TD D'Analyse III
Filières SMA/SMI (Sem. 3)
Série 1

Exercice 1 *On définit sur $\mathbb{R}^2$ les normes suivantes :*

$$N_1(x,y) = |x| + |y|, \quad N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad N_\infty(x,y) = \max\{|x|,|y|\}.$$

Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$N_\infty(x,y) \leq N_2(x,y) \leq N_1(x,y) \leq 2N_\infty(x,y).$$

En déduire que les trois normes sont équivalentes deux à deux.

Exercice 2 *Soit E le le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des suites réelles bornées $U = (U_n)_n$ telles que $U_0 = 0$. On définit :*

$$N_\infty(U) = \sup_n |U_n| \quad \text{et} \quad N(U) = \sup_n |U_{n+1} - U_n|.$$

1. *Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E.*
2. *Montrer que :*

$$\forall U \in E, \quad N(U) \leq 2N_\infty(U) \quad \text{et} \quad \exists U \in E\backslash\{0\}, \quad N(U) = 2N_\infty(U).$$

3. *Soit $\alpha \in R^{+*}$ et $\alpha' = \inf(\alpha, 1)$, considérer la suite $U = (U_n)_n$ définie par*

$$U_n = \begin{cases} \dfrac{n\alpha'}{2} & si \quad n \leq E\left(\dfrac{2}{\alpha'}\right) \\ 1 & si \quad n > E\left(\dfrac{2}{\alpha'}\right) \end{cases}.$$

WWW.TALIB24.COM

(a) *Calculer* $N_\infty(U)$ *et* $N(U)$.

(b) *En déduire que* N_∞ *et* N *ne sont pas équivalentes.*

Exercice 3 *Soit* F *le* $\mathbb{R}-$*e.v. des fonctions continues de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$.
Pour $f \in F$, *on pose :*

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,dt, \qquad N_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

1. *Montrer que* N_1 *et* N_∞ *sont des normes sur* F.

2. *Montrer qu'il existe un réel* $a > 0$ *tel que :*

$$\forall f \in F, \qquad N_1(f) \leq a\, N_\infty(f).$$

3. *Soit* $(f_n)_n$ *la suite de* F *définie par*

$$f_n(t) = nte^{-nt}.$$

(a) *Calculer* $N_1(f_n)$ *et* $N_\infty(f_n)$.

(b) *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *converge vers* 0 *dans* $(F,\ N_1)$ *et diverge dans* $(F,\ N_\infty)$.
Que peut-on conclure ?

Exercice 4 *Soient* $(E, \|.\|)$ *un evn et* $a, b \in E$ *tels que* $a \neq b$. *Montrer qu'il existe un voisinage* V_a *de* a *et un voisiage* V_b *de* b *tels que* $V_a \cap V_b = \emptyset$.

Exercice 5 *Soient* A *et* B *deux parties non vides de* $\mathbb{R}$. *On définit*

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}, \exists a \in A, \exists b \in B,\ x = a + b\}.$$

Montrer que si A *est ouvert, alors* $A + B$ *est ouvert.*

Exercice 6 *Soient* E *un* $\mathbb{R}-$*ev,* N_1, N_2 *deux normes sur* E *et*

$$B_1 = \{x \in E, N_1(x) < 1\},$$

$$B_2 = \{x \in E, N_2(x) < 1\}.$$

Montrer que :

$$B_1 = B_2 \Rightarrow N_1 = N_2.$$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 7 *Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que*

$$\forall x \in E, \qquad N_1(x) \leq \alpha N_2(x).$$

Montrer que toute boule ouverte de (E, N_1) est un ouvert de (E, N_2), et plus généralement tout ouvert de (E, N_1) est un ouvert de (E, N_2).

Exercice 8 *Soient E un evn et A, B deux parties de E.*

1. *Montrer les implications suivantes :*

$$\begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}, \\ A \subset B &\Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}. \end{aligned}$$

2. *Montrer que :*

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$\mathring{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}, \qquad \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \mathring{\widehat{A \cup B}}.$$

En donnant des exemples, prouver que les inclusions peuvent être strictes.

Exercice 9 *Soit A le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :*

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2\right\} \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A.

Exercice 10 *Soient E un evn et $A \subset E$. Montrer que les propositions sont équivalentes :*

1. $x \in \overline{A}$,
2. *Il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers x,*
3. $\inf_{a \in A} \|x - a\| = 0$.

Exercice 11 *Soit E un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E.*

1. *Montrer que $\overline{F}$ est un sous espace vectoriel de E.*
2. *Montrer que si $\mathring{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$.*

WWW.TALIB24.COM

T.D 1 : Topologie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 On définit sur $\mathbb{R}^2$ les normes suivantes :

▲ Montrer que pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on à :

$$N_\infty(x;y) \underset{①}{\leq} N_2(x;y) \underset{②}{\leq} N_1(x;y) \underset{③}{\leq} 2N_\infty(x;y)$$

③ on à : $|x| \leq \max(|x|,|y|)$ et $|y| \leq \max(|x|,|y|)$

Donc $|x|+|y| \leq 2.\max(|x|,|y|)$

telle que : $N_1(x;y) \leq 2.N_\infty(x,y)$

① on à : $x^2 \leq x^2+y^2$ et $y^2 \leq x^2+y^2$

t.q $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

Alors $\max\{|x|+|y|\} \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow N_\infty(x,y) \leq N_2(x,y)$

② on à : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ $x^2+y^2 \leq |x|^2+|y|^2+2|x||y| = (|x|+|y|)^2$

t.q $\sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y|$

donc : $N_2(x;y) \leq N_1(x;y)$

d'après ① et ② et ③ on :

$$N_\infty(x;y) \leq N_2(x,y) \leq N_1(x,y) \leq 2N_\infty(x,y)$$

▲ on à :

* $N_\infty \leq N_2 \leq 2N_\infty$

  $\alpha = 1$; $\beta = 2$

* $N_\infty \leq N_1 \leq 2N_\infty$

  $\alpha = 1$; $\beta = 2$

on à : $N_2 \leq N_1 \leq 2N_\infty \leq 2N_2$

$\Rightarrow N_2 \leq N_1 \leq 2N_2$

WWW.TALIB24.COM

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ $E = \{ U = (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, \text{bornée et } U_0 = 0 \}$

$N_\infty(U) = \sup_n |U_n|$ et $N(U) = \sup_n |U_{n+1} - U_n|$

1- ▲ On montrera que N_∞ est une normes sur E.

* on a : $N_\infty(|U|) = 0 \Leftrightarrow \sup_n |U_n| = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow |U_n| = 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow U_n = 0$

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$N_\infty(\lambda U) = \sup_n |\lambda U_n| \quad (n \in \mathbb{N})$

$= \sup_n |\lambda| . |U_n| \quad (n \in \mathbb{N})$

$= |\lambda| . \sup |U_n| \quad (n \in \mathbb{N}$

$= |\lambda| . N_\infty(U)$

* $U = (U_n)_n$, $V = (V_n)_n \in E$

on à : $N_\infty(U_n + V_n) = \sup_n |U_n + V_n| \quad n \in \mathbb{N}$

$|U_n + V_n| \leq |U_n| + |V_n| \leq \sup_n |U_n| + \sup_n |V_n| \quad \forall n$

$\Rightarrow \sup |U_n + V_n| \leq \sup |U_n| + \sup |V_n| \quad (n \in \mathbb{N})$

Donc $N_\infty(U+V) \leq N_\infty(U) + N_\infty(V)$

▲ . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$N(\lambda U) = \sup_n |\lambda U_{n+1} - \lambda U_n|$

$= \sup_n |\lambda (U_{n+1} - U_n)|$

$= |\lambda| \sup |U_{n+1} - U_n|$

$= |\lambda| . N(U)$.

on a : $N(U) = 0$

$\Leftrightarrow \sup_n |U_{n+1} - U_n| = 0$ et $U_0 = 0$

$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = 0 \ \forall n$ et $U_0 = 0$

$\Leftrightarrow U_n = cte$ et $U_0 = 0$

$\Leftrightarrow U_n = 0 \ \forall n$.

. Soit $U = (U_n)_n$ et $V = (V_n)_n \in E$

on à : $N(U+V) = \sup_n |(U_{n+1} + V_{n+1}) - (U_n + V_n)|$

WWW.TALIB24.COM

$$= \sup_n |U_{n+1} - U_n + V_{n+1} - V_n|$$

on a : $|U_{n+1} - U_n + V_{n+1} - V_n| \leq |U_{n+1} - U_n| + |V_{n+1} - V_n|$

$$\leq \sup_n |U_{n+1} - U_n| + \sup_n |V_{n+1} - V_n|$$

d'où : $N(U+V) \leq N(U) + N(V)$

2- $\forall U \in E$ on Montrer que :

$$N(U) \leq 2 N_\infty(U)$$

on à : $|U_{n+1} - U_n| \leq |U_{n+1}| + |-U_n|$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

$\sup |U_{n+1} - U_n| \leq \sup_n |U_{n+1}| + \sup_n |U_n|$

et puis que U_n est cte donc $U_{n+1} = U_n$

Alors $N(U) \leq 2 \sup_n |U_n| = 2 N_\infty(U)$

- $U = (U_n)$

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_n = (-1)^n \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

On a bien $U \in E$

$N_\infty(U) = 1$

Pour $n \geq 1$

$U_{n+1} - U_n = (-1) - (1) = -2$ (si n est paire)

$U_{n+1} - U_n = 1 - (-1) = 2$ (si n est impaire)

Pour $n = 0$ $U_1 - U_0 = -1$

$N(U_{n+1} - U_n) = 2$, On a $N(U) = 2N_\infty(U)$

WWW.TALIB24.COM

3_ Soit $\alpha > 0$; $\alpha' = \inf(\alpha ; 1)$

$$U_n = \begin{cases} \frac{n\alpha'}{2} , & \text{si } n \leq E\left(\frac{2}{\alpha'}\right) \\ 1 , & \text{si } n > E\left(\frac{2}{\alpha'}\right) \end{cases}$$

(a) Si $n \leq E\left(\frac{2}{\alpha'}\right) \leq \frac{2}{\alpha'}$

$\Rightarrow \frac{n\alpha'}{2} \leq 1$

d'où $N_\infty(U) = 1$

$N(U) = \sup |U_{n+1} - U_n|$

- Si $n > E\left(\frac{2}{\alpha'}\right)$

$\Rightarrow U_{n+1} = U_n = 1 \Rightarrow U_{n+1} - U_n = 0$

- Si $n \leq E\left(\frac{2}{\alpha'}\right)$

1ér cas : $n < n+1 \leq E\left(\frac{2}{\alpha'}\right)$

$|U_{n+1} - U_n| = \left| \frac{n\alpha'}{2} - \frac{(n+1)\alpha'}{2} \right| = \frac{\alpha'}{2}$

2éme cas : $n \leq E\left(\frac{2}{\alpha'}\right) < n+1$

$|U_{n+1} - U_n| = \left| 1 - \frac{n\alpha'}{2} \right|$

$n = 1 - \frac{n\alpha'}{2}$

On remarquera que $n = E\left(\frac{2}{\alpha'}\right)$

$\frac{2}{\alpha'} - 1 < E\left(\frac{2}{\alpha'}\right) \leq \frac{2}{\alpha'}$

$\frac{2}{\alpha'} - 1 < n < \frac{2}{\alpha'}$

$2 - \alpha' \leq n\alpha' \leq 2$

$1 - \frac{\alpha'}{2} \leq \frac{n\alpha'}{2} \leq 1$

or $1 - \frac{\alpha'}{2} \leq \frac{n\alpha'}{2} \Rightarrow 1 - \frac{n\alpha'}{2} < \frac{\alpha'}{2}$

WWW.TALIB24.COM

d'où (b)- En déduire que N_∞ et N ne sont pas équivalente

Soit $\alpha > 0$

on a : $\alpha' = \inf\{\alpha ; 1\}$

donc : $\frac{\alpha'}{2} < \alpha' \leq \alpha$

or : $\frac{\alpha'}{2} \doteq N(U) < \alpha = \alpha N_\infty(U)$

Alors : $\forall \alpha > 0 \ \exists U \in E \ / \ N(U) < \alpha N_\infty(U)$

d'où $N(U)$ et $N_\infty(U)$ ne sont pas équivalentes.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ $F = \{ f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continues} \}$

$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,dt$; $N_\infty(f) = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|$

1- on montrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur F.

Pour : $N_\infty(f)$

$N_\infty(f) = 0 \Leftrightarrow \sup_{t\in[0;1]} |f(t)| = 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in [0;1] \ |f(t)| = 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in [0;1] ; \ f(t) = 0 \Leftrightarrow f = 0$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$N_\infty(\lambda f) = \sup_{t\in[0;1]} |\lambda f(t)| = |\lambda| . \sup_{t\in[0;1]} |\lambda f(t)| = |\lambda| N_\infty(f)$

Soient f et $g \in F$, $I = [0;1]$

on a $N_\infty(f+g) = \sup_{t\in I} |f(t) + g(t)|$

on a $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$

$\leq \sup_{t\in I} |f(t)| + \sup_{t\in I} |g(t)|$

donc $\sup |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t\in I} |f(t)| + \sup_{t\in I} |g(t)|$

WWW.TALIB24.COM

Alors : $N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$.

Pour $N_1(f)$ est un Norme

$N_1(f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f(t)|dt = 0$

$\Leftrightarrow |f(t)| = 0 \ \forall t$ car $|f(t)| \geq 0$

$\Leftrightarrow f = 0$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$N_1(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda . f(t)| dt$

$= |\lambda| . \int_0^1 |f(t)| . dt$

$= |\lambda| . N_1(f(t))$

Soient f et $g \in F$

$N_1(f+g) = \int_0^1 |f(t)+g(t)| . dt$

Sachant que

$|f(t)+g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$

donc $\int_0^1 |f(t)+g(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |g(t)| dt$

Alors $N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$

Alors N_1 est un Norme.

2- Montrer $\exists a > 0$ tq

$\forall f \in E, \ N_1(f) \leq a N_\infty(f)$

Remarquons que chaque $x \in [0;1]$ on a :

$|f(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$

on Intègre cette inégalité entre 0 et 1 et on trouve :

WWW.TALIB24.COM

$$\int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|\,dt$$

donc $\int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \sup |f(t)|$

d'où $\exists a = 1$ tq $N_1(f) \leq a . N_\infty(f)$.

(a)- on définit sur F :

$$f_n(t) = n.t.e^{-nt}$$

- $N_1(f_n) = \int_0^1 n.t.e^{-nt}\,dt$

on Intégrent par partie et on obtient :

$t \in [0,1]$: $N_1(f_n) = -e^{-n} - \frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}$

- $N_\infty(f_n) = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{e}$

(b)- Rappel : $(E, \|.\|)$ e.v.n

$x_n \to l$ dans $(E, \|\|)$ si

$\forall \varepsilon_0 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - l\| \leq \varepsilon_0$

$\lim_n \|x_n - l\| \Rightarrow 0$

$(f_n)_n \to 0$ dans (F, N_1)

et $(f_n)_n$ div dans (F, N_∞)

$N_1(f_n - 0) \to 0$

$\lim N_1(f_n) = \lim (f_n - 0) = 0$

$\to$ on suppose que $(f_n)_n$ converge

dans (F, N_∞) soit f la limite de $(f_n)_n$.

$\lim N_\infty(f_n - f) = 0$

WWW.TALIB24.COM

en particulier, on a

$\forall n \in \mathbb{N} \quad N_1(f_n - f) \leq N_\infty(f_n - f)$

on a alors : $\lim N_1(f_n - f) = 0$

Donc $f_n \to f$ dans (F, N_1)

or $f_n \to 0$ dans (F, N_1)

d'après l'unicité de la limite $f = 0$ (a-d

$\lim N_\infty(f_n) = 0$ or

$\lim N_\infty(f_n) = \frac{1}{e}$ (absurde)

Conclusion : N_1 et N_∞ ~~sont~~ sont pas équivalents car $\exists$ une suite de F qui converge pour N_1 et diverge pour N_∞

Exercice 4 : $(E, \|.\|)$

$a, b \in E, \; a \neq b$

$\exists V_a$ Vois. de a

et $\exists V_b$ Vois. de b

tels que : $V_a \cap V_b = \emptyset$

$a \neq b \Leftrightarrow a - b \neq 0_E$

$\Leftrightarrow \|a - b\| > 0$

$\Leftrightarrow \exists r > 0, \; 0 < r < \frac{\|a-b\|}{2}$

$\Leftrightarrow B(a, r) \cap B(b, r) = \emptyset$

et Soit $x \in B(a; r) \Leftrightarrow \|x - a\| < r$

$\|x - b\| \geq \|x - a\| - \|x - b\|$

$\geq 2r - r = r$

$\Rightarrow x \in B(b, r)$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 5 $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$

$A+B = \{x \in \mathbb{R}, \exists a \in A, \exists b \in B, x = a+b\}$

A est ouvert $\Rightarrow$ $A+B$ ouvert.

- on a la réunion d'une famille (quelconque) d'ouverts est un ouvert or: $A+B = \bigcup (A+\{b\}) / b \in B$

Il suffit de prouver que $A+\{b\} \forall b \in B$ est un ouvert.

Soit $x \in A+\{b\}$. donc $\exists a \in A$ tq $x = a+b$

Or : A est ouvert donc $\exists r > 0$ tq $]a-r, a+r[\subset A$

Mq : $](a+b)-r ; (a+b)+r[\subset A+\{b\}$

Soit $x \in](a+b)-r ; (a+b)+r[$

donc : $|x-(a+b)| = |(x-b)-a| < r \Rightarrow$

$x-b \in]a-r, a+r[\subset A$

$x-b = a' \in A$

$\Rightarrow x = a'+b \in A+\{b\}$

A lors:

A ouvert $\Rightarrow$ $A+B$ est un ouvert.

Exercice 6

$B_1 = \{x \in E / N_1(x) < 1\} = B_{N_1}(0;1)$

$B_2 = \{x \in E / N_2(x) < 1\} = B_{N_2}(0;1)$

Mq : $B_1 = B_2 \Longrightarrow N_1 = N_2$

On a : $N_1(0) = N_2(0)$

Supposons $\exists x \neq 0$ tq $N_1(x) \neq N_2(x)$

Supposons $N_1(x) < N_2(x)$ (même raisonnement si $N_2(x) < N_1(x)$)

WWW.TALIB24.COM

$\Rightarrow \frac{N_1(X)}{N_2(X)} < 1$ (car $N_2(X) \neq 0$) $\leftarrow$ (1er axiome de norme)

$\frac{N_1(X)}{N_2(X)} = N_1\left(\frac{x}{N_2(X)}\right) < 1 \Rightarrow \frac{x}{N_2(X)} \in B_1$

or $B_1 = B_2 \Rightarrow \frac{x}{N_2(X)} \in B_2$ — (2ème axiome de norme)

$\Rightarrow N_2\left(\frac{x}{N_1(X)}\right) = \frac{N_2(X)}{N_1(X)} = 1 < 1$

Ce qui est absurde.

donc $N_1(X) = N_2(X)$.

Exercice 7 N_2 et N_2 deux normes sur E.

$\exists \alpha > 0 \ / \ N_1(X) \leq \alpha N_2(X)$

- Toute boule ouverte dans (E, N_2) est un ouvert de (E, N_1).

$B_1(a,r) = \{x \in E / N_1(a-x) < r\}$ ouverte de (E, N_2) ?

Soit $x \in B_1(a;r)$, $\exists! \rho > 0 \ / \ B_2(x,\rho) \subset B_1(a,r)$.

$N_1(a-x) < r$ $\qquad$ $N_2(x-y) < \rho \Rightarrow N_1(a-y) < r$

$N_1(a-y) \leq N_1(a-x) + N_1(x-y) < N_1(a-x) + \alpha N_2(x-y) < r$

si $N_2(x-y) < \frac{r - N_1(a-x)}{\alpha} = \rho$.

Soit U un ouvert de (E, N_1)

On a $\forall x \in U, \exists r_x > 0 \ / \ B_1(x, r_x) \subset U$

$\Rightarrow \bigcup_{x \in U} B_1(x; r_x) \subset U$, or $\forall x \in U$, x est centre d'une boule.

donc $U \subset \bigcup_{x \in U} B_1(x; r_x)$

et par suite on a l'égalité :

$U = \bigcup_{x \in U} B_1(x; r_x)$, D'après la question présédent

WWW.TALIB24.COM

$B_1(x; r_n)$ est un ouvert de (E, N_2)

donc U est un ouvert de (E, N_1)

Exercice 8

1- on Montrer que :

* $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

on a $x \in \mathring{A} \Rightarrow A$ voisinage de x

et comme $A \subset B$, alors B voisinage de $x \Rightarrow x \in \mathring{B}$

* $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

on a $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall V$ voisinage de x $V \cap A \neq \emptyset$

et on a $V \cap A \subset V \cap B \Rightarrow V \cap B \neq \emptyset$

alors $x \in \bar{B}$

2ème methode :

* $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

on soit que $\mathring{A} \subset A \subset B$

Comme $\mathring{A}$ est un ouvert et $\mathring{A} \subset B$ donc $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

* $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

on soit que $A \subset \bar{B} \subset \bar{B}$ or $\bar{B}$ est un fermé et $A \subset \bar{B}$ alors $\bar{A} \subset \bar{B}$

2- * $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \\ \overline{A \cap B} \subset \bar{B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

Exemple : $A =]a, b[$ et $B =]b, c[$

$\bar{A} = [a, b]$ et $\bar{B} = [b, c]$

A

WWW.TALIB24.COM

* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

on a, $\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

et $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

on a $\overline{A} \cup \overline{B}$ est fermé comme reunion de deux fermés (finies)

or $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$ donc $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A} \cup \overline{B}$ fermé $\Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

d'où le resultat.

* $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

$$\begin{aligned} C_E \overset{\circ}{\overline{A \cap B}} &= \overline{C_E A \cap B} = \overline{C_E A \cup C_E B} \\ &= \overline{C_E A} \cup \overline{C_E B} \quad (\text{d'après } 2) \\ &= C_E \mathring{A} \cup C_E \mathring{B} \\ &= C_E \mathring{A} \cap \mathring{B} \end{aligned}$$

D'où $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

* $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$

$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathring{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A \cup B}} \\ \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overline{A \cup B}} \end{cases} \Rightarrow \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$

Exemple : Soient $A = [1, 2]$, $B = [2, 3]$

$\mathring{A} =]1, 2[$, $\mathring{B} =]2, 3[$

$\overset{\circ}{\overline{A \cup B}} =]1, 3[$

or $2 \in \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$ et $2 \notin \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

WWW.TAEB24.COM

Exercice 9 Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2+y^2 < 1\}$$

On déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A.

tq : $\mathring{A}$, $\bar{A}$ et $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

1) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 2\}$

$= \bar{B}((0,0), \sqrt{2})$

et $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2+y^2 < 1\}$

$= B((1,0), 1)$

* On a $A = B \setminus C = B \cap C_E^c$

Comme B est fermée c est ouvert

alors A est fermé : $A = \bar{A}$

* $\mathring{A} = \overset{\circ}{\widetilde{B \cap C_E^c}} = \mathring{B} \cap \mathring{C}_c = \mathring{B} \cap C\bar{C}$ (Exercice précédent)

$= \mathring{B} \cap C\bar{C}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 2\} \cap \{(x,y \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2+y^2 > 1\}$

* $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = A \setminus \mathring{A}$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2+y^2 < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2+y^2 \geq 1\}$

donc : $Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2+y^2 = 1\}$

WWW.TALIB24.COM

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 2\}$; $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2+y^2 < 1\}$

$A = B \setminus C = B \cap C^c$, $\overline{B} = B$; $\mathring{C} = C$

$\mathring{A} = \mathring{B} \cap \mathring{C^c} = \mathring{B} \cap \overline{C}$

$Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = A \setminus \mathring{A} = A \cap C\mathring{A}$

$= (B \cap \overline{C}) \cap (\overline{\mathring{B}} \cup \overline{C}) = (B \cap \overline{C} \cap \overline{\mathring{B}}) \cup (B \cap \overline{C} \cap \overline{C})$

$= (B \cap \overline{\mathring{B}} \cap \overline{C}) \cup (\overline{C} \cap \overline{C} \cap B)$

$= (\overline{B} \setminus \mathring{B}) \cap (C) \cup ((\overline{C} \setminus \mathring{C}) \cap B)$

$= (Fr(B) \cap C) \cup (Fr(C) \cap B)$

Exercice 10

1 $\Rightarrow$ 2 : $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall V$ voisinage de x $V \cap A \neq \emptyset$

la Déf. de Vois. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\mathbb{R}$ est Archimédien $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in A$ et $\|x_n - x\| < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in A$ et $x_n \longrightarrow x$.

$2 \Rightarrow 3$: on a, $x_n \in A$, $x_n \longrightarrow x$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N \quad \|x - x_n\| < \varepsilon$

D'après la caracterisation du borne "Inf"

$\Rightarrow \inf_{a \in A} \|x - a\| = 0$

$3 \Rightarrow 1$: D'après la caracterisitique de borne "Inf"

On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / \|x - a\| < \varepsilon$

WWW.TALIB24.COM

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall V$ voisinage de x, $V \cap A \neq \emptyset$

car : $\forall V$ vois. de x, $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \subset V$.

$\Rightarrow x \in \overline{A}$

Exercice 11 :

Soit E un evn et F un sous espace vectoriel de E.

1- On montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

$\overline{F} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \overline{F} \neq \emptyset$

. si $x \in \overline{A}$

Alors $\exists$ une suite $(x_n)_n \longrightarrow x$ ~~et~~

et si $y \in \overline{A}$ aussi $\exists$ une suite $(y_n)_n \longrightarrow y$.

On définit une suite $(z_n)_n$ par : $z_n = x_n + y_n$

~~puisque F est sev~~ $\Rightarrow z \longrightarrow x + y$

Donc $\overline{A}$ est stable par la lois $+$.

et on définit une autre suite $z_n = (\lambda x_n + \mu y_n) \in F$

puisque $z = \lambda x + \mu y$ on a $z_n \longrightarrow z$

Donc $\|z_n - z\| \longrightarrow 0$

Donc $\overline{A}$ est stable par la lois $\times$.

Donc : $\overline{A}$ est un sev.

2- $\mathring{F} \neq \emptyset$, Soit $a \in \mathring{F}$

Montrons que $F = E$

Il suffit de montrer que $E \subset F$.

Soit $x \in E$

on a : $a \in \mathring{F}$ $\Rightarrow$ F est un voisinage de a.

$\Rightarrow \exists r > 0, B(a,r) \subset F$

$\Rightarrow y = a + \frac{r}{2}\left(\frac{x-a}{\|x-a\|}\right)$

$\Rightarrow y - a = \frac{r}{2}\left(\frac{x-a}{\|x-a\|}\right)$

$\Rightarrow \|y-a\| = \frac{r}{2} < r \Rightarrow y \in B(a,r) \subset F$

$\Rightarrow y \in F$

$\Rightarrow (y-a) \in F$

$\Rightarrow (x-a) \in F$

Donc : $\Rightarrow x \in F$.

WWW.TALIB24.COM

TD D'Analyse III
Filières SMA/SMI (Sem. 3)

Exercice 1 *Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. Pour $x \in E$, on pose*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|,$$

cette quantité positive est appelée distance de x à A.

1. *Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.*
2. *Montrer que pour tout couple (x, y) de points de E, on a :*

$$d(x, A) \leq \|x - y\| + d(y, A).$$

3. *En déduire que l'application $x \longrightarrow d(x, A)$ est continue (on montrera qu'elle est lipschitzienne de rapport 1).*
4. *Soient A et B deux parties non vides de E.*
   (a) *Montrer que l'ensemble*

$$\Omega = \{x \in E \ / \ d(x, A) < d(x, B)\}$$

   est un ouvert de E.
   (b) *En utilisant ce qui précède, montrer que si A et B sont des fermés disjoints, il existe deux ouverts U et V de E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.*

Exercice 2 *Soient E, F deux evn et $f : E \longrightarrow F$ une application uniformément continue.*

WWW.TALIB24.COM

1. *Montrer que si la suite $(U_n)_n$ est de Cauchy dans E, alors la suite $(f(U_n))_n$ est de Cauchy dans F.*

2. *On suppose que F est complet, f bijective et f^{-1} continue. Montrer que E est complet.*

Exercice 3 *Soient E un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que*

$$\forall x \in E, \qquad N_1(x) \leq \alpha N_2(x).$$

1. *Montrer que toute boule ouverte de (E, N_1) est un ouvert de (E, N_2), plus généralement tout ouvert de (E, N_1) est un ouvert de (E, N_2).*

2. *Soit $K \subset E$. Montrer que si K est compact dans (E, N_2) alors K est compact dans (E, N_1).*

Exercice 4 *Soient F un fermé et C un compact de $\mathbb{R}^n$. On note*

$$G = F + C = \{x + y,\ x \in F \text{ et } y \in C\}.$$

Montrer que G est fermé.

Exercice 5 *Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :*

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^4 = 1\right\}, \\ B &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^5 = 2\right\}. \end{aligned}$$

Exercice 6 *Soient E un evn, U un ouvert de E et K compact de E tel que $K \subset U$. Montrer qu'il existe $r \in IR^{*+}$ tel que, pour tout $x \in K$, $B(x,r) \subset U$ [on considérera l'application $f : E \to IR^+(x \to d(x, \complement_E^U)$].*

WWW.FALIB24.COM

T.D 2 : Topologie de $\mathbb{R}^n$ + Fonctions différentiables.

Exercice 1 : $(E, \|.\|)$, $A \subset E$, $x \in E$.

$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$

1° $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ (Voir ex10, série N°1)

2° $(x, y) \in E^2$

$d(x, A) \leq \|x - y\| + d(y, A)$.

tq : $\inf \|x - a\| \leq \|x - y\| + \inf \|y - a\|$

on a : $\|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\| \quad \forall a$

Donc :

tq $\inf_{a \in A} \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\| \leq \|x - y\| + \inf_{a \in A} \|y - a\|$

3° En déduire : $\begin{array}{l} x \longrightarrow d(x, A) \\ E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \end{array}$ est continue

(on montrera qu'elle est lipschitzienne de rapport 1).

4° $A \subset E$, $B \subset E$, $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$

a- $\Omega = \{x \in E / d(x, A) < d(x, b)\}$ est ~~un~~ ouvert de E.

b- En utilisant ce qui précède montrer que si A et B sont des fermés disjoints, il $\exists$ deux ouverts U et V de E tq : $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$

3° $\begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow d(x, A) \end{array}$ continue.

on a : $d(x, A) \leq \|x - y\| + d(y, A)$

Alors $d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$

de même manière, comme x et y jouer le même rôle.

WWW.TALIB24.COM

tq $d(y,A) - d(x,A) \leq \|y-x\| = \|x-y\|$

Alors : $|d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|$

On en déduit que $x \longrightarrow d(x,A)$ est lipschitzienne de rapport 1, Alors elle est uniformément continue

Alors elle est continue.

4°- A, B deux parties non vides de E.

a- on montrer que l'ensemble

$$\Omega = \{x \in E / d(x,A) < d(x,B)\}$$

est un ouvert de E.

On a : $x \longrightarrow d(x,A)$ et $x \longrightarrow d(x,B)$ sont continue sur E.

$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow d(x,B) - d(x,A) \end{array}$ est continue sur E.

$f^{-1}(\mathbb{R}^{*+}) = \Omega$ est un ouvert de E, puisque $\mathbb{R}^{*+}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

b- si A et B sont des fermés, $A \cap B = \emptyset$, $\exists U, V$ deux ouverts de E, tq $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

On a A est fermé donc $A = \bar{A}$

montrer que $A \subset \Omega$

Soit $x \in A \Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow d(x,A) = 0$

d'autre part $x \in A$ donc $x \notin B$, or $B = \bar{B}$ donc $x \notin \bar{B} \Rightarrow d(x,B) \neq 0$

alors $d(x,A) = 0 < d(x,B)$ et par suite $x \in \Omega$

donc $A \subset \Omega$, on pose $\Omega = U$

on a : $A \subset \{x \in E / d(x,A) < d(x,B)\} = U$

donc : $B \subset \{x \in E / d(x,B) < d(x,A)\} = V$

on a bien $U \cap V = \emptyset$

WWW.TALIB24.COM

Exercice 2 Soit E, F deux evn et $f : E \to F$ une application uniformément continue.

1 - On montrer que si la suite $(U_n)_n$ est de Cauchy dans E, alors la suite $(f(U_n))_n$ est de Cauchy dans F.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists ? n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall p \geq q \geq n_0$ on a $\|f(U_p) - f(U_q)\| \leq \varepsilon$

f est uniformement continue $\Rightarrow \exists \eta_\varepsilon > 0 \,/\, \forall x, y \in E$ on a

$\|x - y\| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$

2 - Soit $(U_n)_n$ de Cauchy dans E.

on a $(f(U_n))_n$ est de Cauchy dans F et comme F est complet

alors : $f(U_n) \longrightarrow y = \lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n)$

or f est bijective donc : $\exists ! x \in E$ tq $y = f(x)$

on a alors : $(f(U_n))_n \longrightarrow f(x)$.

D'où $f^{-1}(f(U_n)) = U_n \longrightarrow f^{-1}(f(x)) = x$. Car f^{-1} est continue

$(U_n)_n$ converge vers $x \Rightarrow E$ complet.

Exercice 3

① Voir Ex 7 Série N°1.

② Soit $K \subset E$, K compact dans (E, N_2) alors K est compact de (E, N_1).

(H) K compact dans (E, N_2)

on mq K compact dans (E, N_1)

et supposons $K \subset \bigcup\limits_{i \in I} W_i$, W_i ouvert de (E, N_1)

d'après la 1er question W_i et ouvert de (E, N_2)

Comme K compact dans (E, N_2) donc

$\exists J$ finie $J \subset I \,/\, K \subset \bigcup\limits_{i \in J} W_i \Rightarrow K$ compact dans (E, N_1).

WWW.TALIB24.COM

$\boxed{\text{Exercice 4}}$

Soient F une fermé et C un compact de $\mathbb{R}^n$,

on note $G = F + C = \{x + y, x \in F \text{ et } y \in C\}$

on montrer que G est fermé.

Montrons que $\overline{G} = G$, on a $G \subset G$

Soit $z \in \overline{G}$

Donc Il existe une suite $(z_n)_n$ d'éléments de G qui converge vers z

$\exists\ (x_n, y_n) \in F \times C$ tq $z_n = x_n + y_n$ et $\lim\limits_{+\infty} z_n = z$

Comme C est compact donc $\exists\ \varphi\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \nearrow$

tq $y_{\varphi(n)}$ converge dans C.

Posons $y = \lim\limits_{+\infty} y_{\varphi(n)}$ on a $y \in C$

$\forall n \quad z_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} + y_{\varphi(n)}$

on a $z_{\varphi(n)}$ convergente car ~~est~~ extraite de z_n vers z.

~~Donc~~ me $x_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}$

on a $x_{\varphi(n)} \longrightarrow z - y$

Posons $x = z - y = \lim\limits_{+\infty} x_{\varphi(n)} \in F$ (F fermé)

cad $z = \underset{F}{x} + \underset{C}{y}$

d'ou $z \in G$

Donc $G = \overline{G}$.

WWW.TALIB24.COM

$\boxed{\text{Exercice 05}}$

① $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x^2 + y^4 = 1\}$

A compact ?

* On considère : $f : (x,y) \longrightarrow x^2 + y^4$
$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

f est continue sur $\mathbb{R}^2$

et on a : $A = f^{-1}(\{1\})$

Comme $\{1\}$ est fermé

Alors A est fermée.

* Comme $x^2 + y^4 = 1$ alors

$x^2 \leq 1$ et $y^4 \leq 1$

donc $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$

d'où A est borné.

Donc A est compact.

② $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x^2 + y^5 = 2\}$

* B est fermé comme A.

* B n'est pas bornée

En effet $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists ! y = \sqrt[5]{2 - x^2}$

tq $(x,y) \in B$

donc $B = \{(x, \sqrt[5]{2-x^2}) ;\ x \in \mathbb{R}\}$

donc B n'est pas borné

d'où B n'est pas compact.

WWW.TALIB24.COM

Exercice 6

$K \subset U \subset E$

compact ← K ; U ↓ ouvert ; E ↖ e.v.n

Mq $\exists r>0$ tq $x \in K$, $B(x,r) \subset U$

on considère $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $(x \to d(x, C_E^U))$

f continue sur E donc sur K (d'après Ex1).

Donc f est borné et atteint ses bornes dans K

Cad $\exists x_0 \in K$ $f(x_0) = \inf_{x \in K}(f(x)) = \inf(d(x, C_E^U))$

~~Posons $r = \inf f(x_0)$~~

on a : $f(x_0) = d(x_0, C_E^U)$

si $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in \overline{C_E^U} = C_E^U$

or $x_0 \in K \subset U$ donc $f(x_0) > 0$

Posons $r = f(x_0)$

Mq $\forall x \in K$ $B(x,r) \subset U$?

on a $r = \inf_{x \in K}(d(x, C_E^U)) = \inf_{x \in K}(\inf_{y \in C_E^U} \|x-y\|)$

$\forall x \in K, \forall y \in C_E^U : \|x-y\| \geq r$

$\Rightarrow \forall x \in K, \forall y \in C_E^U$ on a $y \in C_E^{B(x,r)}$

$\Rightarrow \forall x \in K, C_E^U \subset C_E^{B(x,r)}$

ce qui implique $\forall x \in K$ $B(x,r) \subset U$.

WWW.TALIB24.COM

TD D'Analyse III
Filières SMA/SMI (Sem. 3)
Série 3

Exercice 1 *Soient n applications $f_1, f_2, ..., f_n$ définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et x un point de U. On suppose que pour $i = 1, 2, ..., n$:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h_i} = A_i.$$

On considère l'application f de U dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i.$$

Montrer que f est différentiable en x et déterminer la différentielle de f au point x.

Exercice 2 *Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & si \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$ et étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.*

Exercice 3 *Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$\begin{cases} f(x,y) &= (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad si \ (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0. \end{cases}$$

WWW.TALIB24.COM

1. *Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$.*

2. *Etudier l'existence des dérivées partielles de f en $(0,0)$.*

3. *Calculer les dérivées partielles de f en un point $(x,y) \neq (0,0)$.*

4. *Les fonctions dérivées partielles sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?*

5. *Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 4 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & si \quad x \neq y, \\ f'(x) & si \quad x = y. \end{cases}$$

Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 *Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & si\ x\ et\ y\ sont\ tous\ les\ deux\ rationnels, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en un seul point et étudier la différentiabilité de f en ce point.

Exercice 6 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment dérivable dont la dérivée seconde ne s'annule pas. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles secondes, harmonique, c'est à dire*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 0, \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On considère la fonction $F = f \circ g$.

1. *Calculer*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y).$$

2. *En déduire que F est harmonique si et seulement si la fonction g est constante.*

WWW.TALIB24.COM

Exercice 7 *Trouver toutes les applications* $\varphi : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^3 *telles que l'application* $f : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x,y,z) = \varphi(x^2+y^2+z^2),$$

vérifie :

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}.$$

Exercice 8 *Etudier les extremums des fonctions suivantes :*

1. $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
2. $h(x,y) = (x-y)\,e^{xy}$.

WWW.TALIB24.COM

TD 3 : Fonction différentiable

Exercice 1

Soit n application $f_1, f_2, \dots, f_n$ définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et x un point de U. On suppose que pour $i = 1, \dots, n$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h_i} = A_i .$$

et on considère l'application f de U dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

on mq f est différentiable en x et on détermine la dif. de f au point x.

Rappel $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$

f différentiable en a

$\Longleftrightarrow \exists u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire

$$\frac{f(a+h) - f(a) - u(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$\Longleftrightarrow \exists u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire W vois.

$\forall f \in W$: $f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\| \cdot \varepsilon(h)$.

- on a $\lim_{h \to 0} \frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h_i} = A_i$

Donc : $\varepsilon_i(h) = \frac{f_i(x+h_i) - f_i(x)}{h_i} - A_i \longrightarrow 0$ quand $h \to 0$

$$f_i(x+h) - f_i(x) = h_i A_i + h_i \varepsilon_i(h) \quad \text{avec } \varepsilon_i \xrightarrow[\text{qd } h \to 0]{} 0$$

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x+h) - f_i(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i A_i + \|h\| \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i \varepsilon_i(h)}{\|h\|}$$

Posons $\varepsilon(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{\|h\|} \cdot \varepsilon_i(h)$

WWW.TALIB24.COM

$$|\varepsilon(h)| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|h_i|}{\|h\|} \cdot \varepsilon_i(h)$$

$$\leq \frac{\sup_{i=1}^{n} \|h_i\|}{\|h\|} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(h)}_{\to 0}$$

$$\alpha \leq \frac{\|h_i\|_1}{\|h\|} \leq \beta.$$

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

(1) • f continue sur $\mathbb{R}^{2*}$

Comme composé de deux fonction continue sur $\mathbb{R}^{2*}$.

• Continuité en $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

on a : $|f(x,y)| = \dfrac{x^2y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$

on a : $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

alors : $|f(x,y)| \leq \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}^2 \cdot \sqrt{x^2+y^2}^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

2/ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

Si f est différentiable en $(0,0)$ on a nécessairement

$$df_{(0,0)}(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, k = 0$$

Calculons limite d'un rapport

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - 0(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

WWW.TALIB24.COM

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = \frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)^2}$$

on a : $\varepsilon(h,h) = \frac{1}{4} \neq 0$ que $h \to 0$

donc par suite $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} \neq 0$

on en déduit que f non différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3

Soit f :

$$\begin{cases} f(x,y) = (x+y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

1) on m.q f est continue en $(0,0)$

on a : $|f(x,y)| \leq (x+y)\cdot\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0$

donc f est continue en $(0,0)$.

2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} |h| \sin\frac{1}{|h|} = 0$

et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} |h| \sin\frac{1}{|h|} = 0.$

3) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^2+y^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x(x+y)}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

comme x et y jouent des rôles symetriques (c.à.d $f(x,y) = f(y,x)$)

on obtient $\frac{\partial f}{\partial y}$ en remplaçant dans l'expression $\frac{\partial f}{\partial x}$

x par y et y par x.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^2+x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y(x+y)}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

WWW.TALIB24.COM

(4) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \underbrace{\dfrac{2x^2+y^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{f_1(x,y)} - \underbrace{\dfrac{x(x+y)}{x^2+y^2} \cdot \cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{f_2(x,y)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0. \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $(\mathbb{R}^2)^*$ comme somme de deux fonction continue sur $(\mathbb{R}^2)^*$

$$|f_1(x,y)| \leq \frac{|2x^2+y^2+xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{2x^2+y^2+|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{3x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

$$f_2(x,0) = -\cos\frac{1}{|x|}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_2(x,0)$ n'existe pas (car $\cos x$ ne possède pas de limite à l'∞)

On en déduit que $\lim\limits_{(0,0)\to(x,y)} f_2(x,y) \neq 0$ Par suite $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en point $(0,0)$.

Par raisons de symétrie

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$

et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $(\mathbb{R}^2)^*$.

(5) si f est différentiable en $(0,0)$ alors l'app. linéaire et unique

$$u(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k = 0$$

Calculons :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} (h+k)\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Donc f est différentiable en $(0,0)$ et $df_{(0,0)} = 0$

f est diff sur $(\mathbb{R}^2)^*$. car les dér. partiel. $\exists$ est continues.

WWW.TALIB24.COM

Exercice 4

Remarque

Une droite dans $\mathbb{R}^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

$d: y = ax + b$.

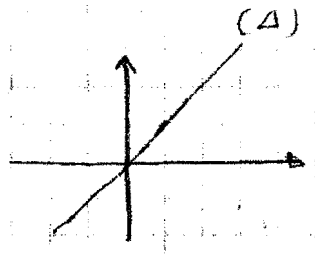
$d = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y - ax - b = 0\} = h^{-1}(\{0\})$ fermé.

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow y - ax - b$.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$



* on a alors (Δ) fermé de $\mathbb{R}^2$.

ρ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ car composée de fonction de classe C^1.

* On remarquera que x et y jouent des rôles symétriques donc il suffit ~~de~~ montrer que $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ ~~et~~ ρ est continue.

Calculons :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y) = \frac{f'(x)(x-y) - f(x) + f(y)}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,x) = \lim_{h \to 0} \frac{\rho(x+h,x) - \rho(x,x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right]\frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{h^2}$$

Comme f est de classe C^2 on a : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2}{2} \cdot f''(x) + o(h^2)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} f''(x) + o(1) + o(h^2)$$

$$= \frac{1}{2} f''(x).$$

WWW.TALIB24.COM

$$\lim_{y \to x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$$

$$\lim_{y \to x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} f''(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,x)$$

Exercice 5 :

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & ; \text{si } (x,y) \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{si non} \end{cases}$$

On montre que f est continue en un seul point et on étudie la différentiabilité de f en ce point :

* Rappel * :

Proposition : E et F des e.v.n $f : E \to F$

f continue en $a \in E \Leftrightarrow \forall (a_n) : (a_n) \to a$, alors $(f(a_n))_n \to f(a)$.

. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, et supposons que f est continue en (x_0, y_0).

On a : $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$; $\exists x_n \in \mathbb{Q}$ et $x_n \to x_0$

$y_0 \in \mathbb{R}$; $\exists y_n \in \mathbb{Q}$ et $y_n \to y_0$.

On a alors : $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ comme f est continue en (x_0, y_0)

on a $f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$; $\lim_{n \to +\infty} f(x_0, y_0) = \lim_{n \to +\infty} (x_n^2 + y_n^2)$

$= x_0^2 + y_0^2 = f(x_0, y_0)$ (1)

d'autre part : $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

$\exists x'_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x'_n \to x_0$

$\exists y'_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $y'_n \to y_0$

d'où : f

WWW.TALIB24.COM

d'où $f(x'_n, y'_n) = 0 \longrightarrow f(x_0, y_0)$

càd $f(x_0, y_0) = 0$ ②

D'après ① et ② on obtient $x_0^2 + y_0^2 = 0 \Rightarrow x_0 = y_0 = 0$

* si f est continue en (x_0, y_0) alors : $x_0 = y_0 = 0$.

. montrons que f est continue en $(0,0)$.

on a : $|f(x,y)| \leq x^2 + y^2$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$

donc : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

D'où f est continue en $(0,0)$.

* Differentiabilité en $(0,0)$:

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}$$

et $\lim \dfrac{f(h,k) - f(0,0) - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$.

d'après l'unicité de la différentiabilité (différentielle), f est différentiable en $(0,0)$ et $df_{(0,0)} = 0$.

Exercice 6.

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, C^2, $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

$\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

considérons $F = f \circ \rho$; $F(x,y) = f(\rho(x,y))$

WWW.TALIB24.COM

1°/ Calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \cancel{(\ldots)} = f'(\rho(x,y)) \times \frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y).$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \left(f'(\rho(x,y)) \times \frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y)\right)'$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y) \cdot f''(\rho(x,y)) \times \frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y) + f'(\rho(x,y)) \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x,y).$$

$$= f''[\rho(x,y)] \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y)\right)^2 + f'(\rho(x,y)) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x,y)$$

et on trouve aussi que: $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = f''[\rho(x,y)]\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}(x,y)\right)^2 + f'(\rho(x,y)) \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}(x,y)$.

Comme ρ est harmonique on a :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = f''[\rho(x,y)]\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}(x,y)\right)^2\right]$$

2°/ la fonction F sera harmonique si et seulement si pour chaque élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on a : $f''[\rho(x,y)]\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}(x,y)\right)^2\right] = 0$

or f'' ne s'annule pas, donc F sera harmonique si et seulement si pour chaque élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on a : $\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}(x,y)\right)^2 = 0$

ce qui équivalent à $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$ (1)

Si la fonction ρ est constante, la condition (1) est ~~statisfaite~~ satisfaite et F harmo.

Réciproquement supposons la condition (1) statisfaite, alors comme $\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y) = 0$, on a $\rho(x,y) = a + \varphi(y)$ où a est nombre réel et φ application différentiable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous avons alors : $\frac{\partial \rho}{\partial y}(x,y) = \varphi'(y) = 0$

donc l'application φ est constante; par suite la fonction ρ est constante.

WWW.TALIB24.COM

Exercice 7 :

$f : (\mathbb{R}^*)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$; ~~pour~~ $\varphi : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$; C^3

$$f(x,y,z) = \varphi(x^2+y^2+z^2)$$

et $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}^*)^3$: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$. ①

on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y,z) = 2x\, \varphi'(x^2+y^2+z^2)$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 2x \cdot 2y\, \varphi''(x^2+y^2+z^2)$

et $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z) = 2x \cdot 2y \cdot 2z\, \varphi'''(x^2+y^2+z^2)$. ②

Donc et d'après les formules ① et ②

$$8xyz\, \varphi'''(x^2+y^2+z^2) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \qquad \forall (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

tq $\varphi'''(x^2+y^2+z^2) = \dfrac{1}{8(x^2+y^2+z^2)}$

or $\varphi'''(t) = \dfrac{1}{8t}$ on intègre φ''' et on trouve.

$$\varphi(t) = \frac{1}{16} t^2 \ln t + A \cdot t^2 + Bt + D \quad ; \quad A, B \text{ et } D \text{ des réelles}$$

Exercice 8 :

On étudier les extremums des fonctions suivantes :

① $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

WWW.TALIB24.COM

i/ Recherche des points critique :

Il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

$\Rightarrow x \geq 0$ et $y \geq 0$ et $y^4 = y \Rightarrow y = 0$ et $y = 1$

$\left.\begin{array}{l} \text{si } y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{si } y = 1 \Rightarrow x = 1 \end{array}\right\}$ les points critiques sont $(0,0)$ et $(1,1)$.

ii/ Condition du second ordre : signe de $s^2 - rt$.

$(s^2 - rt)(0,0) = 9 > 0 \Rightarrow (0,0)$ point selle.

$(s^2 - rt)(1,1) = -27 < 0 \Rightarrow$ et $r(1,1) = 6 > 0$, $(1,1)$ minimum

② $h(x,y) = (x-y)e^{xy}$

i/ résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = e^{xy} + (x-y)y.e^{xy} \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -e^{xy} + (x-y).x.e^{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + xy - y^2 = 0 \\ 1 + xy - x^2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow$ ou $\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}$.

si $x = y \Rightarrow 1 + y^2 - y^2 = 0$ impossible.

Donc $x = -y \Rightarrow 1 - 2y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc les points critiques sont :

$\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

ii/ $s^2 - rt > 0 \Rightarrow \Delta h$ changer la signe, pas d'extrimum.

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sont des point selle.

WWW.TALIB24.COM