Semestre 3-SMA-SMI

T.D.1-Séries Numériques

Exercice 1 *Justifier que le nombre* $x = 1.8\overline{27}$ *est ratinnel et déterminer son écriture irréductible* $x = \frac{p}{q}$.

Exercice 2 *Soit la suite de terme général:*

$$u_n = \arctan\left(\frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2+1}\right)$$

1. *Montrer que* $u_n = \arctan(n+1)^2 - \arctan(n)^2$.
2. *En déduire la somme de la série* $\sum u_n$.

Exercice 3 *Calculer la somme des séries suivantes:*

1. $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \ln(1-\frac{1}{k^2})$.
2. $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{k}{3^k}$.

Exercice 4 *Etudier la nature des séries de terme général:*

1. $u_n = \left(\dfrac{an}{n+1}\right)^{n^2}$, *a réel positif.*
2. $u_n = n\ln(1+\dfrac{1}{n})$.
3. $u_n = (1+\dfrac{x}{n})^{-n^2}$, *x réel.*
4. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
5. $u_n = \dfrac{a^n}{2-\sin n}$, *a réel strictement positif.*
6. $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{1+ch^2x}dx$.
7. $u_n = \ln(n\sin\dfrac{1}{n})$
8. $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^{2n}$, $\alpha \in [0,\dfrac{\pi}{2}]$.
9. $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - a$, $a \in \mathbb{R}$.

10. $u_n = \dfrac{1}{(1+2n)\ln(1+2n)}$

Exercice 5 *Etudier la nature de la série de terme général:*

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)^n$$

Exercice 6

1. *Soient u_n et v_n deux suites réelles telles que les séries $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ sont convergentes.*
   Quelle est la nature de la série $\sum u_n v_n$
2. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente, montrer que la série $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ est aussi convergente.*

Exercice 7 *Etudier la nature des séries de terme général:*

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos(\dfrac{1}{n})$.
2. $u_n = (-1)^n(\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}})$.
3. $u_n = (-1)^n\dfrac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Exercice 8 *On considère la série $\sum u_n$ de terme général*

$$u_n = \frac{\sin(\frac{\pi}{2^n})}{2^n}$$

1. *Montrer que $\sum u_n$ est convergente.*
2. *Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|S - S_n| \leq \frac{1}{2^n}$.*
3. *Pour quelle valeur de n, S_n constitue-t-il une valeur approchée de la somme à 10^{-3} près?*

Exercice 9 *Soit (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 = a \in]0,1[$ et la relation de récurrence:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1. *Montrez que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0.*
2. *Prouvez la convergence de la série de terme général u_n^2 et calculez sa somme.*
3. *A l'aide des sommes partielles, prouvez que la série de terme général $\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est divergente vers $-\infty$.*
4. *Utilisez la règle des équivalents pour en déduire la nature de la série $\sum u_n$.*

TD1: Séries Numériques.

Exercice 1 (***)

Montrer que $x = 1,827\,27\,27\ldots$

On à: $x = 1,8 + 0,027 + 0,00027 + \ldots$

$$x = \frac{18}{10} + \frac{27}{1000} + \frac{27}{1000\,00} + \ldots$$

$$= \frac{18}{10} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{27}{10^{2k+1}}$$

$$x = \frac{18}{10} + \frac{27}{10} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-2k}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} (10^{-2})^k$ est une série géométrique de raison $0 < 10^{-2} < 1$

donc convergente et: $\sum_{k=1}^{\infty} (10^{-2})^k = 10^{-2} \cdot \frac{1}{1-10^{-2}}$

Alors $x = \frac{18}{10} + \frac{27}{10} \times \left(\frac{1}{10^2} \times \frac{1}{1-10^{-2}} \right)$

$$= \frac{18}{10} + \frac{27}{10} \times \left(\frac{1}{10^2 - 1} \right)$$

$$= \frac{18}{10} + \frac{27}{10} \times \frac{1}{99} = \frac{201}{110} \in \mathbb{Q}$$

Exercice 2:

Soit la suite de terme général:

$$U_n = \arctan\left(\frac{2n+1}{n^4 + 2n^3 + n^2 + 1} \right).$$

1- On montrer que $U_n = \arctan(n+1)^2 - \arctan(n)^2$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

On à: $\tan U_n = \tan\left(\arctan(n+1)^2 - \arctan(n)^2 \right)$

$$\tan U_n = \frac{(n+1)^2 - n^2}{1 + (n^2(n+1))^2}$$

$$= \frac{2n+1}{n^4 + 2n^3 + n^2 + 1} \quad / \text{avec } U_n \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$$

Donc : $\tan(a-b) = \tan(U_n)$

$\text{Arctan}(\tan(a-b)) = \text{Arctan}(\tan(U_n))$

avec $U_n \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

Donc $\text{Arctan}(\tan U_n) = U_n$

$0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ et $0 < b < \frac{\pi}{2}$

tel que : $-\frac{\pi}{2} < a - b < \frac{\pi}{2}$

Alors : $U_n = \text{Arctan}(n+1)^2 - \text{Arctan}(n)^2$

2- on pose que $v_n = \text{Arctan}(n^2)$

Alors $U_n = v_{n+1} - v_n$

or $\sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} v_{k+1} - v_k$

$= \cancel{v_2} - v_1 + \cancel{v_3} - \cancel{v_2} + \cancel{v_4} - \cancel{v_3} + \cancel{\cdots} v_{n+1} - \cancel{v_n}$

$\sum_{k=0}^{n} U_k = v_{n+1} - v_1 = \text{Arctan}(n+1)^2 - \text{Arctan}(0)^2$

$= \text{Arctan}(n+1)^2 - 0$

$\sum_{k=0}^{n} U_k = \text{Arctan}(n+1)^2$

Alors $S = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k = \lim_{n \to +\infty} \text{Arctan}(n+1)^2 = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3:

On calculer la somme des séries suivantes:

1- $S_n = \sum_{k \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(1-k)(1+k)}{k^2}\right)$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln k\right]$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(k+1) - \ln k\right] + \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(k-1) - \ln k\right]$$

$S_n = \ln(n+1) - \ln 2 - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2$

donc: $S = -\ln 2$

2- Soit $U_n = \frac{n}{3^n}$

a/ M.q $\sum U_n$ est convergente.

est soit S sa somme

b/ calculer S [indication on utilise $3S$]

→ a/ on a: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{3^n} \times \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3^n}$

$$\lim_{+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{3} < 1$$

Donc $\sum U_n$ est convergente.

→ b/ $3S = 3 \sum_{k=0}^{+\infty} U_n = 3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{3^k}$

$$= 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1+1}{3^{k-1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{3^{k-1}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{k-1}}$$

$$3S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{3^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$$

$$3S = S + \frac{1}{1-1/3} = S + \frac{3}{2}$$

Alors $S = \frac{3}{4}$

Exercice 4 :

On Etudier La Nature Des Séries De Terme Général :

1°/ $U_n = \left(\frac{an}{n+1}\right)^{n^2}$; a réel positif.

$$\sqrt[n]{U_n} = \left(\frac{an}{n+1}\right)^{n} = a^{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

$$= a^{n} \cdot e^{n \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)}$$

$$= a^{n} \cdot e^{n \frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{1/n}}$$

$$= a^{n} \cdot e^{-\frac{\ln(1+1/n)}{n}}$$

- Si $0 \leq a < 1$ $\quad a^n \longrightarrow 0$ d'où $\lim \sqrt[n]{U_n} = 0 < 1$

  Il est converge.

- Si $a > 1$ $\quad a^n \longrightarrow +\infty$ donc $\lim \sqrt[n]{U_n} \pm \infty >> 1$

  Il est diverge

- Si $a = 1$ $\quad a^n = 1$ donc $\lim \sqrt[n]{U_n} \longrightarrow e^{-1} < 1$.

  Il est converge.

2°/ $U_n = n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

on a $\lim U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n} = 1 \neq 0$

Donc $\sum U_n$ est divergente.

3°/ $U_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}$; x réel.

d'après Cauchy on a :

$$\lim_{n \to +\infty} |U_n|^{1/n} = \lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} = \lim e^{-n \cdot \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$= \lim e^{-n \cdot \left(\frac{x}{n}\right)} = e^{-x}$$

par D.L on trouve que $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{\substack{n \to +\infty}}{\sim} \frac{x}{n}$

- Si $x = 0$, on a $\lim |U_n|^{1/n} = 1$ or $\sum U_n$ divergente.
- Si $x < 0$, on a $\lim |U_n|^{1/n} > 1$ or $\sum U_n$ divergente.
- Si $x > 0$: on a $\lim |U_n|^{1/n} < 1$ or $\sum U_n$ ~~divergente~~.

4°/ $U_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (***)

par la règle d'Alembert on a :

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right|$$

et $\lim \left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim \left|\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\right| = \lim e^{-n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

Donc la série $\sum U_n$ est absolument convergente.

5°/ $U_n = \dfrac{a^n}{2 - \sin n}$, a réel strictement positif

on a $\forall n \quad -1 \leq -\sin n \leq 1$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leq 2 - \sin n \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin n} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underset{①}{\frac{a^n}{3}} \leq \frac{a^n}{2 - \sin n} \leq \underset{②}{a^n}$$

- si $0 < a < 1$, $\sum a^n$ converge, et d'après la règle de comparaison appliqué à l'inegalité 2.
  or $\sum U_n$ est aussi converge.
- si $a > 1$ $\sum \frac{a^n}{3}$ est divergent, et d'après la regle de comparaison appliqué à l'inegalité 1.
  or $\sum U_n$ est aussi divergent.

6°/ $U_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \frac{\sin x}{1 + ch^2 x} . dx = \int_0^{1/n} f(x) . dx$

on a : $\left[0, \frac{1}{n}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + ch^2 x} \geq 0 \Rightarrow U_n \geq 0$$

$$\int_0^{1/n} f(x) . dx \leq \int_0^{1/n} \frac{1}{1 + ch^2 x} dx \leq \int_0^{1/n} \frac{1}{ch^2 x} dx = th\left(\frac{1}{n}\right)$$

et $th\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

or $\displaystyle\int_0^{1/n} f(x) . dx \leq \int_0^{1/n} \sin x \, dx \leq \int_0^{1/n} x . dx = \frac{1}{n^2} = v_n$

$\sum v_n$ est une serie de Riemann avec $\alpha > 1$ donc $\sum v_n$ convergente, et d'après la regle de comparaison $\sum U_n$ est convergente.

7°/ $U_n = \ln\left(n \cdot \sin\frac{1}{n}\right)$

on a par D.L : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ V_0 ;

donc $\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$$n \cdot \sin\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{6n^2} + \underbrace{n \cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{\to 0}$$

Donc : $U_n \sim -\frac{1}{6n^2}$

~~est~~ la serie $\sum -\frac{1}{6n^2}$ est convergente, alors et d'aprés la regle d'équivalance $\sum U_n$ est convergente.

8°/ $U_n = \frac{e^n}{n} \cdot (\sin\alpha)^{2n}$; $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

9°/ $U_n = \left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^n - a$; $a \in \mathbb{R}$.

$$U_n = e^{n \cdot \ln \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} - a$$

Par D.L on a :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}n + \frac{1}{24n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc : $U_n = e^{n\left(-\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - a$

$$= e^{-1/2 - 1/12n + n \cdot o(1/n^2)} - a.$$

$$\lim U_n = e^{-1/2} - a$$

. si $a \neq e^{-1/2}$ alors U_n est grossièrement divergente.

. si $a = e^{-1/2}$ alors $U_n = e^{-1/2 - 1/12n + n \cdot o(1/n^2)} - e^{-1/2}$

$$= e^{-1/2}\left(e^{-1/12n + o(1/n)} - 1\right)$$

on sait que $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

telles que : $U_n \sim e^{-1/2}\left(-\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$$U_n \sim -e^{-1/2} \cdot \frac{1}{12n} = -\frac{e^{-1/2}}{12} \cdot \frac{1}{n}$$

$\sum U_n$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont de même nature par ($\sim$).

or $\sum \frac{1}{n}$ divergente, alors $\sum U_n$ divergente.

10°/ $U_n = \dfrac{1}{(1+2n)\cdot \ln(1+2n)}$

Soit $f(x) = \dfrac{1}{(1+2x)\cdot \ln(1+2x)}$; $x \in \mathbb{R}^{+*}$ or $x \in [1;+\infty[$

f continue et décroissante de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$, d'après la théorème de la comparaison à un intégrale, alors $\sum U_n$ et $\int_0^{\infty} f(x)\cdot dx$, sont de même nature.

$$I = \int_\alpha^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_\alpha^A \frac{1\,dx}{(1+2x)\cdot \ln(1+2x)}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2}\int_\alpha^A \frac{2\,dx}{(1+2x)\cdot \ln(1+2x)}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2}\Big[\ln(\ln(1+2x))\Big]_\alpha^A = +\infty$$

Alors I est divergente.

Donc $\sum U_n$ est divergente.

Exercice 5

On Etudier La Nature De la Serie $\sum U_n$ t.q :

$$U_n = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)^n.$$

$$U_n = e^{n\cdot \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)} = e^{-n\cdot \ln\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)} = e^{-n\cdot \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

et on a : $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc $U_n = e^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$

$$= e^{-\sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)} \sim e^{1/2}\cdot e^{-\sqrt{n}}$$

Donc $\sum U_n$ est $\sum e^{-\sqrt{n}}$ sont de même nature, par la théorème de $(\sim)$. est $\lim n^2 \cdot U_n = e^{1/2} \lim n^2 \cdot e^{-\sqrt{n}} = 0$

Alors d'après la série de référence de Riemann $\sum U_n$ convergente

Exercice 6 :

1- Soient U_n et V_n deux suites tq $\sum U_n^2$ et $\sum V_n^2$ sont convergentes

- on Etudier la nature de $\sum U_n . V_n$

on a $(|U_n| - |V_n|)^2 = U_n^2 + V_n^2 - 2|U_n||V_n| \geq 0$

donc $\frac{U_n^2 + V_n^2}{2} \geq |U_n| \cdot |V_n|$

on a $\sum U_n^2$ et $\sum V_n^2$ sont convergentes, donc par la théorème de comparaison $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont absolument convergentes.

2- d'après la question précédent :

$\sum \frac{\sqrt{U_n}}{n} = \sum \sqrt{U_n} \sqrt{\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

et $\sum \sqrt{U_n}^2 = \sum U_n$ convergente.

plus que $\sum \left(\sqrt{\frac{1}{n^2}}\right)^2 = \sum \frac{1}{n^2}$ d'aprés Riemann et converge

Donc $\sum \frac{\sqrt{U_n}}{n}$ est convergente.

Exercice 7 :

On Etudier la nature des séries suivantes :

1°/ $U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \cdot V_n$

D'après le D.L :

on a : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^2)$

$\cos \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{2n^{5/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$

- on a $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.
- $\sum \frac{(-1)^n}{2n^{5/2}}$ est converge ($\frac{5}{2} > 0$)
- $\sum o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$ est converge.

Donc $\sum U_n$ est convergente (somme de 3 séries convergentes.)

2°/ $U_n = (-1)^n \left(\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$

$$= \underbrace{(-1)^n \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{v_n} - \underbrace{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{w_n}$$

d'abord : $\frac{1}{\sqrt{n}} \in [0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$

Donc $\tan \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont ≥ 0 ;

De plus : $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\searrow$ et $\left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\searrow$ et $\left(\tan \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\searrow$

et $\lim_{n\to\infty} \tan \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Donc $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont des S.A qui vérifient le critère spécial, donc elles sont convergentes.

et $\sum U_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes.

3°/ $U_n = (-1)^n \cdot \dfrac{\sqrt{n}\,\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

Exercice 8 : $U_n = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^n} \geq 0$

1 - on a : $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{2^n}$

et $\sum \dfrac{1}{2^n}$ série convergent, alors $\sum U_n$ est converge.

2 - $S = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

$$|S - S_n| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

3 - $R_n = S - S_n$

$S = \underbrace{R_n}_{\xrightarrow[+\infty]{} 0} + S_n$ $\quad |R_n| \leq 10^{-3}$

Il suffit que $\dfrac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$

$$2^n \geq 10^3$$

$$n \geq 3 \cdot \frac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 10$$

Donc $S = S_{10} \pm 10^{-3}$ une valeur approchée

Exercice 9 : Soit :
$$\begin{cases} 0 < U_0 = a < 1 \\ U_{n+1} = U_n - U_n^2 \end{cases}$$

1/ on montrer que $(U_n)_n$ décroissante :

$U_{n+1} - U_n = -U_n^2 < 0$ Alors (U_n) est décroissante.

. on montrer aussi que $0 < U_n < 1$:

Pour $n = 0$ $\quad 0 < U_0 < 1$

on suppose que $0 < U_n < 1$

et on T/q $\quad 0 < U_{n+1} < 1$

on a : $U_{n+1} = U_n(1 - U_n)$

$0 < U_n < 1$

$0 < 1 - U_n < 1$

or $0 < U_n(1 - U_n) < 1$

Alors : $0 < U_{n+1} < 1$

En déduire que (U_n) est converge vers une limite ℓ

qui verifier que : $\ell = \ell - \ell^2$

tel que $\ell = 0$.

2°/ on Etudier la nature de $\sum U_n^2$:

et $U_n^2 = U_n - U_{n+1}$.

$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k^2$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k^2$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k - U_{k+1} = U_0 - U_{n+1}$

$S = U_0 = a$.

3°/ on a $\sum \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$.

$\sum \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = \sum \ln(U_{n+1}) - \ln(U_n)$ est une série télescopique

$T = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(U_{n+1}) - \ln(U_n) = \lim_{n \to +\infty} \ln(U_{n+1}) - \ln(U_0) = -\infty$

Alors $\sum \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$ est divergente.

4°/ $\ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = \ln\left(\frac{U_n(1-U_n)}{U_n}\right) = \ln(1 - U_n)$

Alors : $\ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) \sim -U_n$.

D'où $\sum U_n$ est divergente car $\sum \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$ est divergente.

Semestre 3-SMA-SMI

T.D.3-Séries entières

Exercice 1 *Déterminer le rayon de convergence des séries entières* $\sum a_n$*,pour,*

1. $a_n = \dfrac{1}{2^n + (-1)^n n^3}$
2. $a_n = 4^n + 3 - n$
3. $a_n = \dfrac{n!}{(2n)!}$
4. $a_n = \sin(\frac{n\pi}{6})$
5. $a_n = \int_0^1 (1+t^2)^n dt$
6. $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$
7. $a_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-2n+2}\right)$
8. $a_n = e^{\sqrt{n}}$
9. $a_n = (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n})^{\ln n}$

Exercice 2 *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes,*

1. $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{2^n+1} x^{2n}$
2. $\sum \dfrac{x^{4n+3}}{3^n+4}$
3. $\sum x^{n^2}$

Exercice 3 *Pour* $x \in \mathbb{R}$*, on pose* $f(x) = \sum_{n\geq 1} x^n \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

1. *Déterminer le rayon de convergence, R, de cette série.*
2. *Etudier la convergence de f pour* $x = \pm R$.
3. *Déterminer* $\lim\limits_{x \to R^-}$

Exercice 4 *On pose* $f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n \ln\left(\dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$

1. *Déterminer le rayon de convergence, R, de cette série.*
2. *Etudier la convergence de f pour* $x = \pm R$.

Exercice 5 *On suppose que les séries* $\sum a_{2n} z^n$ *et* $\sum a_{2n+1} z^n$ *ont pour rayon de convergence* R *et* R'*. Déterminer le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$.

Exercice 6 *Développez en série entière les fonctions suivantes,*

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x-2x^3}$
2. $f(x) = (x-1)\ln(x^2-5x+6)$
3. $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ *puis* $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{1-x}$
4. $f(x) = \arctan(x+\sqrt{3})$
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
6. $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ *(on utiliseras la relation* $(1-x-x^2)f(x) = x$*)*

Exercice 7 1. *Montrer que la fonction* arctan *est développable en série entière sur* $]-1,1[$ *et que pour* $|x| < 1$, *on a*

$$\arctan x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

2. *Montrer que pour* $|x| < 1$, *on a*

$$\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}$$

3. *Pour* $n \geq 1$, *on pose* $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$
   (a) *On pose* $f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n x^n$. *Quel est le domaine de définition de* f? *Exprimer* $f(x)$ *à l'aide des fonctions usuelles pour* $|x| < 1$.
   (b) *Calculer les deux sommes* $S = \sum_{n\geq 1}(-1)^n u_n$ *et* $S' = \sum_{n\geq 1} u_n$

Exercice 8 *Soient* f *et* g *les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},\ g(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x f(t)dt$$

1. *Montrer que* f *et* g *sont développable en série entière en 0 et calculer leur rayon de convergence.*
2. *Exprimer* $\int_0^1 f(t)dt$ *à l'aide d'une série numérique.*
3. *Montrer que* g *est solution de l'équation différentielle,* $y' - xy = 1$. *En déduire les coefficients du développement en série entière de* g *en 0.*
4. *Déduire des questions précédentes, l'égalité suivante,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1.3....(2n-1)} = \sqrt{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}$$

T.D 3 : Séries Entières

Exercice 1.

*** Rappel ***

R : rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

- $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+, \sum a_n r^n \text{ converge}\} = \sup\{|z|, z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ converge absolument}\}$
  $= \sup\{r \in \mathbb{R} ; (a_n z^n) \text{ bornée}\}$.
- Caractérisation de R :
  + Si $|z| < R$: $\sum a_n z^n$ converge absolument.
  + Si $|z| > R$; $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement divergente.
  + Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$
  + Si $\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$
  + Si $|a_n| \sim |b_n|$: $R_a = R_b$
  + Si $|a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$.
  + $R_{\sum (a_n + b_n) z^n} \geq \min(R_a, R_b)$.

1°/ $a_n = \dfrac{1}{2^n + (-1)^n n^3}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^n + (-1)^n n^3}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}(n+1)^3} = \frac{1 + (-1)^n \frac{n^3}{2^n}}{2 + (-1)^{n+1}(n+1)^3/2}$$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$ car la serie $\sum \frac{n^3}{2^n}$ est converge.

$\lim\limits_{+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}$ Donc $R = 2$.

2°/ $a_n = 4^n + 3 - n$

$\sqrt[n]{a} = 4\sqrt[n]{1 + \frac{3}{4^n} - \frac{n}{4^n}}$ et $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{+\infty} 4 e^{\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{3}{4^n} - \frac{n}{4^n}\right)} = 4$

Donc $R = \frac{1}{4}$

3°/ $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$

$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{4n^2} = 0$

Donc $R = +\infty$.

4°/ $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

$|a_n| \leq 1 = |b_n|$

donc $R \geq R_b$ le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$

$R_b = 1$ donc $R \geq 1$

Pour $z = 1$: $\sum a_n z^n = \sum a_n$

On a a_n ne tend pas vers 0, en effet, il n'admet pas de limite

car $\lim_{+\infty} a_{6k} = 0$ et $\lim_{+\infty} |a_{6k+1}| = \frac{1}{2}$

donc $\sum a_n$ est div.

donc $R \leq 1$ et par suite $R = 1$.

5°/ $a_n = \int_0^1 (1+t^2)^n dt$.

on a $(2t)^n \leq (1+t^2)^n \leq 2^n$

donc $\underline{b_n} = \frac{2^n}{(2n+1)} \leq a_n \leq 2^n = C_n$

R_b de b_n, et R_c de C_n.

Donc $R_c \leq R \leq R_b$

d'après d'Alembert $R_c = \frac{1}{2} = R_b$

Donc $R = \frac{1}{2}$.

6°/ $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} = \alpha_n - \alpha_{n+1}$

$\sum a_n z^n$ de rayon 1, en effet : $\sqrt[n]{\alpha_n} = n^{1/n^2} = e^{\frac{1}{n^2}\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\Rightarrow R \geq \min(1,1) = 1$

$a_n = e^{\frac{1}{n}\ln n} - e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} = e^{\frac{1}{n}\ln n}\left[1 - e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}}\right]$

$a_n \sim 1 - e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}}$

$e^x - 1 \sim x$ donc $a_n \sim -\frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln n}{n}$

$\frac{\ln(n+1)}{n+1} = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} = \frac{\ln n}{n^2} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$a_n \sim \frac{\ln n}{n^2} = b_n$

on a $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = 1 = R_b$.

Donc $R = 1$.

7°/ $a_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-2n+2}\right)$

$\ln(x) = \ln(1 + (x-1)) \underset{\substack{x \to 1 \\ x-1 \to 0}}{\sim} x - 1$

Donc : $a_n \sim \frac{n^2+1}{n^2-2n+2} - 1 = \frac{2n-1}{n^2+2n-2} = b_n$

donc $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont de m̂ rayon de convergence

et $\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$ alors $R = 1$.

8°/ $a_n = e^{\sqrt{n}}$

$\sqrt[n]{a_n} = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ et $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

Donc $R = 1$.

9°/ $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^{\ln n}$.

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq n$

d'où $1 \leq a_n \leq n^{\ln n} \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq n^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2}$

et on a $\lim e^{\frac{(\ln n)^2}{n}} = 1$

$\lim_{+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \Rightarrow R = 1$.

Exercice 2 :

1°/ $\sum \frac{\sqrt{n}}{2^n+1} \cdot x^{2n} = \sum a_n z^n$

On a : $a_n = \begin{cases} \bullet \ \frac{\sqrt{n}}{2^n+1} & \text{si } n \text{ est paire.} \\ \bullet \ 0 & \text{si } n \text{ est impaire.} \end{cases}$

Soit $f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2^n+1} \cdot x^{2n}$

Pour $x \neq 0$; $\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1+2^{1/n}}{2+1/2^n} \cdot x^2$

$\lim_{+\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \frac{x^2}{2}$

* si $\frac{x^2}{2} < 1$ càd $|x| < \sqrt{2}$, $\sum f_n$ converge abs
* si $\frac{x^2}{2} > 1$ càd $|x| > \sqrt{2}$; $\sum f_n$ diverge.

Donc $R = \sqrt{2}$.

2°/ $\sum \frac{x^{4n+3}}{3^n+4} = \sum b_n z^n$

$b_n = \begin{cases} \frac{1}{3^k+4} & \text{si } n = 4k+3. \\ 0 & \text{si } n = 4k \text{ ou } n = 4k+1 \text{ ou } n = 4k+2 \end{cases}$

on a $b_{4n+3} = \frac{1}{3^n+4}$ et $b_{4n+1} = b_{4n+2} = b_{4n} = 0$

Soit $f_n(x) = \frac{x^{4n+3}}{3^n+4}$

$\lim \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim \left| \frac{1+4/3^n}{3+4/3^n} + x^4 \right| = \frac{x^4}{3}$

- si $\frac{x^4}{3} < 1$ c.à.d si $|x| < \sqrt[4]{3}$, $\sum f_n$ converge.
- et si $\frac{x^4}{3} > 1$ càd, $\sum f_n(x)$ est diverge.

$\Rightarrow R = \sqrt[4]{3}$

3°/ $\sum x^{n^2} = \sum C_n x^n$

$$C_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré parfait.} \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Soit $f_n(x) = x^{n^2}$

$$\sqrt[n]{|f_n(x)|} = |x|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} \cdot\ 0 & \text{si } |x|<1 \\ \cdot\ 1 & \text{si } |x|=1 \\ \cdot\ +\infty & \text{si } |x|>1 \end{cases}$$

Donc, d'après Cauchy :

- si $|x|<1$, $\sum f_n$ converge.
- si $|x|>1$, $\sum f_n$ diverge $\Rightarrow R=1$.

Exercice 3 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n\geq 1} x^n \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

1°/ Le rayon de convergence de cette série :

On a : $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$

$\lim \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = 1 \Rightarrow R_b = 1 = R$.

2°/ La Convergence de f pour $x = \pm R$:

- Pour que $x=1$: $\sum x^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

  or $\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = T_n$, La série de terme générale T_n diverge d'après Riemann. donc par $(\sim)$ $\sum \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ est diverge.

- Pour que $x=-1$: $\sum \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot x^n = \sum (-1)^n \underbrace{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}_{v_n}$

La suite (v_n) est décroissante positif, en effet, $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ et $x \to \sin x$ est $\nearrow$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)_n \searrow$

$\lim v_n = 0$, donc $\sum (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série alternée qui vérifie le critère spécial, donc convergente.

3°/ La limite de f que x tends vers R^-.

on a $x \longmapsto S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ est $\nearrow$

càd $x \leq y$: $S_N(x) \leq S_N(y)$

$f(x) \leq f(y)$ donc f est $\nearrow$ sur $[0,1[$.

$$\ell = \sup_{x\in[0,1[} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sup_{x\in[0,1[} \sum_{n=1}^{N} x^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{N} \sup_{x\in[0,1[} x^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Donc $\forall N$, $\ell \geq \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$

Donc $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

Exercice 4:

On pose $f(x) = \sum_{n\geq 1} x^n . \ln\left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$

1°/ Le rayon de convergence de cette série:

on a: $a_n = \ln\left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

on a: $a_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; $|a_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \sum a_n x^n$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont de même rayon de convergence

c.à.d $R = 1$.

2°/ La convergence de f pour $x = \pm R$:

• Pour $x = 1$: $\sum a_n x^n = \sum a_n$

on a : $a_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{U_n} \underbrace{- \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)}_{V_n}$

$\sum U_n$ est une série alternée converge (C.S)

$V_n \sim -\frac{1}{n}$ donc $\sum V_n$ est diverge.

d'où $\sum a_n$ est diverge comme somme d'une série converge et div.

• Pour $x = -1$; $\sum a_n x^n = \sum a_n \cdot (-1)^n$

et $(-1)^n a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$

on a $(-1)^n a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est le plus fort, il est une signecte donc $(-1)^n a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

Donc : par $(\sim)$ $\sum a_n \cdot (-1)^n$ est divergente.

Exercice 5 :

On suppose que $\sum a_{2n} z^n$ de rayon R_1 et $\sum a_{2n+1} z^n$ de rayon R_2

• $\sum_{n \geq 0} a_n z^n = (a_0 + a_1 z) + (a_2 z^2 + a_3 z^3) + \dots + (a_{2k} z^{2k} + a_{2k+1} z^{2k+1}) + \dots$

$= \sum_{n \geq 0} \left(a_{2n} z^{2n} + a_{2n+1} z^{2n+1}\right)$

Soit R_a le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

on a : $R_a \geq \min(R_1, R_2)$

▲ $\sum a_{2n} z^{2n}$ est converge, si $|z^2| < R$ càd : $|z| < \sqrt{R}$.

diverge, si $|z^2| > R$ càd : $|z| > \sqrt{R}$

$\Rightarrow R_1 = \sqrt{R}$.

▲ $\sum a_{2n+1} z^{2n+1} = z \sum a_{2n+1} (z^2)^n$ a pour rayon $R_2 = \sqrt{R'}$

$\Rightarrow R_a \geq \min(\sqrt{R}, \sqrt{R'})$

• Soit $\sum b_n z^n = \sum a_{2n} z^{2n} \Rightarrow b_n = \begin{cases} a_{2n} & \text{si } n \text{ paire} \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$

$|b_n| \leq |a_n|$

$\Rightarrow R_1 \geq R_a$ de même on montrer que :

$R_2 \geq R_a \Rightarrow \min(R_1, R_2) \geq R_a$

donc $R_a = \min(\sqrt{R}, \sqrt{R'})$.

Exercice 6 :

On développe en série entière les fonctions suivantes

1°/ $f(x) = \dfrac{1}{1+x-2x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(2x+1)} = \dfrac{1/3}{1-x} + \dfrac{2/3}{2x+1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2} ; 1\}$

On sait que : $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$, $\forall x \in]-1,1[$

et $\dfrac{1}{1-2x} = \sum_{n\geq 0} (-2)^n = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n$, $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

Donc $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0} x^n + \frac{2}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^n 2^n x^n = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left[1+(-1)^n 2^{n+1}\right]x^n ; \forall |x| < \frac{1}{2}$$

2°/ $f(x) = (x-1)\cdot \ln(x^2-5x+6) = (x-1)\ln((x-3)(x-2))$

$D_f =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$

f est plus developpable en S.E dans $]-2,2[$.

$\forall x \in]-2,2[$; $f(x) = (x-1)\left[\ln(3-x) + \ln(2-x)\right]$

$= (x-1)\cdot\left[\ln 3 + \ln\left(1-\frac{x}{3}\right) + \ln 2 + \ln\left(1-\frac{x}{2}\right)\right]$

Le dev. en S.E de $\ln(1+U) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{U^n}{n}$ $U \in]-1,1[$

D'ou $\ln\left(1-\frac{x}{2}\right) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{(-x/2)^n}{n} = -\sum_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{2^n n}$ $\forall x \in]-2,2[$

$\ln\left(1-\frac{x}{3}\right) = -\sum_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{3^n\cdot n}$ $\forall x \in]-3,3[$

donc $\forall x \in]-2,2[$, $f(x) = (x-1)\cdot\left[\ln 6 - \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{2^n n} - \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{3^n n}\right]$

3°/ $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ puis $g(x) = \frac{e^{x^2}}{1-x}$.

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

f plus developpable dans $]-1,1[$; $f(x) = e^x \cdot \frac{1}{1-x}$.

et on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$; $\forall x \in]-1,1[$

$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$; $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\right)$

* Rappel *

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right) = \sum c_n z^n \\ \text{d'où } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \end{array}}$$

d'où : $\forall x \in]-1,1[$; $f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

alors : $f(x) = \sum_{n\geq 0} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) x^n$, $x \in]-1,1[$

- $g(x) = \frac{e^{x^2}}{1-x}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$g(x) = (1+x)\cdot\frac{e^{x^2}}{1-x^2} = (1+x)\cdot f(x^2)$$
$$= (1+x)\left(\sum 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) x^{2n}.$$
$$= \sum_{k\geq 0} \left(1 + \dots + \frac{1}{k!}\right)\left(x^{2k} + x^{2k+1}\right) ; \forall x \in]-1,1[$$

$g(x) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n x^n$ avec

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} & ; \text{ si } n = 2k \\ 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} & ; \text{ si } n = 2k+1. \end{cases}$$

4°/ $f(x) = \arctan(x+\sqrt{3})$.

$D_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x+\sqrt{3})^2} = \frac{1}{x^2+2\sqrt{3}x+4}$$

$\Delta' = i^2$ tq $\alpha_1 = -\sqrt{3} - i = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

$\alpha_2 = -\sqrt{3} + i = 2e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

$$f'(x) = \frac{i/2}{(x-\alpha_1)} + \frac{i/2}{(x-\alpha_2)} = \frac{1}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}$$

$$= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{-\alpha_1(1-\frac{x}{\alpha_1})} + \frac{1}{\alpha_2(1-\frac{x}{\alpha_2})}\right)$$

On a : $\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha_1}} = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^n$; $|x| < |\alpha_2| = 2$

$\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha_2}} = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{x}{\alpha_2}\right)^n$; $|x| < 2$.

$$\forall x \in]-2,2[;\ f'(x) = \frac{i}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\left(\frac{-1}{(\alpha_1)^{n+1}} + \frac{1}{(\alpha_2)^{n+1}}\right)x^n\right)$$

$$= \frac{i}{2}\left[\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2^{n+1}e^{\frac{5\pi}{6}(n+1)i}} + \frac{1}{2^{n+1}e^{-\frac{5\pi}{6}(n+1)i}}\right)x^n\right]$$

$$f'(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{-x^n}{2^{n+1}} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}(n+1)\right)$$

Donc $f(x) = \int f'(x).dx = f(0) + \sum_{n\geq 0}\frac{-1}{2^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}(n+1)\right)$

$$= \frac{\pi}{3} + \sum_{n\geq 0}\frac{-x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{6}(n+1)\right)}{2^{n+1}}$$

5°/ $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$D_f =]-1,1[$.

$$f(x) = (1-x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On a : $(1+u)^{\alpha} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, $\forall u \in]-1,1[$

$\binom{\alpha}{n}$

ici $\alpha = -\frac{1}{2}$; $u = x^2$

donc $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n\geq 1} \binom{-1/2}{n} x^{2n}$

d'où $\forall x \in]-1,1[$: $f(x) = 1 - x + \sum_{n\geq 1} \binom{-1/2}{n} (x^{2n} - x^{2n+1})$

6°/ $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$

On peut faire D.S.E en décomposant f en éléments simples (à faire)

Si f est développable en S.E, càd $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$; comme on a $(1-x-x^2) f(x) = x$

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n - \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+2} = x$

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n - \sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^n - \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^n = x$

$a_0 + a_1 x - a_0 x + \sum_{n\geq 2} (a_n - a_{n-1} - a_{n-2}) x^n = x$

$\Rightarrow (a_0 = 0 ; a_1 - a_0 = 1 ; a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 ; \forall n \geq 2)$

$\alpha_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $\alpha_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

alors $a_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \lambda_2 \alpha_2^n$

λ_1, λ_2 tq $a_0 = 0$; $a_1 - a_0 = 1$.

T.D.4-Séries de Fourier

Exercice 1 *Soit la fonction 2π-périodique, paire définie par,*

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - x, \text{ pour } x \in [0,\pi].$$

1. *tracer le graphe de f.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de f, et étudier la convergence de la série de Fourier $S_F(f)$ de f.*
3. *En déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.*

Exercice 2 *Soit la fonction 2π-périodique définie par,*

$$f(x) = |x|, \text{ pour } x \in [-\pi,\pi[.$$

1. *Calculer les coefficients de Fourier de f, et étudier la convergence de la série de Fourier $S_F(f)$ de f.*
2. *En déduire les sommes des séries suivantes,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad et \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 3 *On considère la fonction 2π-périodique définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{pour} \quad x \in [0,\pi[\\ 0 & \text{pour} \quad x \in [\pi,2\pi[\end{cases}$$

1. *Tracer le graphe de la fonction. En quels points n'est-elle pas continue?*
2. *Déterminer sa série de Fourier et étudier sa convergence.*
3. *En déduire les sommes*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad et \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

4. *Montrer que l'on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}$$

Exercice 4 *Soit la fonction 2π-périodique, impaire, définie sur $[0,\pi]$ par,*

$$f(x) = x(\pi - x)$$

1. *Calculer les coefficients de Fourier de f, et étudier la convergence de la série de Fourier $S_F(f)$ de f.*
2. *En déduire les sommes des séries suivantes,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}.$$

Exercice 5 *Développer en série de fourier la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par*

$$f(x) = |\sin x|$$

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

Exercice 6 *Soit f la fonction impaire et périodique de période 4 telle que:*

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2, \quad \text{sur} \quad [0,2]$$

1. *Calculer les coefficients de fourier de f.*
2. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} \sin(\frac{n\pi x}{2})$$

3. *En déduire* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{(2n+1)^3}$

d'après th. de Dirichlet :

. on a f est continue sur $]0,\pi[$

par partie, f est continue sur $]-\pi,0[$

Vérifions en 0 et π.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\pi}{2} = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\pi}{2} = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

de même f continue en π, par périodicité ; f est continue sur $\mathbb{R}$.

. f est dérivable sur $]0,\pi[$ et $]-\pi,0[$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim \frac{\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{2}}{x} = -1$$

..

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2}+x-\frac{\pi}{2}}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{f(x)-f(\pi^-)}{x-\pi^-} = \lim_{x\to \pi^-} \frac{\frac{\pi}{2}-x-\pi/2}{x-\pi} = -1$$

$$\lim_{x\to \pi^+} \frac{f(x)-f(\pi^+)}{x-\pi^+} = \lim_{x\to \pi^+} \frac{\frac{\pi}{2}+x-\pi/2}{x-\pi} = 1$$

donc la série de fourier de f converge vers $\frac{f(x^+)-f(x^-)}{2}$

or f continue sur $\mathbb{R}$.

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x) = S_F(f)(x)$

3°/ En déduire la Somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

• Pour $x=0$, $f(0)=\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

• $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=?$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k^2}+\frac{\pi^2}{8}$$

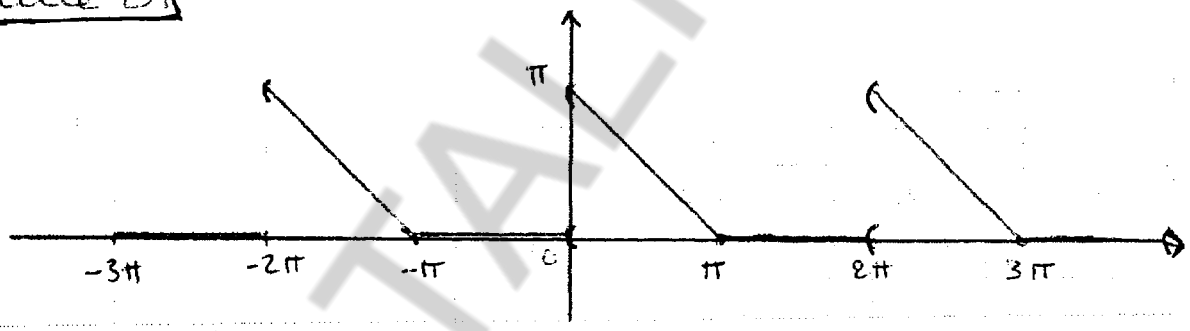
d'où : $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 2 Comme l'ex. 1

Exercice 3

1°/



2°/ • $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}f(x)\,dx$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\,dx=\frac{\pi}{4}$$

• $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{(\pi-x)\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\cdot\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cdot\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{(x-\pi)\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n} - \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{n}.$$

Donc : $S_F(f)(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx\right)$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n\geq 0}\frac{2}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin nx$$

- f continue sur $]0, 2\pi[$.
- Vérifions que 0 est un point de 1er espece.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+}(\pi - x) = \pi \\ \lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{2\pi^-} f(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{0^+} f(x) \neq \lim_{0^-} f(x).$$

donc 0 est un point de discontinuité de 1er espece.

- f dérivable sur $]0,\pi[$ et $]\pi, 2\pi[$

f admet une dérivée a droit en 0, une dérivée à gauche et à droite en π, et une dérivée à gauche en 2π.

D'après le théorème de Dirichlet on a $S_F(f)$ converge vers :

$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$, càd : $\forall x \in]0, 2\pi[+ 2k\pi$.

$$f(x) = S_F(f)(x).$$

et pour $x = 2k\pi$; $S_F(f)(2k\pi) = \frac{f(2\pi k^+) + f(2\pi k^-)}{2} = \frac{\pi}{2}$

3°. Pour $x = 0$, $S(f)(0) = \frac{\pi}{2}$

Donc : $S_F(f)(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n\geq 0}\frac{2}{\pi(2n+1)^2}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\left(S_F(f)(0) - \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

• Pour $x = \frac{\pi}{2}$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = S_F^1(f)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_F^1(f)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

4°/ $\forall x \in]\pi, 2\pi[$, $f(x) = 0 = S_F^1(f)(x)$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

$\forall x \in]0, \pi[$; $-x \in]-\pi, 0[$

donc : $f(-x) = 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$

et par périodicité :

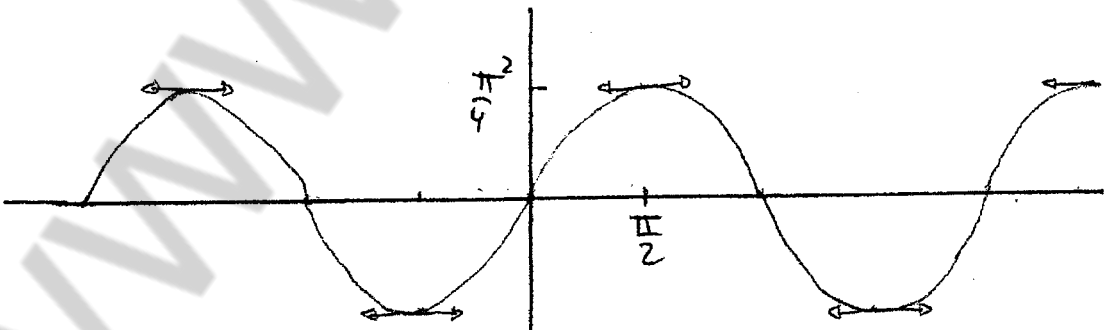
$\forall x \in]\pi, 2\pi[+ 2k\pi$; $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n} = -\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right.$

$\forall x \in]0, \pi[+ 2k\pi$; $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

Exercice 4 :

Soit la fonction 2π-périodique, impaire, définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = x(\pi - x).$$



on a f est impaire $\Rightarrow a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\cdot\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\cdot\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)'dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left\{\left[x(\pi-x)\cdot\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}(\pi-2x)\frac{\cos nx}{n}\,dx\right\}.$$

$$= \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'dx$$

$$= \frac{2}{\pi n}\cdot\left\{\left[\frac{(\pi-2x)}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\frac{\sin nx}{n}\,dx\right\}.$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{n^2\pi}\cdot\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)$$

$$S_F(f)(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{4}{n^3\pi}\cdot\left(1-(-1)^n\right)\sin nx.$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{4}{(2n+1)^3\pi}\,2\cdot\sin(2n+1)x = \frac{8}{\pi}\cdot\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}.$$

• On a f est continue sur $]0,\pi[$ et par la parité, f est continue sur $]-\pi,0[$.

Vérifiens en 0 :

→ $\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} x(\pi-x) = 0 = f(0)$.

→ $\lim_{0^-} f(x) = \lim_{0^-} -f(-x) = \lim_{0^-} x(\pi+x) = 0 = f(0)$.

f est continue en 0.

→ $\lim_{\pi^-} f(x) = \lim_{\pi^-} x(\pi-x) = 0 = f(\pi)$

→ $\lim_{\pi^+} f(x) = \lim_{(-\pi^+)} x(\pi+x) = 0 = f(\pi)$

f est continue en π ⇒ f est continue sur $\mathbb{R}$.

• f dérivable sur $]0,\pi[$ et $]-\pi,0[$ et :

$\lim_{0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$; $\lim_{0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$; $\lim_{\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$; $\lim_{\pi^+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x+\pi}$ existe

d'après le théorème de Dirichlet ⇒ on a $S_F(f)$ converge vers f ; (f continue).

+ $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(2n+1)}{(2n+1)^3}$.

• Pour $x=\frac{\pi}{2}$; $f(\frac{\pi}{2})=\frac{8}{\pi}\sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^2}{4}$.

$\Rightarrow \sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

• $\sum\frac{1}{(2n+1)^6}$

* Remarque* $S_F(f(x))$ est N.C, car : $\forall x\in\mathbb{R}$.

$$\left|\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}\right|\leqslant\frac{1}{2n+1}$$

et : $\frac{1}{(2n+1)^3}\sim\frac{1}{8n^3}$ et $\sum\frac{1}{8n^3}$ converge.

D'après l'égalité (la dentité) de

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n\geqslant1}(a_n^2+b_n^2)=\sum_{n\geqslant1}b_n^2.$$

$$\int_0^{2\pi}f^2(x)dx=\int_0^{2\pi}x^2(\pi-x)^2dx=\left[\frac{\pi^2}{3}x^3-\frac{2\pi}{4}x^4+\frac{x^5}{5}\right]_0^{2\pi}$$

$$=\pi^5\left(\frac{8}{3}-8+\frac{32}{5}\right).$$

$$\sum b_n^2=\sum\frac{64}{\pi^2(2n+1)^6}=\pi^4\left(\frac{8}{3}-8+\frac{32}{5}\right).$$

Exercice 6 :

f est 4-périodique : $T=4$

f est impaire $\Rightarrow a_n=0\ \forall n$.

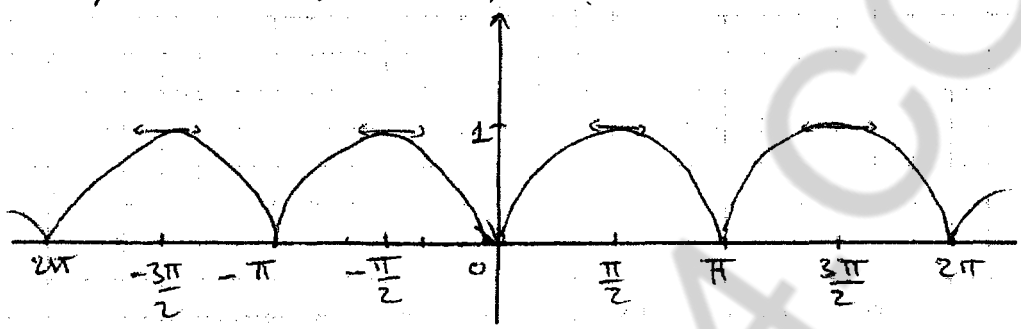
1°- $b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(nx\omega)dx$ avec $\omega=\frac{2\pi}{T}$

$$S_F(f(x))=a_0+\sum_{n\geqslant1}a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x).$$

2°/ et 3°/. Comme les ex. précédents.

Exercice 5.

$$f(x) = |\sin x|.$$



f est paire $\Rightarrow b_n = 0$, $\forall n$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} \quad \text{si } n \neq 1$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}\right]; \quad n \geq 2$$

$$= \frac{1+(-1)^n}{\pi}\left[\frac{2}{1-n^2}\right] \quad n \geq 2$$

$$a_{2n+1} = 0 \; ; \quad a_{2n} = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}$$

- $n = 1$; $a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi} = 0$

Donc : $S_F(f(x)) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$

- f vérifie les conditions de Dirichlet,

En effet, f est continue sur $\mathbb{R}$

f admet une dérivé à droite et à gauche au toute point.

d'après le théorème de dirichlet.

$$S_F(f(x)) = f(x) \; ; \forall x \in \mathbb{R}.$$

c.à.d : $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$

- Pour $x=0$; $f(0) = 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$

d'où : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.