TD 1 D'ANALYSE NUMERIQUE SM SMI

EXERCICE 1

a) Pour chacun des nombres réels suivants ,déterminer la troncature à 3 décimales ,les valeurs approchées par défaut et par excés à 10^{-3}, ainsi que les valeurs arrondies à 10^{-3}prés et à 4 chiffres significatifs

$\frac{22}{7}$, π , $\sqrt{2}$, $\cos\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\sqrt{7}-9}{2}$

b) Déterminer l'erreur relative ,et l'erreur absolue en prenant $\frac{22}{7}$ comme valeur approchée de π.

EXERCICE 2

a) Ecrire en virgule flottante les nombres suivants :

240.13 0.00341 -0.000012 -251.01 213540.5

b) Calculer par troncature et par arrondi à 10^{-3}

12.34 + 0.0035 -0.0041+0.000358 12.1*345 -2.14/0.00035

EXERCICE 3

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par : $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1) Calculer u_1

2)A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = (n+1)\, u_n - 1 \quad (R)$$

3) Deux calculatrices affichent les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant la relation (R)

Quelle conjecture peut -on faire sur la convergence de la suite (u_n) en examinant ces résultats ?

3)Montrer que pour tout $n \geq 1$ $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite (u_n)

4) Etant donné un réel a , on définit la suite (v_n) par :

WWW.TALIB24.COM

$$v_{n+1} = (n+1)\, v_n - 1 \quad \text{et } v_1 = a$$

On s'interesse à l'influence du terme initial a de cette suite sur son comportement à l'infini

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_n + (a+2-e)n!$

b) Etudier la limite de la suite (v_n) suivant les valeurs de a

c) En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichées par ces deux calculatrices :

voici les résultats affichées par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par la deuxième calculatrice
1	7,1828182845E−01	7,1828182846E−01
2	4,3656365691E−01	4,3656365692E−01
3	3,0969097075E−01	3,0969097076E−01
4	2,3876388301E−01	2,3876388304E−01
5	1,9381941508E−01	1,9381941520E−01
6	1,6291649051E−01	1,6291649120E−01
7	1,4041543358E−01	1,4041543840E−01
8	1,2332346869E−01	1,2332350720E−01
9	1,0991121828E−01	1,0991156480E−01
10	9,9112182825E−02	9,9115648000E−01
11	9,0234011089E−02	9,0272128000E−02
12	8,2808132963E−02	8,3265536000E−02
13	7,6505728522E−02	8,2451968000E−02
14	7,1080199309E−02	1,5432755200E−01
15	6,6202989636E−02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E−02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E−03	3,3965641216E+02
18	−8,7016273909E−01	6,1128154189E+03
19	−1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	−3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	−7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	−1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	−3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	−8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	−2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

WWW.MEDI.COM

Série 01

Exercice 01 :

a-

	22/7	π	$\sqrt{2}$	$\cos(\frac{\pi}{5})$	$\frac{3\sqrt{7}-9}{2}$
VDM	3,142857	3,141593	1,414214	0,809017	-0,531373
T3D	3,142	3,141	1,414	0,809	-0,531
VA_3PPD	3,142	3,141	1,414	0,809	-0,532
VA_3PPE	3,143	3,142	1,415	0,810	-0,531
VA_3P	3,143	3,142	1,414	0,809	-0,531
VA_4CS	3,1429	3,1416	1,4142	0,8090	-0,5314

b-

$$\Delta_\pi = \frac{22}{7} - \pi = 1,26 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_\pi = \frac{\Delta\pi}{\pi} = 4,02 \cdot 10^{-4}$$

Exercice 02 :

a- Ecrire en virgule flottante les nombres suivantes :

$240,13 = .24013 * 10^{3}$

$0,00341 = .341 * 10^{-2}$

$-0,000012 = -.12 * 10^{-4}$

$-251,01 = -.25101 * 10^{3}$

$213540,5 = .2135405 * 10^{6}$

b- $A = 12,34 + 0,0035$

$12,34 = .1234 * 10^{2}$

$0,0035 = .35 * 10^{-2} = .000035 * 10^{2}$

$A = .123435 * 10^{2}$

T3D : $.123 * 10^{2}$

VA_3P : $.123 * 10^{2}$

WWW.FMLIBRA.COM

$B = -0{,}00041 + 0{,}000358$

$-0{,}00041 = -.41 * 10^{-2}$

$0{,}000358 = .358 * 10^{-3} = .0358 * 10^{-2}$

$4100 - 358 = 3742$

$B = -.3742 * 10^{-2}$

T3D : $-.374 * 10^{-2}$

VA 3P : $-.374 * 10^{-2}$

$C = 12{,}1 * 345 = .121 * 10^{2} * .345 * 10^{3}$

$0{,}121 * 0{,}345 = 0{,}041745$

$C = .41745 * 10^{4}$

T_3D : $.417 * 10^{4}$

VA_3P : $.417 * 10^{4}$

$$\frac{-2{,}14}{0{,}000035} = \frac{-.214 * 10^{1}}{.35 * 10^{-3}}$$

$$= -.6114286 * 10^{4}$$

T_3D : $-.611 * 10^{4}$

VA_3P : $-.611 * 10^{4}$

$\boxed{\text{Exercice 3 :}}$

1) $n \geq 1$ $\quad U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$

$U_1 = \int_0^1 (1-t) e^t \, dt$

$u = 1-t \qquad u' = -1$

$v' = e^t \qquad v = e^t$

$U_1 = \left[(1-t)e^t\right]_0^1 + \int_0^1 e^t \, dt = \left[(2-t)e^t\right]_0^1$

$= e - 2$

WWW.TALIB24.COM

2) $U_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \, dt$

$u = (1-t)^{n+1}$ $\quad u' = -(n+1)(1-t)^n$

$v' = e^t$ $\quad v = e^t$

$$U_{n+1} = \left[(1-t)^{n+1} e^t\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$$

$$U_{n+1} = (n+1)U_n - 1$$

$\lim U_n = -\infty$ pour la 1ère calculatrice

$\lim U_n = +\infty$ pour la 2ème calculatrice

3) $0 \leq t \leq 1$

$1 \leq e^t \leq e$

$(1-t)^n \leq (1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n \quad \forall t \in [0,1]$

$$\int_0^1 (1-t)^n dt \leq U_n \leq e\int_0^1 (1-t)^n dt$$

$$\int_0^1 (1-t)^n dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{e}{n+1}$$

$$\lim \frac{1}{n+1} = \lim \frac{e}{n+1} = 0 \longrightarrow \lim U_n = 0$$

4) $\begin{cases} V_1 = a \\ V_{n+1} = (n+1)V_n - 1 \end{cases}$

a) $V_n = U_n + (a+2-e)n! \quad \forall n \geq 1$

Pour $n = 1$ $V_1 = a$ et $U_1 + (a+2-e)1! = e - 2 + a + 2 - e$

$= a$

c'est vérifié

On suppose que $v_n = u_n + (a+2-e)n!$

et montrons que $v_{n+1} = u_{n+1} + (a+2-e)(n+1)!$

$$v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$$
$$= (n+1)\left[u_n + (a+2-e)n!\right] - 1$$
$$= (n+1)u_n - 1 + (a+2-e)(n+1)n!$$
$$= u_{n+1} + (a+2-e)(n+1)!$$

Donc $\forall n \geq 1 \quad v_n = u_n + (a+2-e)n!$

b) Si $a+2-e=0$ c.à.d $a=e-2$

alors $v_n = u_n$ d'où $\lim v_n = 0$

Si $a+2-e>0$ c.à.d $a>e-2$

alors $\lim v_n = +\infty$

Si $a+2-e<0$ c.à.d $a<e-2$

alors $\lim v_n = -\infty$

La 1ère calculatrice utilise pour v_n une valeur $< e-2$

La 2ème c.// // // // // $> e-2$

WWW.TAHEBGA.COM

TD 2 D'ANALYSE NUMERIQUE SMA SMI

EXERCICE 1

Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $xe^x - 1 = 0$

EXERCICE 2

Séparer les racines de l'équation : $e^x + x^2 - 4 = 0$

EXERCICE 3

1° Séparer les racines de l'équation : $x^3 - 3x - 1 = 0$ (on note θ la plus grande solution de cette équation)

2° Déterminer le nombre d'itérations necessaires pour avoir une valeur approchée à 10^{-2}, de θ ,par la méthode de **Dicothomie**

3° Déterminer une valeur approchée de θ par les méhodes de **Dicothomie** ,**Newton** , et **Lagrange** apres 5 itérations (justifier le choix du terme initial)

EXERCICE 4

1°En utilisant la méthode de **Newton** déterminer une suite qui permet d'approcher la racine cubique d'un entier N

2° Application : Déterminer une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$ à 10^{-6} (justifier le choix du terme initial)

WWW.TALIB24.COM

Exercice 5

On se propose de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation :

$$f(x) = x - e^{-2x} = 0 \quad (1)$$

1) Montrer que (1) admet une solution unique α et que $\alpha \in [0, 1]$

2) A l'aide de la méthode de **Newton**, déterminer une valeur approchée de α aprés 3 itérations (justifier le choix du terme initial).

3) On se propose de résoudre (1) par la méthode du point fixe :

$$x = g(x) = \frac{\lambda x + e^{-2x}}{1 + \lambda} \quad (2) \qquad \text{avec } \lambda > 0$$

a) Vérifier que (2) est équivalente à (1)

b) Donner une condition suffisante sur λ qui assure la convergence de la méthode du point fixe sur $[0, 1]$ vers α .

Exercice 6

En appliquant cinq fois de suite la méthode du point fixe , trouver la valeur approchée de la racine de l'équation : $2x - \cos x = 0$ séparée sur l'intervalle $[0 ; 0.5]$ donner le résultat avec 5 décimales

Exercice 7

Résoudre l'équation : $x^2 - 100x + 1 = 0$, à l'aide de la méthode du point fixe.

On remarquera que l'équation donnée admet 2 solutions réelles α et β contenues réspectivement dans $\left[10^{-2} ; 10^{-1}\right]$ et $\left[10 ; 10^{2}\right]$, puis pour α on prendra $x_0 = 0.1$ et pour β on prendra $x_0 = 10$ et on donnera des valeurs approchées de α et β avec 5 c.s.e .

WWW.TALIB24.COM

Série 02

Exercice 01 :

nombre de solutions de l'équation : $xe^x - 1 = 0$

On pose $f(x) = xe^x - 1$

$f'(x) = (1+x)e^x$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$			
f	-1	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x \qquad X = -x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{X \to +\infty} -Xe^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

f continue est strictement $\searrow$ sur $]-\infty, -1]$

d'où $f(]-\infty, -1]) = [-e^{-1} - 1, -1] = J_1$

$0 \notin J_1$ L'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solutio dans $]-\infty, -1]$

De même $f([-1, +\infty[) = [-e^{-1} - 1, +\infty[= J_2$

$0 \in J_2$ L'équation $f(x) = 0$ admet une solutio $\alpha \in [-1, +\infty[$.

Séparation de α

$f(-1) < 0$

$f(0) = -1$

$f(1) = e - 1$

$f(0)f(1) < 0 \Rightarrow \alpha \in [0, 1]$

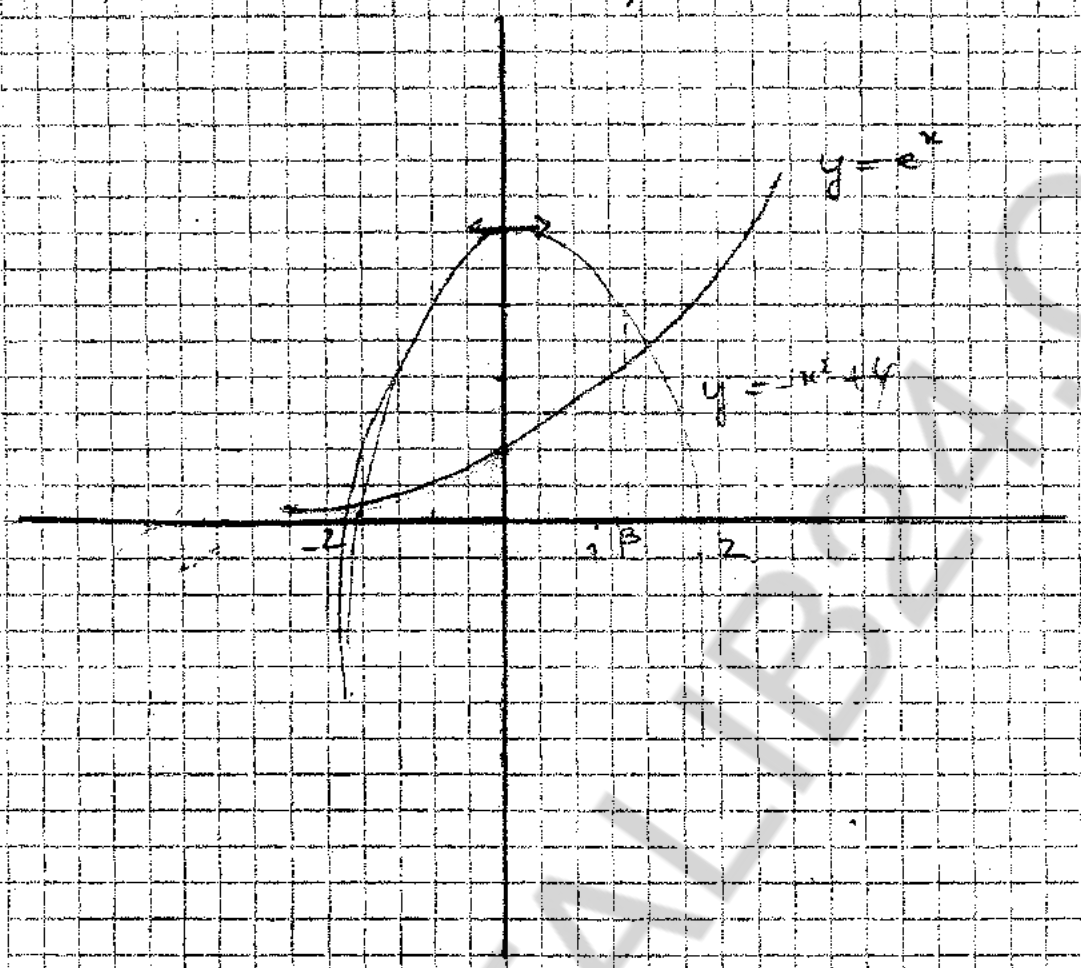
WWW.MELIB24.COM

Exercice 02 :

Séparer les racines de l'équation : $e^x + x^2 - 4 = 0$ (1)

en équivalence à l'équation :

$$e^x = -x^2 + 4 \quad (2)$$



L'équation (1) admet 2 solutions α et β avec $\alpha < \beta$

On pose $f(x) = e^x + x^2 - 4$

$$\begin{cases} f(1) = e - 3 < 0 \\ f(2) = e^2 > 0 \end{cases} \qquad f(1)\,f(2) < 0$$

donc $\beta \in [1, 2]$

$$\begin{cases} f(-2) = e^{-2} > 0 \\ f(-1) = e^{-1} - 3 < 0 \end{cases} \qquad \alpha \in [-2, -1]$$

WWW.TALIB24.COM

$f(x) = e^x + x^2 - 4$

$f'(x) = e^x + 2x$ $\qquad$ $f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x + 2$ $\qquad$ $f'(-1) = e^{-1} - 2$

	$-\infty$		γ		$+\infty$
f'			$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

		γ	
f'	$-$	0	$+$
f	$+\infty$ $\searrow$	$f(\gamma)$	$\nearrow$ $+\infty$

Exercice 03 :

1. $x^3 - 3x - 1 = 0$ (1)

$f(x) = x^3 - 3x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

		α		β		θ	
x	$-\infty$	$\downarrow$	-1	$\downarrow$	1	$\downarrow$	$+\infty$
f	$-$		$+$		$-$		$+$

f change de signes 3 fois, donc l'equation $f(x) = 0$ admet 3 solutions α, β et θ tq $\alpha < \beta < \theta$

$f(-1) = 1$

$f(-2) = -3$ $\qquad$ $f(-2)f(-1) < 0$

$\alpha \in [-2, -1]$

$f(0) = -1$

$f(-1) = 1$ $\Rightarrow f(-1)f(0) < 0 \Rightarrow \beta \in [-1, 0]$

WWW.TANLIB24.COM

$f(1) = -3$
$f(2) = 1$ $\Rightarrow f(1)f(2) < 0$
$\Rightarrow \theta \in [1, 2]$

2. Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une valeur approchée à 10^{-2}, de θ, par la méthode de dichotomie :

Soit (a_n) et (b_n) les suites obtenues par dichotomie avec $a_n < b_n$

$a_0 = 1$ $\quad b_0 = 2$

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{1}{2^n} < 10^{-2}$$

n tel que $2^n > 10^2$

d'où $n \geq 7$

$a_7 < \theta < b_7$ avec $b_7 - a_7 < 10^{-2}$

n	a_n	b_n
0	1	2
1	1,5	2
2	1,75	2
3	1,875	2
4	1,875	1,937
5	1,875	1,906

$f(1)f(1,5) > 0$
$f(1,5)f(1,75) > 0$
$f(1,75)f(1,875) > 0$
$f(1,875)f(1,937) < 0$
$f(1,875)f(1,906) < 0$

$$b_5 - a_5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \simeq 0,03$$

b) Newton :

Soit (x_n) la suite obtenue par Newton

$x_0 \in [1, 2]$ tq $f(x_0)f''(x_0) > 0$

$f(x) = x^3 - 3x - 1$

$f'(x) = 3(x^2 - 1)$ $\qquad f' > 0$ sur $[1, 2]$

$f''(x) = 6x$ $\qquad f'' > 0$ sur $[1, 2]$

$$\begin{cases} f(1) = -3 \\ f''(1) = 6 \end{cases} \qquad f(1)\, f''(1) < 0 \quad \text{donc } x_0 = 2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 1}{3x_n^2 - 3}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 - 3} \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

c) Lagrange :

Soit (y_n) la suite obtenue par Lagrange

$y_0 \in [1, 2]$ tq $f(y_0)\, f''(y_0) < 0$

d'où $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = \dfrac{2f(y_n) - y_n f(2)}{f(y_n) - f(2)} \end{cases}$

$$y_{n+1} = \frac{2y_n^3 - 7y_n - 2}{y_n^3 - 3y_n - 2}$$

méthode de Horner

	2	0	-7	-2
2		4	8	2
	2	4	1	0

$$= \frac{(y_n - 2)(2y_n^2 + 4y_n + 1)}{(y_n - 2)(y_n^2 + 2y_n + 1)}$$

$2x^3 - 7x - 2 = (x-2)(2x^2 + 4x + 1)$

$$= \frac{2y_n^2 + 4y_n + 1}{y_n^2 + 2y_n + 1}$$

WWW.TAHIB24.COM

n	x_n	y_n
0	2	1
1	1,88 — 89	1,75
2	1,879451567	1,867768595
3	1,879385245	1,878446099
4	1,879385242	1,879303169
5	" "	1,879378365

Exercice 04 :

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$

Approximation de $\sqrt[3]{N}$ par Newton :

$\sqrt[3]{N}$ est la solution de l'equation $x^3 - N = 0$

On pose $f(x) = x^3 - N$ $\quad I = [0, +\infty[$

$f'(x) = 3x^2$ $\quad f' > 0$

$f''(x) = 6x$ $\quad f'' > 0$

(x_n) la suite obtenue par Newton :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f''(x_n)}$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + N}{3x_n^2}$$

2) Application : $N = 2$

$1 < 2 < 8$ $\quad 1 < \sqrt[3]{2} < 2$

$\sqrt[3]{2} \in [1, 2]$

$f(1)\, f''(1) = (-1)(6)$

$f(1)\, f''(1) < 0$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2} \end{cases}$$

www.tmpsa.com

n tel que $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$

$|x_4 - x_3| < 10^{-6}$

$x_4 = 1,259921 \pm 10^{-6}$

Rq : $x_5 = 1,25992105$

= valeur donnée avec la calculatrice

Exercice 05 :

$$f(x) = x - e^{-2x} = 0 \quad [1]$$

1. $f'(x) = 1 + 2e^{-2x} > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - e^{-2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} = \lim_{x \to -\infty} x - e^{-2x} = -\infty$$

f continue et strictement $\nearrow$

donc f bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

Donc l'equation (1) admet 1 solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$.

$f(0) = -1 \qquad f(1) = 1 - e^{-2} = \dfrac{e^{-2} - 1}{e^2} > 0$

$f(0)\, f(1) < 0 \Rightarrow \alpha \in [0, 1]$

2) Approximation de α par Newton :

$f'(x) = 1 + 2e^{-2x} > 0$ sur $[0, 1]$

$f''(x) = -4e^{-2x} < 0$ sur $[0, 1]$

$f(0)\, f''(0) = (-1) \times (-4) > 0$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - e^{-2x_n}}{1 + 2e^{-2x_n}} = \dfrac{(2x_n + 1)\, e^{-2x_n}}{1 + 2e^{-2x_n}} \end{cases}$$

(x_n) converge vers α par passage à la limite

WWW.TANGENTE24.COM

$$\alpha = \frac{(2\alpha+1)e^{-2\alpha}}{1+2e^{-2\alpha}}$$

$$\alpha + 2\alpha e^{-2\alpha} = 2\alpha e^{-2\alpha} + e^{-2\alpha}$$

$$\alpha - e^{-2\alpha} = 0$$

$$f(\alpha) = 0$$

n	x_n (arrondi à 10^{-4})
0	0
1	0,3333
2	0,4222
3	0,4263

$$\alpha = x_4 = 0,426302751 \pm 10^{-9}$$

3) $x = g(x) = \dfrac{\lambda x + e^{-2x}}{1+\lambda}$ $(\lambda > 0)$ (2)

(1) et (2) équivalente

$$g(x) = x \iff x = \frac{\lambda x + e^{-2x}}{1+\lambda}$$

$$\iff x + \lambda x = \lambda x + e^{-2x}$$

$$\iff x - e^{-2x} = 0$$

$$\iff f(x) = 0$$

b. Conditions de Convergence de la méthode du point fixes

$\forall x \in [0,1]$ $\quad g(x) \in [0,1]$

On a $\quad 0 \leq x \leq 1$

$$-2 \leq -2x \leq 0$$

$$e^{-2} \leq e^{-2x} \leq 1 \quad (3)$$

$$0 \leq \lambda x \leq \lambda \quad (4) \qquad (\lambda > 0)$$

www.FILIPROA.COM

(3) + (4) $\quad e^{-2} \leq \lambda x + e^{-2x} \leq \lambda + 1$

$$0 < \frac{e^{-2}}{1+\lambda} \leq \frac{\lambda x + e^{-2x}}{1+\lambda} \leq \frac{1+\lambda}{1+\lambda} = 1$$

$$0 \leq g(x) \leq 1$$

ii) Condition suffisante :

$\forall x \in [0,1] \qquad |g'(x)| < 1$

$\forall x \in [0,1] \qquad -1 < g'(x) < 1$

$$g'(x) = \frac{\lambda - 2e^{-2x}}{1+\lambda}$$

$$g''(x) = \frac{4e^{-2x}}{1+\lambda}$$

g' strictement $\nearrow$ sur $[0,1]$ $\forall x \in [0,1]$

$$\frac{\lambda - 2}{1+\lambda} \leq g'(x) \leq \frac{\lambda - 2e^{-2}}{1+\lambda}$$

$$\frac{\lambda - 2e^{-2}}{1+\lambda} < \frac{\lambda}{1+\lambda} < 1 \quad (\lambda > 0)$$

Il suffit de prendre $\lambda > 0$ tq $\frac{\lambda - 2}{\lambda + 1} > -1$

$$\frac{\lambda - 2}{\lambda + 1} > -1 \iff \frac{\lambda - 2}{\lambda + 1} + 1 > 0$$

$$\iff \frac{2\lambda - 1}{\lambda + 1} > 0$$

$$(1 + \lambda > 0) \qquad \iff 2\lambda - 1 > 0$$

$$\iff \lambda > \frac{1}{2}$$

Si $\lambda > \frac{1}{2}$ la suite (y_n) définie par :

$$\begin{cases} y_0 \in [0,1] \\ y_{n+1} = g(y_n) \end{cases}$$

WWW.TALIB24.COM

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n + e^{-2y_n}}{2} \end{cases} \quad (\lambda = 1)$$

n	y_n
0	0
1	0,5
2	0,433938
3	0,428903
4	0,426346
5	0,426306

Exercice 06 :

$$2x - \cos x = 0$$

WWW.TALIB24.COM

Approximation de β : $I = [10, 10^2]$

$$x^2 - 100x + 1 = 0 \iff x^2 = 100x - 1$$
$$\iff x = 100 - \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

1. $G(x) = 100 - \frac{1}{x}$

$G(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad G \nearrow$

$G([10, 100]) = [G(10) ; G(100)]$

$G(10) = 99,9 > 10$

$G(100) = 100 - \frac{1}{100} < 100$

$G([10, 100]) \subset [10, 100]$

2) $|G'(x)| = \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{10^2}$

On pose $L = 10^{-2}$ $\quad L < 1$

$$\begin{cases} y_0 = 10 \\ y_{n+1} = G(y_n) = 100 - \frac{1}{y_n} \end{cases}$$

n	y_n
0	10
1	99,9
2	99,98998999
3	99,989999

WWW.TAHIR24.COM

TD 3 D'ANALYSE NUMERIQUE SMA. SMI

Exercice 1

a) Construire le polynôme de Lagrange , $P_2(x)$, qui interpôle la fonction $f(x) = \sin(\pi x)$ aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$ et $x_2 = 1/2$

b) En déduire une valeur approchée de $\sin(\frac{\pi}{3})$,et donner une majoration de l'erreur commise

Exercice 2

a) Construire le polynôme de Lagrange , $P_2(x)$, qui interpôle la fonction $f(x) = x\ln x$ aux points $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$ et $x_2 = 2$ (On prendra la valeur arrondie de $f(x_i)$ à 10^{-4}prés)

b) En déduire une valeur approchée de f(1.75) ,et donner une majoration de l'erreur commise

Exercice 3

Soit f une fonction telle que f(0) = -5 , f(1) = -1.5 , f(3) = 7.75 , f(4) = 15 , et f(5) = 24

Déterminer une approximation de f(2) en utilisant la méthode de Neville

Exercice 4

Soit f une fonction vérifiant: f(0)=1 , f(0.1) =1.1052 et f(0.3)=1.3499

a) Déterminer le polynôme de Lagrange P_2 passant par ces trois points et calculer $P_2(0.2)$

b)Déterminer une approximation de f(0.2) en utilisant la méthode des moindres carrées

c) Construire la table de Neville pour approcher f(0.2)

d)Sachant que $f(x)=e^x$,en déduire la meilleure approximation de f(0.2) dans ce cas?

WWW.TALIB24.COM

Série 03

Exercice 01 :

a)

x_i	0	1/6	1/2
$y_i = f(x_i)$	0	0,5	1

$$f(x) = \sin(\pi x)$$
$$f(1/6) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$f(1/2) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$P_2(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + L_2(x)\, y_2$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-1/2)}{(\frac{1}{6}-0)(\frac{1}{6}-1/2)} = -18x^2 + 9x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1/6)}{(1/2-0)(1/2-1/6)} = 6x^2 - x$$

$$P_2(x) = L_1(x) \times 0{,}5 + L_2(x) \times 1$$
$$= -3x^2 + \frac{7}{2}x.$$

On vérifie que $P_2(0) = 0$, $P_2(1/6) = 1/2$

$$P_2(1/2) = 1$$

$$f(x) \simeq P_2(x)$$

b) $f\left(\frac{1}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \simeq P_2\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 0{,}833$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866$$

Majoration de l'erreur :

$$|f(x) - P_n(x)| = |E(x)| \leq \frac{M_{n+1} \left|\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\right|}{(n+1)!}$$

www.FSB24.COM

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

$n = 2$

$f(x) = \sin \pi x$

$f'(x) = \pi \cos \pi x$

$f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$

$f^{3}(x) = -\pi^3 \cos \pi x$

$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \qquad 0 \leq \pi x \leq \frac{\pi}{2}$

$\cos \frac{\pi}{2} \leq \cos \pi x \leq \cos 0$

$0 \leq \cos \pi x \leq 1 \qquad M_3 = \pi^3$

$$\left| E(1/3) \right| \leq \frac{\pi^3 \left| (1/3 - 0)(1/3 - 1/6)(1/3 - 1/2) \right|}{3!}$$

$$\left| E(1/3) \right| \leq 0{,}048$$

$f(x) = \sin(\pi x)$

$f(1/6) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1/2$

$f(1/2) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Exercice 02 :

$f(x) = x \ln x$

x_i	1	1,5	2
y_i	0	0,6082	1,3863

$P_2(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(1{,}5-1)(1{,}5-2)} = -4x^2 + 12x - 8$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-1{,}5)}{(2-1)(2-1{,}5)} = 2x^2 - 5x + 3$$

www.mlibra.com

$$P_2(x) = 0{,}3398x^2 + 0{,}3669x - 0{,}7067$$

b) $f(1{,}75) = 1{,}75 \ln 1{,}75 \simeq P_2(1{,}75) = 0{,}9760$

$$|E(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}\left(\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right)}{(n+1)!}$$

$$M_{n+1} = \max \left|f^{(n+1)}(x)\right|, \; x \in [a,b]$$

$x = 1{,}75$

$$M_3 = \max \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$|E(1{,}75)| \leq \frac{(1{,}75-1)(1{,}75-1{,}5)(1{,}75-2)}{6}$$

$$|E(1{,}75)| \leq 0{,}78 \cdot 10^{-2}$$

Exercice 03

0	1	3	4	5
-5	-1,5	7,75	15	24

Approximation de $f(2)$ par NEVILLE.

i	x_i	$y_i = P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$P_{i,3}$	$P_{i,4}$
0	1	-1,5	3,125	2,75	2,5	2,4
1	3	7,75	3,5	2	2,1	
2	0	-5	5	1,8		
3	4	15	-3			
4	5	24				

WWW.TAHIBEA.COM

1ère colonne :

$$P_{0,1} \begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ \hline -1,5 & 7,75 \end{array} = \frac{(2-3)}{(1-3)} * (-1,5) + \frac{(2-1)}{(3-1)} \times 7,75$$

$$= 3,125$$

$$P_{1,1} \begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ \hline 7,75 & -5 \end{array} = 3,5$$

$$P_{2,1} \begin{array}{c|c} 0 & 4 \\ \hline -5 & 15 \end{array} = 5$$

$$P_{3,1} \begin{array}{c|c} 4 & 5 \\ \hline 15 & 24 \end{array} = -3$$

2ème colonne :

$$P_{0,2} \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 3,125 & 3,5 \end{array} = 2,75$$

$$P_{1,2} \begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ \hline 3,5 & 5 \end{array} = 2$$

$$P_{2,2} \begin{array}{c|c} 0 & 5 \\ \hline 5 & -3 \end{array} = 1,8$$

3ème colonne :

$$P_{0,3} \begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline 2,75 & 2 \end{array} = 2,5$$

$$P_{1,3} \begin{array}{c|c} 3 & 5 \\ \hline 2 & 1,8 \end{array} = 2,1$$

4ème colonne :

$$P_{0,4} \simeq f(2) \begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ \hline 2,5 & 2,1 \end{array} = 2,4$$

WWW.TALEB24.COM

$$P_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\, y_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\, y_1$$

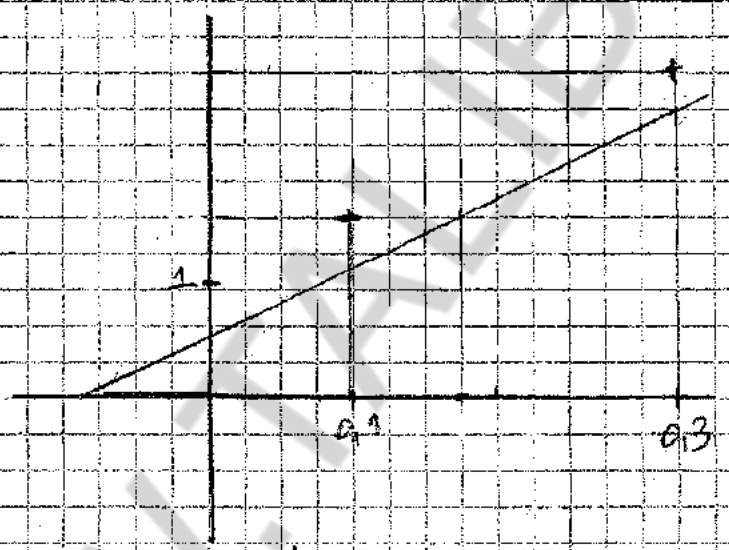
Exercice 04 :

0	0,1	0,3
1	1,1052	1,3499

$$P_2(0,2) = \frac{(0,2-0,1)(0,2-0,3)}{(0-0,1)(0-0,3)} \times 1 + \frac{(0,2-0)(0,2-0,3)}{(0,1-0)(0,1-0,3)} \times 1,1052$$
$$+ \frac{(0,2-0)(0,2-0,1)}{(0,3-0)(0,3-0,1)} \times 1,3499$$

$$P_2(0,2) \simeq 1,2218$$

$$P_2(0,2) = L_0(0,2)\, y_0 + L_1(0,2)\, y_1 + L_2(0,2)\, y_2$$



$$y = ax + b$$

$$\ell_n(a,b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial a}(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\partial \ell}{\partial b}(\bar{a},\bar{b}) = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial a}(\bar{a},\bar{b}) = \sum (\bar{a}x_i + \bar{b} - y_i)\, x_i = \bar{a}\sum x_i^2 + \bar{b}\sum x_i$$
$$= \sum x_i y_i \quad \text{---} (1)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b}(\bar{a},\bar{b}) = \sum (\bar{a}x_i + \bar{b} - y_i) \times 1 = \bar{a}\sum x_i + n\bar{b} = \sum y_i \quad (2)$$

WWW.TALIB24.COM

$$\begin{cases} 0{,}1\,\bar{a} + 0{,}4\,\bar{b} = 0{,}51549 & (1) \\ 0{,}4\,\bar{a} + 3\,\bar{b} = 3{,}4551 & (2) \end{cases}$$

$\bar{a} = 1{,}1745 \qquad \bar{b} = 0{,}9951$

$y = 1{,}1745x + 0{,}9951$

Si $x = 0{,}2 \qquad y = 1{,}23$

$$\bar{x} = \frac{0 + 0{,}1 + 0{,}3}{3} = \frac{0{,}4}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{1 + 1{,}1052 + 1{,}3499}{3}$$

0	0,1	0,3
1	1,1052	1,3499

i	x_i	$y_{0i} = P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
0	0,1	1,1052	1,2276	1,2219
1	0,3	1,3499	1,2333	
2	0	1		

WWW.TIPB24.COM

TD 4 D'ANALYSE NUMERIQUE SMA SMI

Exercice 1

Soit $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ déterminer l'approximation de I en utilisant les méthodes des trapèzes et **Simpson** avec h=0.5 et h=0.25

Exercice 2

Soit $I = \int_0^1 e^{-x^2}dx$. Déterminer une valeur approchée de I en utilisant la méthode de Simpson avec n=4

Exercice 3

Soit $I=\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$

a) Déterminer la valeur exacte de I , puis la valeur arrondie de I à 10^{-3}

b)En utilisant la méthode des **trapèzes** , quel pas doit on utiliser pour que l'erreur soit inferieur à 10^{-3} ?

c)Déterminer l'approximation de I ,en utilisant la méthode des **trapèzes** avec un pas h = 0.2 (on prendra les valeurs arrondies de $\sqrt{1+x_i}$ à 10^{-3}

Exercice 4

On considére la quadrature : $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$ (1) où f est une fonction continue sur $[0\,,\,1]$

1)Donner le système d'équations que doivent vérifier a_1,x_1, a_2 et x_2 afin que la **quadrature** (1) soit exacte pour tout polynôme f de degré inferieur ou égal à 3

2) Soit $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

a) Trouver à l'aide de (1) une valeur approchée de I On donne : x_1=0.11559 x_2= 0.74156 a_1=1.30429 et a_2=0.69571

b) Montrer que $I = 1 + 2\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2}$

c) Déterminer l'approximation de I ,en utilisant la méthode des **trapèzes** avec h = 0.25

WWW.TALIB24.COM

Série 04

Exercice 01

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$I_S(f)$ et $I_T(f)$ avec $h = 0{,}5$

et $h = 0{,}25$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
$f(x_i)$	1	0,9886	0,5989	0,9089	0,8415

Rappel : $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$

$$I_T(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

$$I_S(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

Avec $x_0 = a$ $\quad x_1 = \frac{a+b}{2}$ $\quad x_2 = b$

Si $h = 0{,}5$ $\quad I_1(f) = \frac{0{,}5}{2}\left[f(0) + 2f(0{,}5) + f(1)\right]$

$= 0{,}9398$

Si $h = 0{,}25$ $\quad I_T(f) = \frac{0{,}25}{2}\left[f(0) + 2f(0{,}25) + 2f(0{,}5) + 2f(0{,}75) + f(1)\right] = 0{,}9445$

$h = 0{,}5$ $\quad I_S(f) = \frac{0{,}5}{3}\left[f(0) + 4f(0{,}5) + f(1)\right]$

$= 0{,}9462$

$h = 0{,}25$ $\quad I_S(f) = \frac{0{,}25}{3}\left[f(0) + 4f(0{,}25) + 2f(0{,}5) + 4f(0{,}75) + f(1)\right]$

$= 0{,}9461$

WWW.EMBRCE.COM

Exercice 02

$$I(f) = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \qquad f(x) = e^{-x^2}$$

$$n = 4 \qquad h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
$f(x_i)$	1	0,9394	0,7788	0,5698	0,3679

$$I_s(f) = \frac{0{,}25}{3}\left[f(0) + 4f(0{,}25) + 2f(0{,}5) + 4f(0{,}75) + f(1)\right]$$

$$I_s(f) = 0{,}7469$$

Exercice 03

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \int_0^1 (1+x)^{1/2}\,dx$$

a) $$I = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}\right]_0^1$$

$$I = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$$

$$I \simeq 1{,}219$$

b) R tq $|e_1| = |I(f) - I_1(f)| \leq 10^{-3}$

$$|e_1| = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} \qquad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2} = -\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$$

WWW.TMLIB24.COM

$$\left|f''(x)\right| = \frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}} = \frac{1}{4}\left(\left|f''(0)\right|\right)$$

$$\left|e_T\right| = \frac{1}{48n^2} \leq 10^{-3} \iff n^2 \geq \frac{10^3}{48}$$

$$\iff n \geq 5$$

si $n=5$ $\quad h = \frac{1}{5} = 0,2$

x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\sqrt{1+x_i}$	1	1,095	1,183	1,265	1,342	1,414

$$I_T(f) = \frac{0,2}{2}\left[f(0) + 2f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8) + f(1)\right]$$

$$I_T(f) = 1,218$$

Exercice 0/3

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

$$f(x) = 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = a_1 + a_2 = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$$

$$f(x) = x \qquad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = a_1 x_1 + a_2 x_2 = \left[\frac{3}{2} x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = x^2 \qquad \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = \left[\frac{2}{5} x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$f(x) = x^3 \qquad \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 = \left[\frac{2}{7} x^{7/2}\right]_0^1 = \frac{2}{7}$$

WWW.TAYLEBOOK.COM

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 2 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 = \frac{2}{3} \\ a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 2/5 \\ a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 = 2/7 \end{cases}$$

a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ on a $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$I_Q = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

x_i	0,11559	0,74156
$f(x_i)$	0,89639	0,54420

$I_Q = 1,56863$

b) $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$

$u' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $u = 2\sqrt{x}$

$v = \frac{1}{1+x}$ $v' = \frac{-1}{(1+x)^2}$

$$I = \left[\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$$

$$I = 1 + 2\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$$

On pose: $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}$

x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
$g(x_i)$	0	0,32	0,31427	0,28278	0,25

WWW.TIB24.COM

$$I_S = 1 + \frac{2\times 0{,}25}{3}\left[g(0) + 4g(0{,}25) + 2g(0{,}5) + 4g(0{,}75) + g(1)\right]$$

$$I_S = 1{,}54828$$

$$I_T = 1 + 2\times\frac{0{,}25}{2}\left[f(0) + 2\left[g(0{,}25) + g(0{,}5) + g(0{,}75) + f(1)\right]\right]$$

$$I_T = 1{,}521025$$

Exercice 03:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -6 \end{cases}$$

1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2 $\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \Sigma_1^{(1)} \\ \Sigma_2^{(1)} \\ \Sigma_3^{(1)} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} \Sigma_1^{(1)} = \Sigma_1^{(2)} \\ \Sigma_2^{(1)} - \frac{1}{2}\Sigma_1^{(1)} = \Sigma_2^{(2)} \\ \Sigma_3^{(1)} - \frac{1}{2}\Sigma_1^{(1)} = \Sigma_3^{(2)} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -7 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \Sigma_1^{(2)} - 4\Sigma_2^{(2)} = \Sigma_1^{(3)} \\ \Sigma_2^{(2)} = \Sigma_2^{(3)} \\ \Sigma_3^{(2)} - 3\Sigma_3^{(2)} = \Sigma_3^{(3)} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 2 & 0 & 8 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

WWW.TALIB24.COM

$$\Sigma_1^{(5)} - \frac{3}{7}\Sigma_3^{(3)} = \Sigma_1^{(4)}$$
$$\Sigma_2^{(3)} + \frac{1}{7}\Sigma_3^{(3)} = \Sigma_2^{(4)}$$
$$\Sigma_3^{(3)} = \Sigma_3^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 10 & 13/7 & -4/7 & -8/7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5/14 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}\Sigma_1^{(4)} \\ \\ \frac{1}{7}\Sigma_3^{(4)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 13/14 & -4/14 & -8/14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5/14 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/7 & -3/7 & 1/7 \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -4 & -8 \\ -5 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$L_2 - L_3 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & -4+\lambda \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda)$$
$$= \lambda(4-\lambda)(\lambda-3)$$

www.TAHIR24.COM

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = 4$

$\rho(A) = \text{Max}\{|0|; |3|; |4|\} = 4$

Remarque : 0 est une valeur propre de A

d'où $\det A = 0$

A n'est pas inversible.

2) $TR\ A = 1+3+3 = 7$

$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 0+3+4 = 7$

Exercice 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} m-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & m-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & m-\lambda \end{vmatrix}$$

$$L_1+L_2+L_3 \quad \begin{vmatrix} m-\lambda+2 & m-\lambda+2 & m-\lambda+2 \\ 1 & m-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & m-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_B(\lambda) = (m-\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & m-\lambda \end{vmatrix}$$

$$C_2-C_1 \quad C_3-C_1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-\lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & m-\lambda-1 \end{vmatrix}$$

WWW.TALIB24.COM

$$P_B(\lambda) = (m - \lambda + 2)(m - \lambda - 1)^2$$

$\lambda_1 = m + 2$ simple

$\lambda_2 = m - 1$ double

$$\sum \lambda_i = \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3m$$

$$\rho(B) = \text{Max}\left\{ |m+2| ; |m-1| \right\}$$

m	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$\lvert m+2 \rvert$	$-m-2$	$m+2$	$m+2$	
$\lvert m-1 \rvert$	$\lvert m-1 \rvert$	$-m+1$	$m-1$	
$\lvert m+2 \rvert - \lvert m-1 \rvert$	-3	$2m+1$	3	

m	-2		$-1/2$		1
$2m+1$		$-$	0	$+$	

$$\rho(B) = \begin{cases} |m+2| & m \geq -1/2 \\ |m-1| & m \leq -1/2 \end{cases}$$

WWW.TMTBCM.COM

TD 5 D'ANALYSE NUMERIQUE SMA SMI

Exercice 1

On considère l'équation différentielle : (1) $\begin{cases} y'(x) = -xy(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

En utilisant la méthode d'**Euler** , déterminer l'approximation de la solution de l'équation différentielle (1)

dans l'intervalle $[0 , 1]$, en prenant un pas h = 0.2

Exercice 2

Dans l'intervalle $[0 , 0.4]$, on considére l'equation différentille:

$$(1)\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x(y+1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a)En utilisant la méthode **d'Euler** , donner avec 4 décimales les valeurs approchées de y(0.1) ; y(0.2) ; y(0.3) et y(0.4)

b)En déduire la valeurs approchée de $\int_0^{0.4} y(x)dx$ en utilisant les méthodes des **trapèzes** et de **Simpson**

c) Déterminer la valeur exacte de (1) ,et comparer les valeurs obtenues aux valeurs exactes.

Exercice 3

Dans IR on considére l'equation différentille: (1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x - y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

a)Vérifier que $y = e^{-x} + x$ est la solution de l'equation (1)

b)On pose $x_i = ih$ avec $1 \leq i \leq 10$ déterminer les valeurs approchées de $y(x_i)$ par la méthode d'**Euler** et la méthode d'**Euler** améliorée.

WWW.TALIB24.COM

Exercice 4

On considére dans l'intervalle $[1\ ,\ 1.4\ ]$,le probléme de **Cauchy** suivant :

$$(1)\ \begin{cases} x^2y' + y = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que le probléme (1) admet une solution unique

2) En utilisant la méthode d'Euler déterminer l'approximation de la solution aux points 1.1 , 1.2 , 1.3 et 1.4

3) Determiner la solution exacte de (1) .

4) A l'aide des résultats des questions précedentes, déterminer une approximation de $\int_1^{1.4} e^{\frac{1}{x}} dx$ en utilisant **Simpson** .

WWW.TALIB24.COM

Série 05

Exercice 01 :

$$\begin{cases} y'(x) = -x\,y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$I = [0,1]$ $\quad f(x,y) = -xy$

$h = 0{,}2 \quad h = \frac{b-a}{N} = \frac{1}{N} = 0{,}2 \Rightarrow N = 5$

$x_n = x_0 + nh = 0{,}2n$

$0 \leq n \leq 5$

y_n est l'approximation de y au point x_n

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \\ y_0 = 1 \quad 0 \leq n \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - h x_n y_n = y_n - 0{,}04\, n y_n = (1 - 0{,}04\, n)\, y_n \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

x_n	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y_n	1	1	0,96	0,8832	0,6523

Exercice 02 :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x(y+1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$I = [0, 0{,}4] \quad h = 0{,}1$

$f(x,y) = x(y+1)$

$y_{n+1} = y_n + (0{,}1)\, n\, (y_n + 1)$

WWW.TRABLSI.COM

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n(1+0{,}01h) + 0{,}01h \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

x_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y_n	1	1	1,02	1,0604	1,1222

b) $I(y) = \int_0^{0{,}4} y(x)\,dx$

$$I_T(y) = \frac{0{,}1}{2}\left[1 + 2\times 1 + 2\times 1{,}02 + 2\times 1{,}0604 + 1{,}222\right]$$

$$= 0{,}442$$

$$I_S(y) = \frac{0{,}1}{3}\left[1 + 4\times 1 + 2\times 1{,}02 + 4\times 1{,}0604 + 1{,}1222\right]$$

$$= 0{,}4135$$

$$\frac{dy}{dx} = 2dx$$

$$\ln(y+1) = \frac{x^2}{2} + k$$

$$|y+1| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{k}$$

$$|y+1| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{k}$$

$$y(x) + 1 = Ke^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(0) = K\,1 = 1 \Rightarrow K = 2 \text{ et donc}$$

solution $y(x) = 2e^{x^2/2} - 1$

Exercice 04 :

$$\begin{cases} x^2 y' + y = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad I = [1, 1{,}4]$$

$$\begin{cases} y' = \frac{-y}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

WWW.TAHIB24.COM

$$f(x,y) = \frac{-y}{x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{1^2} \quad (f \searrow)$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue et bornée

Donc (1) admet une solution unique

$h = 0,1 \qquad x_n = 1 + 0,1\,n$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0,1 \times \left(\frac{-y_n}{(1+0,1n)^2}\right. \end{cases}$$

WWW.TALEB24.COM

TD 6 D'ANALYSE NUMERIQUE SMA SMI

Exercice 1

Résoudre le sysème suivant en utilisant la méthode de **Gauss**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit A la matrice définie par : $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la factorisation LU de A en utilisant le procedés d'elimination de **Gauss**

2) Soit a un réel donné , utiliser la décomposition LU , de la question précedente pour calculer det A ,$\det A^{-1}$ et résoudre le systéme $AX= b$ où ${}^t b = (12a+2 , 20a-6 , 2)$

Exercice 3

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -6 \end{cases}$$

1) Déterminer la matrice A du systéme

2) Utiliser la méthode de **Gauss -Jordan** pour résoudre le système , et pour calculer la matrice A^{-1}

WWW.TALB24.COM

Exercice 4

1) Résoudre suivant les valeurs de a , le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + ax_3 = 7 \end{cases}$$

2) En déduire la factorisation LU de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & a \end{pmatrix}$$

Exercice 5

On considère le système d'équations linéaires :

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

1) Ecrire le système sous forme de matrice augmentée
2) Résoudre (1) par la méthode de **Gauss**
3) En déduire la décomposition LU de la matrice A du système (1)
4) En augmentant respectivement les matrices L et U de la matrice identité I_3,déterminer les matrices L^{-1} et U^{-1},et en déduire la matrice A^{-1}et retrouver la solution du système (1) .

WWW.TALIB24.COM

Série 06

Exercice 1

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Matrice augmentée :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1^{(1)} \\ E_2^{(1)} \\ E_3^{(1)} \end{vmatrix}$$

$$E_2^{(1)} + 2E_1^{(1)} = E_2^{(2)}$$
$$E_3^{(1)} - 2E_1^{(1)} = E_3^{(2)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$a_{22}^{(2)} = 0$$

On permute $E_3^{(2)}$ et $E_2^{(2)}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1 - Déterminer la factorisation LU de A en utilisant le procédé d'élimination de Gauss.

WWW.TALIB24.COM

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1^{(1)} \\ E_2^{(1)} \\ E_3^{(1)} \end{vmatrix}$$

$$E_2^{(1)} - 1E_1^{(1)} = E_2^{(2)} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$E_3^{(1)} - (-2)E_1^{(1)} = E_3^{(2)}$$

$$E_3^{(2)} - \left(-\frac{3}{4}\right) E_2^{(2)} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 15/4 \end{vmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

$A = LU$

$$\det A = \det(LU) = \det L \times \det U$$
$$= (1 \times 1 \times 1) \times \left(4 \times (-8) \times \frac{15}{4}\right)$$
$$= -120$$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = \frac{-1}{120}$$

(1) $\quad AX = b \iff LUX = b$

$$\iff \begin{cases} LY = b & (2) \\ UX = Y & (3) \end{cases}$$

On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$(2) = \begin{cases} y_1 = 12a + 2 \\ y_1 + y_2 = 20a - 6 \\ -2y_1 - \frac{3}{4} y_2 + y_3 = 2 \end{cases}$$

WWW.TAHIBRA.COM

$$Y = \begin{pmatrix} 12a+2 \\ 8a-8 \\ 30a \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12a+2 \\ -8x_2 + x_3 = 8a-8 \\ \frac{15}{4} x_3 = 30a \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 8a \end{pmatrix} \qquad X = (a, 1, 8a)$$

Exercice 04 :

1) Résoudre suivant les valeurs a, le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + ax_3 = 7 \end{cases}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & -4 & a & 7 \end{matrix}\right|$$

$$E_2^{(1)} - 2E_1^{(1)} = E_2^{(2)}$$
$$E_3^{(1)} - 3E_1^{(1)} = E_3^{(2)}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & a-12 & 1 \end{matrix}\right|$$

$$E_3^{(2)} - 2E_2^{(2)} = E_3^{(3)}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & a-6 & 3 \end{matrix}\right|$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_2 - 3x_3 = -1 \\ (a-6)x_3 = 3 \end{cases}$$

WWW.TALIB24.COM

1er cas $a-6=0$ càd $a=6$ $S=\phi$

2ème cas $a-6\neq 0$ $a\neq 6$

$$X=\frac{1}{a-6}\begin{pmatrix}6\\15-a\\3\end{pmatrix}$$

2) En déduire la factorisation LU

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}\qquad U=\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&-3\\0&0&a-6\end{pmatrix}$$

Exercice 05 :

On considère le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=3\\2x_1+4x_2-6x_3=8\\3x_1-x_2+3x_3=10\end{cases}$$

1) Matrice augmentée :

$$\left|\begin{matrix}1&1&-2&3\\2&4&-6&8\\3&-1&3&10\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}E_1^{(1)}\\E_2^{(1)}\\E_3^{(1)}\end{matrix}\right|$$

2) $E_2^{(1)}-2E_1^{(1)}=E_2^{(2)}$

$E_3^{(1)}-3E_1^{(1)}=E_3^{(2)}$

$$\left|\begin{matrix}1&1&-2&3\\0&2&-2&2\\0&-4&9&1\end{matrix}\right|$$

$E_3^{(2)}-(-2)E_2^{(2)}=E_3^{(3)}$

$$\left|\begin{matrix}1&1&-2&3\\0&2&-2&2\\0&0&5&5\end{matrix}\right|$$

$$X=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

WWW.FSBG.COM

$$E_1^{(2)} - E_2^{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{U^{-1}}$$

$$U^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $A = LU$

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -24 & 9 & 2 \\ -14 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $AX = b \iff X = A^{-1}b$

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

WWW.TALEB24.COM

3) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

4)
$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{matrix}}_{L} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3}\right) = \begin{pmatrix} E_1^{(1)} \\ E_2^{(1)} \\ E_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_2^{(1)} - 2E_1^{(1)} = E_2^{(2)} \\ E_3^{(1)} - 3E_1^{(1)} = E_3^{(2)} \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$E_3^{(2)} + 2E_2^{(2)} = E_3^{(3)} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\cancel{4} & 2 & 1 \end{matrix}}_{L^{-1}}\right)$$

Inverse de U :

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} E_1^{(1)} \\ E_2^{(1)} \\ E_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ \frac{1}{2} E_2^{(1)} \\ \frac{1}{5} E_3^{(1)} \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{matrix} E_1^{(1)} + 2E_3^{(1)} = E_1^{(2)} \\ E_2^{(1)} + E_3^{(1)} = E_2^{(2)} \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1/2 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{matrix}\right)$$

WWW.EMTEC24.COM

$$E_1^{(2)} - E_2^{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{U^{-1}}$$

$$U^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $A = LU$

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -24 & 9 & 2 \\ -14 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $AX = b \iff X = A^{-1}b$

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

WWW.TALEB24.COM

TD 7 D'ANALYSE NUMERIQUE SMA SMI

Exercice 1

On considère le système d'équations linéaires :

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

1° Déterminer la matrice A du système (1) ,et montrer que A est inversible

2° La matrice A est-elle à diagonale strictement dominante ?

3° Effectuer des permutations convenables pour rendre la matrice du système à diagonale strictement dominante

4°Effectuer 6 itérations par les méthodes de **Jacobi** et de **Gauss Seidel** pour approcher la solution X du système ,en partant de $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

On considère le système d'équations linéaires :

$$(1)\quad \begin{cases} 5x_1 + \alpha x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 = 20 \end{cases} \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

1° Déterminer la matrice du système (1)

2° Donner une condition suffisante sur α pour que les méthodes itératives de **Jacobi** et de **Gauss Seidel** soient convergentes

3° On prend $\alpha = -2$

Utiliser la méthode de **Gauss Seidel** pour pour approcher la solution du système (1) en partant de ${}^tX^{(0)} = (0 , 0 , 0)$ (faire 3 itérations)

WWW.TALIB24.COM

Exercice 3

Soit a un paramétre réel . On considére le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 + |a|x_2 = \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + |a|x_3 = 1 \\ -\frac{1}{2}x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a)Déterminer la matrcice A du système et montrer qu'elle est inversible pour tout réel a

b) Donner une condition suffisante sur a pour que les méthodes de **Jacobi** et de **Gauss Seidel** soient convergentes.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que les méthodes de **Jacobi** et de **Gauss Seidel** soient convergentes

d) On suppose que $a = \frac{1}{2}$. Effectuer 3 itérations par les méthodes de **Jacobi** et de **Gauss Seidel** pour approcher la solution X du système ,en partant de $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE 4

On considère le système d'équations linéaires :

$$(1) \begin{cases} x_1 + \theta x_2 = 0 \\ \theta x_1 + x_2 + \theta x_3 = 3 \\ \theta x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

1° Déterminer la matrice du systeme (1)

2° Donner une condition suffisante sur θ pour que les méthodes itératives de **Jacobi** et de **Gauss Seidel** soient convergentes

3° Donner une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que la méthodes itérative de **Jacobi** soit convergente

4° On prend $\theta = -0.5$

Utiliser la méthode de **Jacobi** pour résoudre le système (1)

Prendre ${}^tX^{(0)}=(2 , 5 , 2)$ et faire 6 itérations .

WWW.TALIB24.COM

Série 7

Exercice 1

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

1)- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 6 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

A inversible $\Leftrightarrow$ det $A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 6 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -11 - 6 \times 39 - 2 \times (-8) = -229 \neq 0.$$

2)- $|1| < |2| + |5|$

A n'est pas à DSD.

3)- $A' = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

$|6| > |-2| + |1|$.

$|7| > |-2| + |2|$.

et $|-5| > |1| + |2|$.

Donc A' est à DSD.

WWW.TALEB24.COM

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

4) - Jacobi :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{6}\left(11 + 2x_2^{k} - x_3^{k}\right) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{7}\left(5 + 2x_1^{k} - 2x_3^{k}\right) \\ x_3^{k+1} = -\frac{1}{5}\left(-1 - x_1^{k} - 2x_2^{k}\right) \end{cases}$$

k	0	1	2	3	4
x_1^k	0	1,8333	2,0381	2,0849	2,0044
x_2^k	0	0,7143	1,1809	1,0531	1,0014
x_3^k	0	0,2	0,8524	1,0800	1,0332

GAUSS SEIDEL :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{6}\left(11 + 2x_2^{k} - x_3^{k}\right) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{7}\left(5 + 2x_1^{k+1} - 2x_3^{k}\right) \\ x_3^{k+1} = -\frac{1}{5}\left(-1 - x_1^{k+1} - 2x_2^{k+1}\right) \end{cases}$$

k	0	1	2	3
x_1^k	0	1,8333	2,0691	1,9953
x_2^k	0	1,2381	1,0021	0,9953
x_3^k	0	1,0619	1,0147	0,9978

WWW.TIRIBA.COM

Exercice 02 :

1) $A_\alpha = \begin{pmatrix} 5 & \alpha & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

$A_{-2} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

2- f est CSD si $\begin{cases} |5| > |\alpha| + |-1| \\ |5| > |-2| + |1| \\ |10| > |-1| + |1| \end{cases}$

$|\alpha| < 4$

$\alpha \in]-4, 4[$

$\alpha = -2$.

G.S :

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{5}\left(1 + 2x_2^k + x_3^k\right)$$
$$x_2^{k+1} = \frac{1}{5}\left(5 + 2x_1^{k+1} - x_3^k\right)$$
$$x_3^{k+1} = \frac{1}{10}\left(20 + x_1^{k+1} - x_2^{k+1}\right).$$

k	0	1	2	4	
x_1^k	0	0,2	1,0144	1,00916	
x_2^k	0	1,08	1,02336	1,00335	
x_3^k	0	1,912	1,99910	2,00053	

$X = (1, \quad , 2)$.

WWW.TALEB24.COM

Exercice 03

a/- $A_a = \begin{pmatrix} 1 & |a| & 0 \\ -1/2 & 1 & |a| \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & |a| \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} |a| & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + \frac{|a|}{2} + \frac{|a|}{2}$$

$$= 1 + |a| > 0.$$

$\det A \neq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

b/- J et G-S CV si A est à DSD.

C.à.d :
$$\begin{cases} |1| > |a| \\ |1| > \left|-\frac{1}{2}\right| + |a| \\ |1| > \left|-\frac{1}{2}\right| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a| < 1 \\ |a| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

d'où $|a| < \frac{1}{2}$.

$$-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2} \iff a \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

c/- J converge(vers) si $\rho(B_J) < 1$.

$A = M - N$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -|a| & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -|a| \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B_J = M^{-1}N = I_3 N = N.$$

$$P_{B_J}(\lambda) = \det(B_J - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -|a| & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\lambda & -|a| \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix}.$$

WWW.FILIB24.COM

$$P_{BJ}(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + |a|)$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = i\sqrt{|a|} \quad ; \lambda_3 = -i\sqrt{|a|}.$$

$$\rho(B_J) = \sqrt{|a|} < 1 \iff |a| < 1.$$

$$a \in]-1,1[.$$

G.S. Cv si $\rho(B_{GS}) < 1$.

$$A = M - N \; ; \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} ; N = \begin{pmatrix} 0 & |a| & 0 \\ 0 & 0 & |a| \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

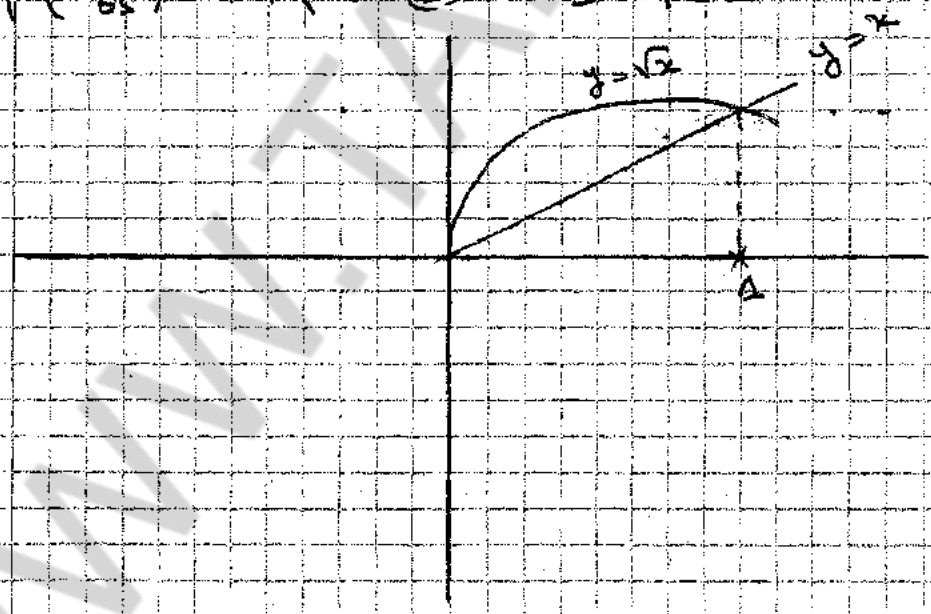
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{GS} = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -|a| & 0 \\ 0 & -\frac{|a|}{2} & -|a| \\ 0 & -\frac{|a|}{4} & -\frac{|a|}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_{BS}(\lambda) = -\lambda^2(\lambda + |a|)$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -|a|.$$

$$\rho(B_{GS}) = |a| < 1 \iff a \in]-1,1[.$$



WWW.TAHIB24.COM

Remarque $|a| < \sqrt{|a|} \quad \forall \; a \in]-1, 1[$

$$\rho(B_{GS}) < \rho(B_J)$$

GS converge plus vite que J.

Exercice 04

1)- $A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ \theta & 1 & \theta \\ 0 & \theta & 1 \end{pmatrix}$

2)- J et GS converge si $\begin{cases} |1| > |\theta| \\ |1| > 2|\theta| \\ |1| > |\theta| \end{cases}$

$$|\theta| < \frac{1}{2}$$

$$\theta \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

3)- J converge $\Leftrightarrow \rho(B_J) < 1$

$A_\theta = M - N \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$N = \begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ -\theta & 0 & -\theta \\ 0 & -\theta & 0 \end{pmatrix}$

$$B_J = N$$

$$P_{B_J}(\lambda) = \det(N - \lambda I_3)$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -\theta & 0 \\ -\theta & -\lambda & -\theta \\ 0 & -\theta & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 2\theta^2)$$

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = \theta\sqrt{2} \qquad \lambda_3 = -\theta\sqrt{2}$

$$\rho(B_J) = \sqrt{2} \times |\theta| < 1 \qquad |\theta| < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Jacobi converge $\Leftrightarrow \theta \in]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$

WWW.TAHAR24.COM

4) $\theta = -0{,}5$

$$x_1^{k+1} = 0{,}5\, x_2^{k}$$
$$x_2^{k+1} = 3 + 0{,}5\, x_1^{k} + 0{,}5\, x_3^{k}.$$
$$x_3^{k+1} = 0{,}5\, x_2^{k}.$$

$x_1^{0} = x_3^{0} = 2$; $x_2^{0} = 5.$

$$x_1^{k} = x_3^{k}$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = x_3^{k+1} = 0{,}5\, x_2^{k} \\ x_2^{k+1} = 3 + x_1^{k} \end{cases}$$

k	0	1	2	3	4
x_1^{k}	2	2,5	2,5	2,75	2,875
x_2^{k}	5	5	5,5	5,75	5,875
x_3^{k}	2	2,5	2,5	2,75	2,875

WWW.TALIB24.COM