-1}$.
- $x(t) = \ln \dfrac{t^4}{(t-2)^2}$ et $y(t) = t^3 - 6t^2$.

Exercice 8.24. *:*
Construire les courbes paramétrées d'équations suivantes :
1. $x = \dfrac{t^2+2}{t^2+t+1}$ et $y = \dfrac{t^2+2}{t^2-t+3}$
2. $x = \tan t$ et $y = \dfrac{1}{\sin t}$
3. $x = \frac{(t+2)^2}{t+1}$ et $y = \dfrac{(t-2)^2}{t-1}$
4. $x = \cos^2 t + \ln \sin t$ et $y = \sin t \cos t$
5. $x = \dfrac{1}{\cos t}$ et $y(t) = \sin t$
6. $x = \cos 4t + 4\cos t$ et $y(t) = \sin 3t$

Exercice 8.25. *:*
Transformer les équations cartésiennes suivantes en coordonnées polaires :

1. *L'équation* $x^2 - 2xy + 3y = 0$.

2. *La droite d'équation* $x + 3y + 2 = 0$.
3. *L'équation* $x^3 - y^2 = 0$.
4. *L'équation* $x^3 + y^3 = x^2 - y^2 + xy$.
5. *L'équation* $x(x-y) - 3y^3 = 0$

Exercice 8.26. *:*
Transformer les équations paramétrées suivantes en coordonnées polaires :

1. $x = t + 2 \quad y = 3 - t$
2. $x = \frac{t}{t+2} \quad y = t$
3. $x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad y = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$

Exercice 8.27. *:*
Transformer les équations suivantes en coordonnées cartésiennes :

1. $\rho = \dfrac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}$
2. $\rho = \tan\frac{\theta}{2}$
3. $\rho = \dfrac{\tan^2\theta}{\cos\theta - 5\sin\theta}$
4. $\rho = \dfrac{\cos^3\theta - \sin^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$

Exercice 8.28. *:*
Construire les courbes d'équations polaires suivantes :

1- $\rho = \dfrac{1}{e^{-\theta} + 1}$

2- $\rho = \sin^3\frac{\theta}{3}$

3- $\rho = \sin 2\theta(\cos\theta + \sin\theta)$

4- $\rho = \dfrac{\sin^2\theta\cos\theta}{\cos 2\theta}$

5- $\rho = \dfrac{\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1 + \sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

6- $\rho = \dfrac{\cos^3\theta}{\cos 3\theta}$

7- $\rho = \sqrt{3} + \tan\frac{\theta}{2}$

8- $\rho = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1 - 2\cos\theta}$

9- $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$

10- $\rho = \dfrac{2\cos\theta - 1}{2\cos 2\theta - 1}$

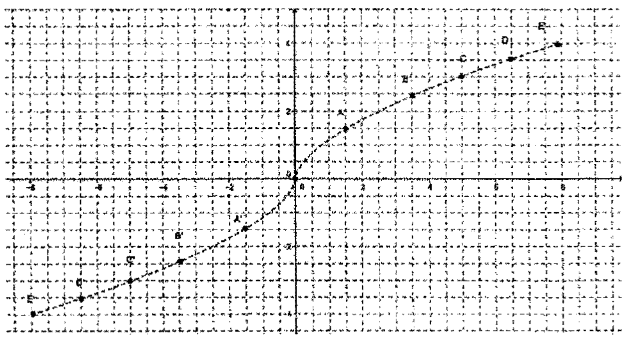
8.5 Indications sur les exercices supplémentaires

Solution 8.16. :

Dans chaque cas remplir le tableau suivant en calculant (x, y) pour chaque t donné. Puis positionner les points $M(x, y)$ dans le repère. Joindre ensuite ces points pour avoir la courbe.

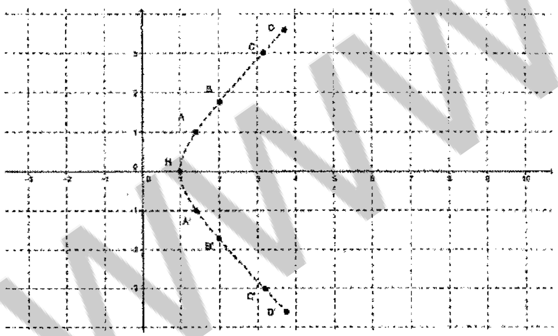
1) $F(t) = (\frac{t^5}{4}, \frac{t^3}{2})$ *où* $t \in [-2, 2]$.

t	-2	$-\sqrt[3]{7}$	$-\sqrt[3]{6}$	$-\sqrt[3]{5}$	$-\sqrt[3]{3}$	0	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{5}$	$\sqrt[3]{6}$	$\sqrt[3]{7}$	2
x	-8	-6.4	-4.95	-3.65	-1.56	0	1.56	3.65	4.95	6.4	8
y	-2	-3.5	-3	-2.5	-1.5	0	1.5	2.5	3	3.5	4
le point	E'	D'	C'	B'	A'	O	A	B	C	D	E



2) $x(t) = \operatorname{ch} t$ *et* $y(t) = \operatorname{sh} t$ *où* $t \in [-2, 2]$.

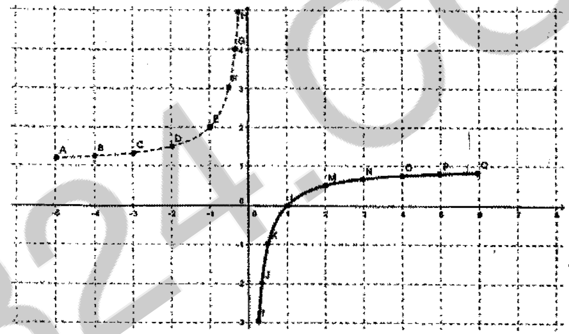
t	-2	-1.81	-1.31	-0.88	0	0.88	1.31	1.81	2
x	3.76	3.14	2	1.41	1	1.41	2	3.14	3.76
y	-3.62	-3	-1.72	-1	0	1	1.72	3	3.62
le point	D'	C'	B'	A'	H	A	B	C	D



3) $x = t + 1$ *et* $y = \frac{t}{t+1}$ *où* $t \in [-6, -1.25[\cup] - 0.75, 5]$.

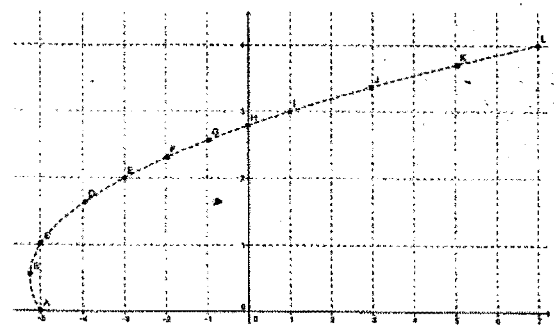
t	-6	-5	-4	-3	-2	-1.5	-1.3	-1.25
x	-5	-4	-3	-2	-1	-0.5	-0.3	0.25
y	1.2	1.25	1.33	1.5	2	3	4	5
le point	A	B	C	D	E	F	G	H

t	-0.75	-0.66	-0.5	0	1	2	3	4	5
x	0.25	0.33	0.5	1	2	3	4	5	6
y	-3	-2	-1	0	0.5	0.66	0.75	0.8	0.83
le point	I	J	K	L	M	N	O	P	Q



4) $x = t^4 - t^2 - 5$ *et* $y = t^2$ *où* $t \in [0, 2]$.

t	0	0.7	1	1.27	1.41	1.51	1.6	1.67	1.73	1.84	1.9	2
x	-5	-5.25	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	3	5	7
y	0	0.49	1	1.62	2	2.3	2.56	2.8	3	3.4	3.7	4
le point	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L



Solution 8.17. :

— *Pour l'équation* $y^3 - x^5 = 0$, *poser* $x = t^3$ *et* $y = t^5$.

— *Pour* $x^3 - 2y^3 + x^2y + 4xy = 0$, *poser* $y = tx$ *et vérifier que* $x = \dfrac{4t}{2t^3 - t - 1}$

— *Pour* $x^{\frac{2}{3}} - 4y^{\frac{2}{3}} = 1$, *poser* $y = t$ *et vérifier que* $x = \left(1 + 4t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.
Ou écrire $2y^{\frac{1}{3}} = \text{sh}\, t$, *ce qui donne* $x = \text{ch}^3 t$, *puis* $y = \frac{1}{8}\text{sh}^3 t$.

Solution 8.18. :

Pour $F(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \ln\left(\frac{t}{t-1}\right) \\ y(t) = \arcsin t \end{cases}$
Vérifier que $D_F = [-1, 0[$.

Pour $G(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \frac{\sin t}{t} \\ y(t) = \arctan t \end{cases}$
Vérifier que $D_G = \mathbb{R}^*$.

Pour $H(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \text{argch}t \\ y(t) = \text{argsh}t \end{cases}$
Vérifier que $D_H = [1, +\infty[$.

Solution 8.19. :

Pour $F(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \sin^5 2t \\ y(t) = \cos^5 2t \end{cases}$
L'ensemble de définition $D_F = \mathbb{R}$, *la période de* $F(t)$ *est* π.
$F(-t) = (-x(t), y(t))$ *donc la courbe est symétrique par rapport à* $\overrightarrow{Oy}$.
$F(t + \frac{\pi}{2}) = -F(t)$ *donc la courbe est symétrique par rapport au centre* O.
Prendre comme ensemble d'étude $E_F = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Pour $G(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = t - \cos t \end{cases}$
L'ensemble de définition $D_G = \mathbb{R}$.
$G(t + 2\pi) = (x(t), y(t)) + (0, 2\pi)$.
Prendre comme ensemble d'étude $E_G = [0, 2\pi]$.
Translater ensuite cette partie de la courbe par des translations de vecteurs multiples de $\overrightarrow{u} = (0, 2\pi)$.

Pour $H(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \arcsin t \\ y(t) = \arccos t \end{cases}$
L'ensemble de définition $D_H = [-1, 1]$ *et* $H(-t) = (-x(t), y(t))$, *donc la courbe est symétrique par rapport à* $\overrightarrow{Oy}$.
Prendre comme ensemble d'étude $E_H = [0, 1]$.

Pour $K(t) = (x(t), y(t))$
avec $\begin{cases} x(t) = t - \pi E(\frac{t}{2\pi}) \\ y(t) = \tan t \end{cases}$ $E(s)$ *est la partie entière de* s.
L'ensemble de définition $D_K = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$.
$K(t + 2\pi) = K(t) + (\pi, 0)$ *prendre comme ensemble d'étude*
$E_K = [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$ *puis translater cette partie de la courbe par des translations de vecteurs multiples de* $\overrightarrow{u} = (\pi, 0)$.

Solution 8.20. :

Pour $F(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

remarquer que
$\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases} \Longrightarrow \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y(s)}{x(s)} \Longrightarrow t = s$.
Donc pas de points doubles.

Pour $G(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \frac{t+2}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t-5}{t^2-4t+3} \end{cases}$
utiliser la remarque de l'exercice (4)
Si (a, b) *est un point double alors* $\frac{a}{b} = \frac{-1}{-4b-1} = \frac{-a-2}{3b+5}$ *et vérifier que* $a = \frac{7}{16}$ *et* $b = -\frac{7}{12}$ *obtenu pour* $t_1 \neq t_2$ *les deux racines de* $7t^2 - 16t - 39$.

Pour $H(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t-1} \end{cases}$
utiliser la même remarque de l'exercice (4)
Si (a, b) *est un point double alors* $\frac{a}{1} = \frac{-1}{-b} = \frac{-a}{b}$ *et vérifier que* $a = -1$ *et* $b = -1$ *obtenu pour* $t_1 \neq t_2$ *les deux racines de* $t^2 + t - 1$.

Pour $K(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin 2t - \sin t \end{cases}$
Remarquer que $K(t + 2\pi) = K(t)$ *est périodique et donc tous les points sont multiples (atteints par une infinité de* t*).*
Si on restreint l'étude à $[0, 2\pi]$,
pour $t \in [0, \pi]$ *vérifier que* $x(t) = x(s)$ *avec* $s \neq t$ *est équivalente à* $s = t + \pi$ *ou* $s = 2\pi - t$ *ou* $s = \pi - t$.
Et dans ce cas $y(t) = y(s)$ *donne* $t = 0$ *et* $s = \pi$ *ou* $t = \pi$ *et* $s = 2\pi$ *ou* $t = \frac{\pi}{3}$ *et* $s = \frac{5\pi}{3}$.
Les points multiples sont : $(1, 0)$ *un point double et* $(-\frac{1}{2}, 0)$ *un point triple.*

Solution 8.21. :

Pour $F(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \frac{e^t-1}{t} \\ y(t) = \frac{t^2-\sin^2 t}{t^4} \end{cases}$ *et* $t_o = 0$
Faire des développements limités pour $t \in V(0)$:
$F(t) = (1, \frac{1}{3}) + t(\frac{1}{2}, 0) + \frac{1}{2!}t^2(\frac{1}{3}, -\frac{4}{45}) + (o(t^2), o(t^2))$
en déduire que le point $(1, \frac{1}{3})$ *est un point de concavité et tracer la partie de la courbe au voisinage de ce point.*

Pour $G(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\text{sh}\, t - \sin t}{t^3} \\ y(t) = \frac{\tan^2 t}{\sqrt{1+t^2}-1} \end{cases}$ *et* $t_o = 0$
Faire des développements limités pour $t \in V(0)$:
$G(t) = (0, 2) + t(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2!}t^2(0, -\frac{19}{12}) + (o(t^2), o(t^2))$
en déduire que le point $(0, 2)$ *est un point de concavité et tracer la partie de la courbe au voisinage de ce point.*

Pour $H(t) = (x(t), y(t))$ *avec* $\begin{cases} x(t) = \frac{\ln t}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t^2-t}{\tan \pi t} \end{cases}$ *et* $t_o = 1$
Faire des développements limités pour $t \in V(1)$ *en posant* $u = t - 1$ $(t = u + 1)$:
$G(t) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{\pi}) + (t-1)(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\pi}) + \frac{1}{2!}(t-1)^2(\frac{5}{6}, -\frac{2\pi}{3}) + (o(t^2), o(t^2))$
en déduire que le point $(0, 2)$ *est un point de concavité et tracer la partie de la courbe*

au voisinage de ce point.

Solution 8.22. :

— $x(t) = t^2 - 2t$, $y(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t$ *et* $t_o = 1$.
Poser $u = t - 1$ *et vérifier que* $x = -1 + u^2 = -1 + (t-1)^2$
et $y = -1 + u^4 = -1 + (t-1)^4$
$F'(1) = (0,0)$, $F''(1) = (2,0)$, $F'''(1) = (0,0)$ *et* $F^{(4)}(1) = (0,24)$
$p = 2$ *et* $q = 4$, *le point* $F(1) = (-1,-1)$ *est un point de rebroussement de deuxième espèce.*

— $x(t) = 1 + \sin t$, $y(t) = t - \frac{\pi}{2}$ *et* $t_o = \frac{\pi}{2}$.
Poser $u = t - \frac{\pi}{2}$ *et vérifier que* $x = -1 + u^2 = 2 - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ *et* $y = u$
$F'(1) = (0,1)$ *et* $F''(1) = (-1,0)$.
$p = 1$ *et* $q = 2$, *le point* $F(1) = (-1,-1)$ *est un point ordinaire.*

— $x(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}$, $y(t) = \frac{(t-2)^2}{t-1}$ *et* $t_o = 0$.
Vérifier que $x = 4 + t^2 - t^3 + o(t^3)$ *et* $y = -4 - t^2 - t^3 + o(t^3)$
$F'(0) = (0,0)$, $F''(0) = (2,-2)$ *et* $F'''(0) = (-6,-6)$
$p = 2$ *et* $q = 3$, *le point* $F(0) = (4,-4)$ *est un point de rebroussement de première espèce.*

— $x(t) = t^2 - t + \sin^2 t$, $y(t) = 1 - \cos t - \frac{1}{2}t^2 + t^3$ *et* $t_o = 0$.
Vérifier que $x = -t + 2t^2 + o(t^3)$ *et* $y = t^3 + o(t)$
$F'(0) = (-1,0)$, $F''(0) = (4,0) = -4F'(0)$, $F'''(0) = (0,6)$
$p = 1$ *et* $q = 3$, *le point* $F(0) = (0,0)$ *est un point d'inflexion.*

Solution 8.23. :
Etude des branches infinies des courbes paramétrées suivantes :

— $x(t) = e^{t-1} - t$ *et* $y(t) = t^3 - 3t$.
$D_F =]-\infty, +\infty[$,
Quand $t \to -\infty$
$x \to +\infty$, $y \to -\infty$ *et* $\frac{y}{x} \to -\infty$
branche parabolique d'axe $\overrightarrow{Oy}$ *du coté* $x \to +\infty$ *et* $y \to -\infty$.
Quand $t \to +\infty$
$x \to +\infty$, $y \to +\infty$ *et* $\frac{y}{x} \to 0$
branche parabolique d'axe $\overrightarrow{Ox}$ *du coté* $x \to +\infty$ *et* $y \to +\infty$.

— $x(t) = \dfrac{t}{\ln t}$ *et* $y(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$.
$D_F =]0,1[\cup]1,+\infty[$,
Quand $t \to 1^-$
$x \to -\infty$, $y \to -\infty$, $\frac{y}{x} \to 1$
et $y - x \to \frac{1}{2}$
branche infinie asymptote à la droite D : $y = x + \frac{1}{2}$ *du coté* $x \to -\infty$ *et* $y \to -\infty$.

Et de même quand $t \to 1^+$, $x \to +\infty$, $y \to +\infty$
branche infinie asymptote à la droite D : $y = x + \frac{1}{2}$ *du coté* $x \to +\infty$ *et* $y \to +\infty$.
Quand $t \to +\infty$
$x \to +\infty$, $y \to +\infty$, $\frac{y}{x} \to +\infty$
branche parabolique d'axe $\overrightarrow{Oy}$ *du coté* $x \to +\infty$ *et* $y \to +\infty$.

— $x(t) = \dfrac{t^3}{(t-1)(t+2)}$ *et* $y(t) = \dfrac{t^2 - 2t}{t-1}$.
$D_F =]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[$
Quand $t \to -\infty$
$x \to -\infty$, $y \to -\infty$, $\frac{y}{x} \to 1$
et $y - x \to 0$
branche infinie asymptote à la droite D : $y = x$ *du coté* $x \to -\infty$ *et* $y \to -\infty$.
Quand $t \to -2^-$
$x \to -\infty$, $y \to -\frac{8}{3}$
branche infinie asymptote à la droite d'équation $y = -\frac{8}{3}$ *du coté* $x \to -\infty$.
Quand $t \to -2^+$
$x \to +\infty$, $y \to -\frac{8}{3}$
branche infinie asymptote à la droite d'équation $y = -\frac{8}{3}$ *du coté* $x \to +\infty$.
Quand $t \to 1^-$
$x \to -\infty$, $y \to +\infty$, $\frac{y}{x} \to -3$ *et* $y + 3x \to \frac{8}{3}$
branche infinie asymptote à la droite d'équation $y = -3x + \frac{8}{3}$ *du coté* $x \to -\infty$ *et* $y \to +\infty$.
Quand $t \to 1^+$
$x \to +\infty$, $y \to -\infty$, $\frac{y}{x} \to -3$ *et* $y + 3x \to \frac{8}{3}$
branche infinie asymptote à la droite d'équation $y = -3x + \frac{8}{3}$ *du coté* $x \to +\infty$ *et* $y \to -\infty$.
Quand $t \to +\infty$
$x \to +\infty$, $y \to -\infty$, $\frac{y}{x} \to 1$ *et* $y - x \to 0$
branche infinie asymptote à la droite d'équation $y = x$ *du coté* $x \to +\infty$ *et* $y \to +\infty$.

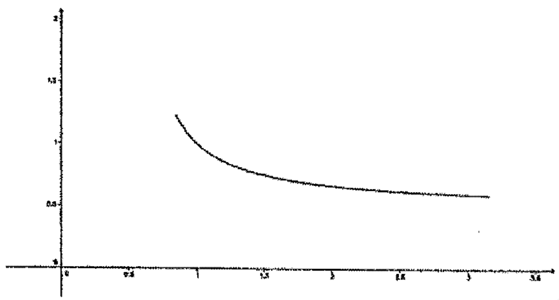
— $x(t) = \ln \dfrac{t^4}{(t-2)^2}$ *et* $y(t) = t^3 - 6t^2$.
$D_F =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$,
Quand $t \to -\infty$
$x \to +\infty$, $y \to -\infty$ *et* $\frac{y}{x} \to -\infty$
branche parabolique d'axe $\overrightarrow{Oy}$ *du coté* $x \to +\infty$ *et* $y \to -\infty$.
Quand $t \to 0^{\pm}$
$x \to -\infty$, $y \to 0$
la droite d'équation $y = 0$ *est asymptote à la courbe du coté* $x \to +\infty$.
Quand $t \to 2^{\pm}$
$x \to +\infty$, $y \to -16$
la droite d'équation $y = -16$ *est asymptote à la courbe du coté* $x \to +\infty$.
Quand $t \to +\infty$

$x \to +\infty$, $y \to +\infty$ *et* $\dfrac{y}{x} \to +\infty$

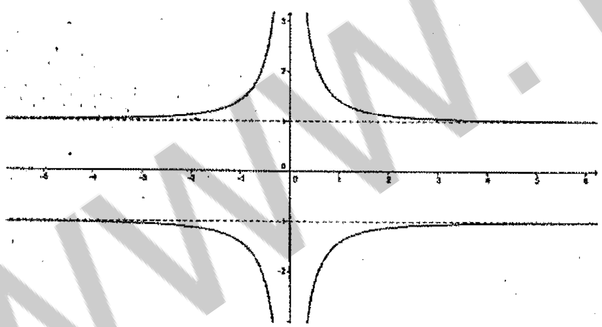
branche parabolique d'axe $\overrightarrow{Oy}$ *du coté* $x \to +\infty$ *et* $y \to +\infty$.

<u>Solution</u> 8.24. *: Pour la construction des courbes paramétrées suivre le plan d'étude proposé dans le résumé et essayer de faire le tracé le plus correctement possible.*
Ci-dessus le tracé de chaque courbe :

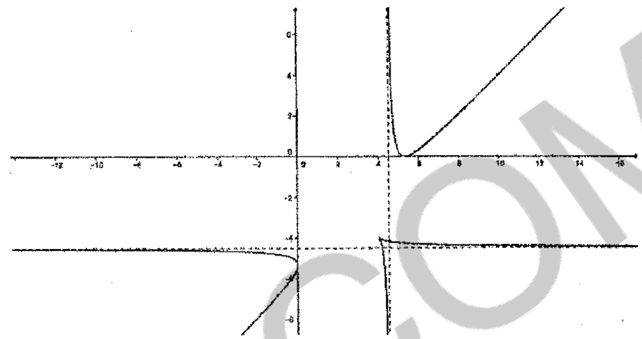
1) $x = \dfrac{t^2+2}{t^2+t+1}$ *et* $y = \dfrac{t^2+2}{t^2-t+3}$



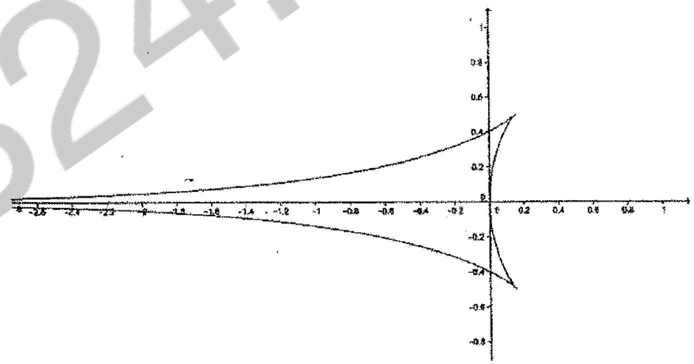
2) $x = \tan t$ *et* $y = \dfrac{1}{\sin t}$



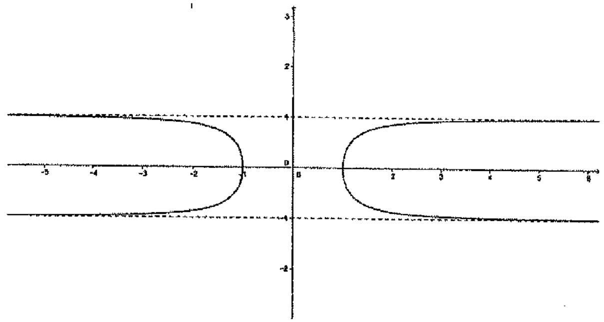
3) $x = \frac{(t+2)^2}{t+1}$ *et* $y = \dfrac{(t-2)^2}{t-1}$



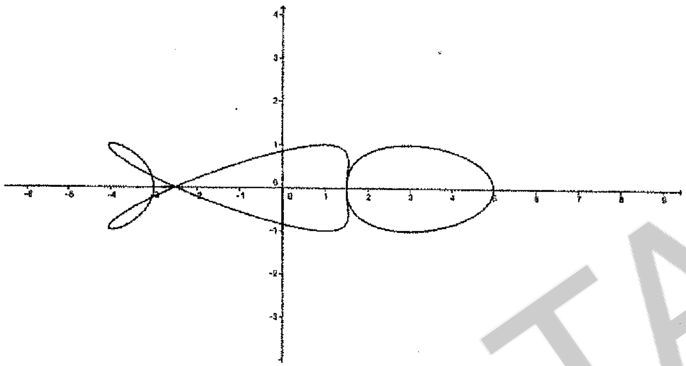
4) $x = \cos^2 t + \ln \sin t$ *et* $y = \sin t \cos t$



5) $x = \dfrac{1}{\cos t}$ et $y(t) = \sin t$



6) $x = \cos 4t + 4\cos t$ et $y(t) = \sin 3t$



Solution 8.25. :

1. *En coordonnées polaires l'équation* $x^2 - 2xy + 3y = 0$ *devient*
$\rho = \dfrac{6\sin\theta}{2\sin 2\theta - \cos\theta - 1}$.
2. *En coordonnées polaires l'équation* $x + 3y + 2 = 0$ *devient*
$\rho = \dfrac{-2}{\cos\theta + 3\sin\theta}$.
3. *En coordonnées polaires l'équation* $x^3 - y^2 = 0$ *devient*
$\rho = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}$.
4. *En coordonnées polaires l'équation* $x^3 + y^3 = x^2 - y^2 + xy$ *devient*
$\rho = \dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta + \cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$.
5. *En coordonnées polaires l'équation* $x(x-y) - 3y^3 = 0$ *devient*

$$\rho = \frac{\cos\theta(\cos\theta - \sin\theta)}{3\sin^3\theta}.$$

Solution 8.26. :

Les équations paramétrées suivantes deviennent en coordonnées polaires :

1. $x = t + 2 \quad y = 3 - t$
devient $\rho = \dfrac{5}{\cos\theta + \sin\theta}$.
2. $x = \frac{t}{t+2} \quad y = t$
devient $x(y+2) = y$ *et ensuite* $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{2}{\sin\theta}$.
3. $x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad y = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$
donne $\dfrac{y}{x} = t^2 = \tan\theta$ *et donc* $\rho\cos\theta = x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan\theta}}$, *puis*
$\rho = \dfrac{1}{\cos\theta\sqrt{1+\tan\theta}}$.

Solution 8.27. :

Transformation d'équation polaire en équation cartésienne :
Utiliser : $\frac{y}{x} = \tan\theta$, $x^2 + y^2 = \rho^2$...

1) $\rho = \dfrac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}$ *devient* $\rho\sin\theta = \dfrac{3\cos\theta}{\sin\theta}$ *et donc* $y^2 - 3x = 0$.

2) $\rho = \tan\frac{\theta}{2}$ *donne* $\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2\rho}{1+\rho^2}$
passer par $y = \rho\sin\theta$ *pour avoir* $y + (x^2+y^2)(y-2) = 0$.

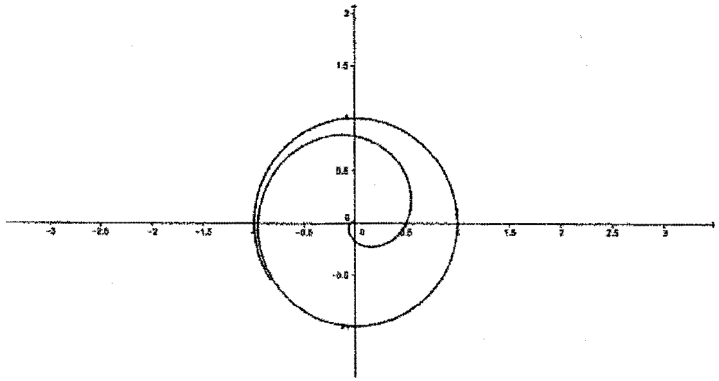
3) $\rho = \dfrac{\tan^2\theta}{\cos\theta - 5\sin\theta}$ *devient*
$\rho(\cos\theta - 5\sin\theta) = \tan^2\theta$, *puis* $x^3 - 5x^2y - y^2 = 0$.

4) $\rho = \dfrac{\cos^3\theta - \sin^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$ *devient*
$\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta = \rho^3\cos^3\theta - \rho^3\sin^3\theta$, *puis* $x^3 - y^3 - x^2y^2 = 0$.

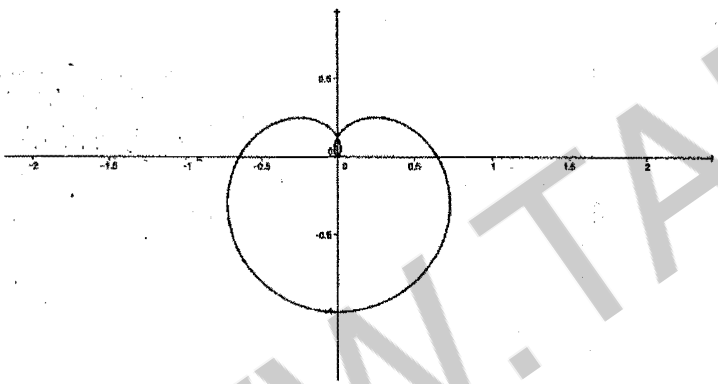
Solution 8.28. :

Pour la construction des courbes d'équations polaires suivre le plan d'étude proposé. Ci-dessous leurs tracés :

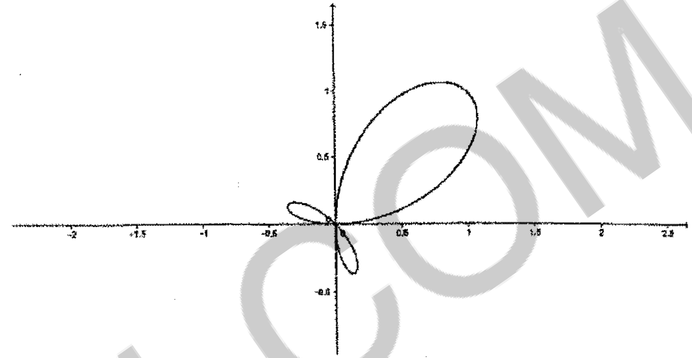
1-$\rho = \dfrac{1}{e^{-\theta}+1}$



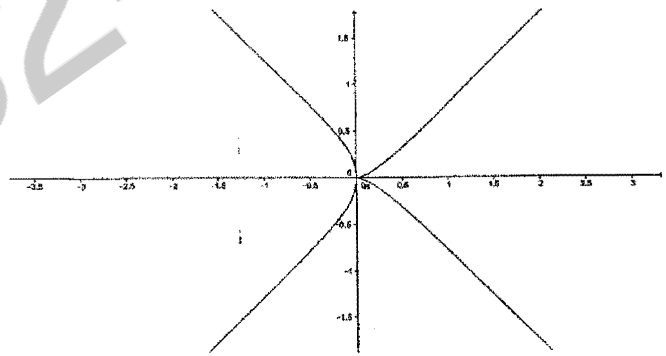
2-$\rho = \sin^3 \frac{\theta}{3}$



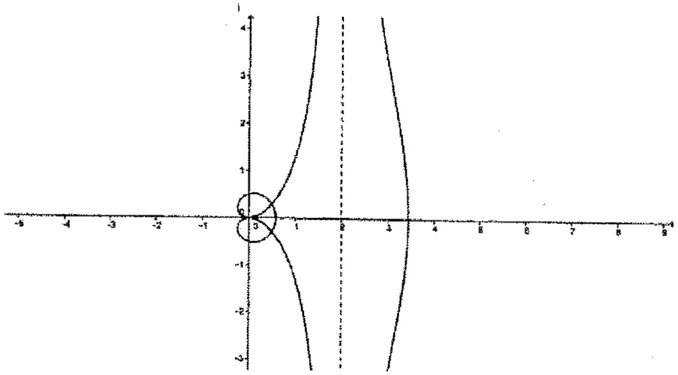
3- $\rho = \sin 2\theta(\cos\theta + \sin\theta)$



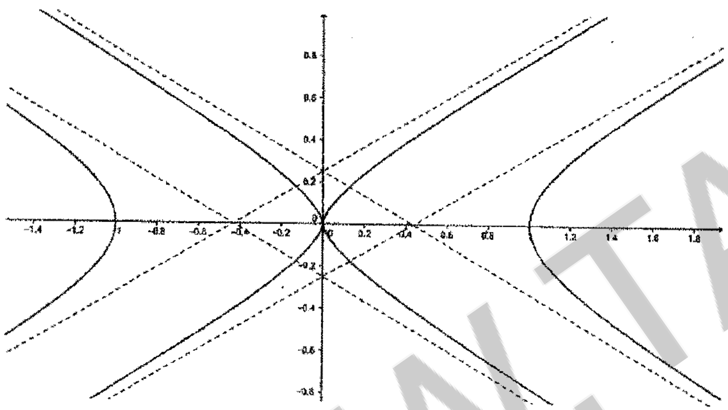
4-$\rho = \dfrac{\sin^2\theta\cos\theta}{\cos 2\theta}$



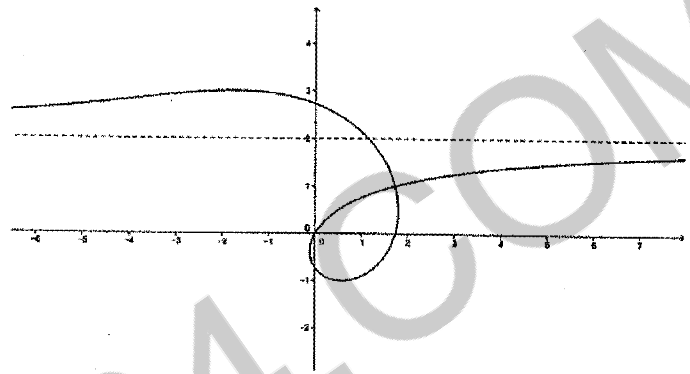
$5\text{-}\rho = \dfrac{\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}}$



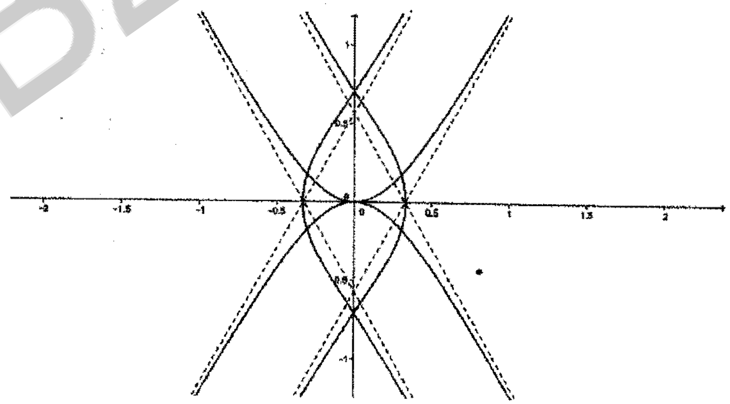
$6\text{-}\rho = \dfrac{\cos^3\theta}{\cos 3\theta}$



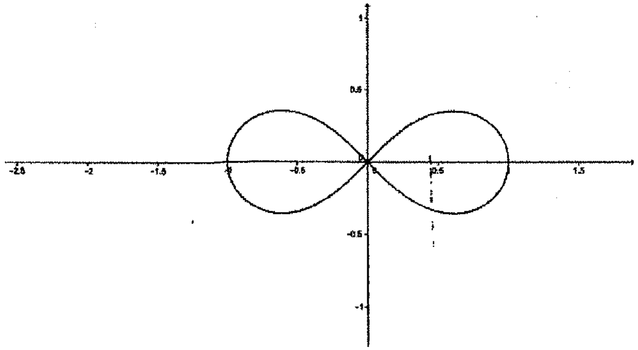
$7\text{-}\rho = \sqrt{3} + \tan\frac{\theta}{2}$



$8\text{-}\rho = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1-2\cos\theta}$



$9\text{-}\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$



$10\text{-}\rho = \dfrac{2\cos\theta - 1}{2\cos 2\theta - 1}$